

Complementi di Fisica subnucleare

Dr. Paolo Ciafaloni

A.A. 2003 - 2004

Indice

1	Richiami introduttivi	2
1.1	Notazioni	2
1.2	Sistema di unità di misura “naturali” ($\hbar = c = 1$)	3
1.3	Trasformazioni di Lorentz	3
1.4	Teoria delle perturbazioni dipendente dal tempo	3
2	Equazioni del moto per particelle libere	4
2.1	Particelle scalari: l’equazione di Klein-Gordon	4
2.2	Fermioni: l’equazione di Dirac	5
2.3	Bosoni di gauge	6
2.4	Soluzioni ad energia negativa; mare di Dirac e interpretazione di Feynman	7
3	Regola d’oro di Fermi; spazio delle fasi	8
3.1	La regola di Fermi nel caso non relativistico	8
3.2	Caso relativistico; sezioni d’urto e decadimenti	9
4	Le interazioni elettromagnetiche: primi esempi	10
4.1	Particella carica in interazione col campo elettromagnetico	10
4.2	Ampiezza per lo scattering elettromagnetico di particelle di spin 0	11
4.3	Sezione d’urto per lo scattering elettromagnetico di particelle di spin 0	12
4.4	Scattering Compton sul pione	14
5	Interazioni elettromagnetiche dei fermioni	17
5.1	Diffusione elettrone-pione in QED	17
5.2	Sezione d’urto elettrone-muone	19
6	Sezione d’urto elettrone-protone	20
6.1	Fattori di forma	20
6.2	Limite non relativistico della corrente: il momento magnetico dell’elettrone	21
6.3	Scattering elastico elettrone-protone	23
6.4	Scattering inelastico elettrone-protone	23
6.5	Il modello a partoni	27
6.6	Il modello a partoni e i quarks	28
A	Appendice	29
A.1	Spinori di Weyl con polarizzazione assegnata	29

1 Richiami introduttivi

1.1 Notazioni

Per i quadri e trivettori uso le notazioni: \mathbf{p} è un trivettore e $p = (p_0, \mathbf{p}) = (p_0, p_1, p_2, p_3)$ un quadri-vettore. Analogamente $x = (x_0, \mathbf{x})$. In linea generale uso le lettere greche $\alpha, \beta, \mu, \nu, \dots$ per gli indici di Lorentz che vanno da 0 a 3: $\mu = 0, 1, 2, 3$. Per gli indici spaziali che vanno da 1 a 3 uso invece i, j, k ; ad esempio $i = 1, 2, 3$. Indico i versori con $\hat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$. Inoltre $g_{\mu\nu} = \text{Diag}(1, -1, -1, -1)^*$. Le matrici di Pauli e di Dirac sono date da:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu} \quad \{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0 \quad (3)$$

*La notazione $\text{Diag}(a,b,c,\dots)$ indica una matrice diagonale con gli elementi specificati in parentesi sulla diagonale. Il tensore metrico $g_{\mu\nu}$ è quindi una matrice 4x4 diagonale con gli elementi (1,-1,-1,-1) sulla diagonale.

$$\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + i \epsilon_{ijk} \sigma_k \quad \gamma_\mu \gamma_\nu = g_{\mu\nu} + \frac{[\gamma_\mu, \gamma_\nu]}{2} \quad (4)$$

Sono qui omesse le matrici identità; ad esempio con $\sigma_i \sigma_j = \delta_{ij} + \dots$ si intende $\sigma_i \sigma_j = \mathbf{I} \delta_{ij} + \dots$ dove \mathbf{I} è la matrice identità 3x3. Analogamente, $\gamma_\mu \gamma_\nu = \mathbf{I} g_{\mu\nu} + \dots$ dove \mathbf{I} è la matrice identità 4x4.

1.2 Sistema di unità di misura “naturali” ($\hbar = c = 1$)

In fisica delle alte energie si usa un sistema di unità di misura in cui $\hbar = c = 1$. In questo modo si evita di portarsi dietro \hbar e c nei calcoli. Massa ed energia, essendo $c = 1$, si misurano entrambe in unità di energia eV . Per tornare a unità di misura usuali occorrono due costanti fisiche dimensionate, ad esempio:

$$c \approx 3 \cdot 10^8 m/s \quad \hbar c \approx 200 MeV fm \quad 1 fm = 10^{-15} m \quad (5)$$

Esempi (definiamo le dimensioni di massa $[M]$, lunghezza $[L]$, energia $[E]$ ecc):

- Una velocità $v = 0.3$ corrisponde a $0.3 c \approx 9 \cdot 10^7 m/s$
- Le energie si misurano in eV. Siccome $\hbar c = [E][L] = 1$, le lunghezze si misurano in eV^{-1} , e siccome $c = 1$ il tempo si misura in eV^{-1} .
- Una massa di 1 GeV come quella del protone corrisponde a $\frac{1 GeV}{(3 \cdot 10^8 m/s)^2} = \frac{1.6 \cdot 10^{-10} J}{(3 \cdot 10^8 m/s)^2} \approx 1.8 \cdot 10^{-27} kg$

1.3 Trasformazioni di Lorentz

Una trasformazione di Lorentz lungo l'asse delle x è definita da (v è la velocità relativa dei sistemi di riferimento):

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(x - vt) \quad t' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(t - vx) \quad y' = y \quad z' = z \quad (6)$$

ed è tale che $t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$. Più in generale, definito un quadrivettore (x_0, x_1, x_2, x_3) , le trasformazioni di Lorentz sono tutte quelle che lasciano invariante la norma $x^2 \equiv x_\mu x^\mu = x_\mu g^{\mu\nu} x_\nu = x_0^2 - \mathbf{x}^2$. Si definiscono quantità con indici in alto $x^\mu \equiv g^{\mu\nu} x_\nu$ di modo che $x^2 = x_\mu x^\mu$. Da un punto di vista formale, le trasformazioni di Lorentz formano un gruppo che si può rappresentare con matrici Λ 4x4: $x'_\mu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu$. Ad esempio le usuali rotazioni spaziali $\mathbf{x}' = \mathbf{R}\mathbf{x}$ con $\mathbf{R}^t \mathbf{R} = 1$ appartengono ovviamente al gruppo di Lorentz, così come la (6) e le sue generalizzazioni lungo altre direzioni. Un tensore a n indici si trasforma come $T'_{i_1 i_2 \dots i_n} = \Lambda_{i_1}^{j_1} \Lambda_{i_2}^{j_2} \dots \Lambda_{i_n}^{j_n} T_{j_1 j_2 \dots j_n}$. Le matrici Λ devono lasciare invariato il tensore metrico $g_{\mu\nu}$. Infatti:

$$x^2 = x'^2 \Rightarrow x_\alpha g^{\alpha\beta} x_\beta = g^{\mu\nu} \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta x_\alpha x_\beta \quad \forall x \Rightarrow g^{\alpha\beta} = g^{\mu\nu} \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta \quad (7)$$

notare che i quadrivettori con indici in alto trasformano in maniera diversa da quelli con indici in basso. Dalle definizioni sopra è infatti facile vedere che $x_\mu \rightarrow \Lambda_\mu^\nu x_\nu \Rightarrow x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ con $\Lambda^\mu_\nu = g^{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \Lambda_\alpha^\beta$. In concreto, se prendiamo ad esempio la (6) si ha ($\gamma = (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$):

$$x_1 \rightarrow \gamma(x_1 - vx_0), x_0 \rightarrow \gamma(x_0 - vx_1) \Rightarrow x^1 \rightarrow \gamma(x^1 + vx^0), x^0 \rightarrow \gamma(x^0 + vx^1) \quad x_0 x^0 + x_1 x^1 \rightarrow x_0 x^0 + x_1 x^1 \quad (8)$$

1.4 Teoria delle perturbazioni dipendente dal tempo

La rappresentazione più conveniente per la teoria delle perturbazioni è quella di interazione, nella quale l'Hamiltoniana totale viene spezzata nella somma di quella libera (esattamente risolvibile) e di quella di interazione: $H = H_0 + V$. Gli stati in rappresentazione di interazione sono dati da $\Psi_I = \exp(iH_0 t) \Psi_S$ dove Ψ_S è lo stato in rappresentazione di Schrödinger, che soddisfa $i\dot{\Psi}_S = H\Psi_S$. Gli operatori da $O_I = \exp(iH_0 t) O_S \exp(-iH_0 t)$ ed evolvono quindi con la Hamiltoniana libera: $i\dot{O}_I = [O_I, H_0]$. L'operatore di evoluzione è definito da $\Psi_I(t) = \mathcal{U}_I(t, t_0) \Psi_I(t_0)$. Dalla definizione di Ψ_I si ricava $i\dot{\Psi}_I(t) = H_I(t) \Psi_I(t)$ con $H_I(t) = e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t}$. L'equazione per l'operatore di evoluzione diventa:

$$i\dot{\Psi}_I(t) = H_I(t) \Psi_I(t) \quad \Psi_I(t = t_0) = \Psi(t_0) \quad \Leftrightarrow \quad i \frac{\partial \mathcal{U}_I(t, t_0)}{\partial t} = H_I(t) \mathcal{U}_I(t, t_0) \quad \mathcal{U}_I(t_0, t_0) = 1 \quad (9)$$

Questa equazione si può risolvere perturbativamente introducendo un parametro “piccolo” g che parametrizza l'interazione: $H_I \rightarrow gH_I$ e sviluppando in serie di g l'operatore di evoluzione: $\mathcal{U}_I(t, t_0) = \mathcal{U}_I^{(0)} + g\mathcal{U}_I^{(1)} + g^2\mathcal{U}_I^{(2)} + \dots$. La speranza è che i primi termini della serie forniscano una buona approssimazione, e che i termini successivi siano man mano più piccoli.

Per risolvere la (9) sostituiamo l'espansione in serie di potenze di g e uguagliamo membro a membro ottenendo:

$$i\frac{\partial\mathcal{U}_I^{(0)}}{\partial t} + ig\frac{\partial\mathcal{U}_I^{(1)}}{\partial t} + ig^2\frac{\partial\mathcal{U}_I^{(2)}}{\partial t} + \dots = gH_I\mathcal{U}_I^{(0)} + g^2H_I\mathcal{U}_I^{(1)} + \dots \Rightarrow i\frac{\partial\mathcal{U}_I^{(0)}}{\partial t} = 0, \quad i\frac{\partial\mathcal{U}_I^{(1)}}{\partial t} = H_I\mathcal{U}_I^{(0)}, \quad \dots \quad (10)$$

La prima equazione all'ultimo membro della (10) comporta che $\mathcal{U}_I^{(0)}(t, t_0) = 1$. La seconda è risolta da $\mathcal{U}_I^{(1)}(t, t_0) = -i\int_{t_0}^t H_I(t')dt'$. All'ordine g^2 si ottiene $i\frac{\partial\mathcal{U}_I^{(2)}}{\partial t} = H_I\mathcal{U}_I^{(1)}$ e quindi $\mathcal{U}_I^{(2)}(t, t_0) = (-i)^2\int_{t_0}^t H_I(t'')dt''\int_{t_0}^{t'} dt'H(t')$. In quest'ultima espressione si nota un ordinamento dei tempi: $t_0 < t' < t'' < t$. Procedendo iterativamente, è facile mostrare che:

$$\mathcal{U}_I(t, t_0) = \sum_n (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_1} dt_n H_I(t_n) \dots H_I(t_1) \equiv \mathcal{T} \exp[-i\int_{t_0}^t H_I(t')dt'] \quad H_I(t) = e^{iH_0t} V e^{-iH_0t} \quad (11)$$

dove \mathcal{T} è l'operatore di ordinamento temporale. Notare però che la (11) è una soluzione puramente formale: a livello di calcolo per osservabili concrete è molto difficile andare oltre i primi termini della serie. Nella pratica, in teorie come la QED, la QCD e le interazioni deboli solo i primi 2 o 3 termini sono stati calcolati, e sono di solito sufficienti.

Per descrivere un esperimento di scattering, si può pensare che l'interazione sia spenta per tempi molto lontani sia nel futuro che nel passato; si può ad esempio descrivere questa situazione con uno spegnimento adiabatico $H_I \rightarrow e^{-|t|} H_I$. Gli stati iniziali ($t \rightarrow -\infty$) e finali ($t \rightarrow \infty$) sono quindi autostati dell'Hamiltoniana libera: $H_0|f, i\rangle = E_{f,i}|f, i\rangle$. La quantità rilevante è la probabilità di transizione da uno stato che è un'onda piana entrante a $t = -\infty$ ad uno stato di onda piana uscente a $t = \infty$. Questa probabilità è il modulo quadro dell'ampiezza di transizione $\langle f|\mathcal{U}_I(-\infty, \infty)|i\rangle \equiv S_{fi}$, detto anche elemento di matrice S . Ad esempio nel caso di scattering da un potenziale esterno $V(\mathbf{x}, t)$ e al primo ordine perturbativo si ha:

$$S_{fi} = \langle f| \left[1 - i \int_{-\infty}^{\infty} e^{iH_0t} V e^{-iH_0t} dt \right] |i\rangle = \delta_{fi} - 2\pi i \delta(E_f - E_i) \langle f|V|i\rangle \quad (12)$$

Il primo termine dell'ultimo membro descrive il "non scattering", cioè è collegato al processo in cui la particella entrante non viene deviata. Il secondo termine è quello di scattering vero e proprio, ed è quello che analizzeremo in vari casi in questo corso.

Per capire cosa succede agli ordini successivi dello sviluppo in serie, consideriamo l'espansione:

$$\langle f|U(-\infty, \infty)|i\rangle = \langle f|i\rangle - i \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle f|e^{iH_0t} V e^{-iH_0t}|i\rangle - \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^t \langle f|dt' e^{iH_0t} V e^{-iH_0(t-t')} V e^{-iH_0t'}|i\rangle + \dots \quad (13)$$

dove i puntini indicano ordini superiori in H_I . Per dare un significato all'ultimo integrale, occorre fare la sostituzione $V \rightarrow V e^{-\varepsilon|t|}$ (spegnimento adiabatico) e dopo aver traslato $\tau = t - t'$ si ottiene:

$$- \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(E_i - E_f)t} \int_0^{\infty} d\tau \langle f|V e^{i(E_f - H_0 + i\varepsilon)\tau} V|i\rangle = -2\pi i \delta(E_f - E_i) \langle f|V \frac{1}{E_f - H_0 + i\varepsilon} V|i\rangle \quad (14)$$

Procedendo in maniera analoga per gli ordini successivi della teoria delle perturbazioni, è possibile mostrare che la matrice S soddisfa l'equazione ricorsiva (detta di Lippmann-Schwinger):

$$\boxed{S = 1 - 2\pi i T \delta(E_f - E_i) \quad T = V + V G_0 T \quad G_0 = \frac{1}{E_f - H_0 + i\varepsilon}} \quad (15)$$

Per finire, nel caso di scattering relativistico si usa spesso una *densità* di potenziale, per cui nelle ampiezze compare la quantità: $\int d^3\mathbf{x}V$ al posto di V nella (12).

2 Equazioni del moto per particelle libere

2.1 Particelle scalari: l'equazione di Klein-Gordon

La relazione fra energia e impulso per una particella relativistica di massa m è data da $E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. In altre parole, $p = (E, \mathbf{p})$ si trasforma secondo le trasformazioni di Lorentz come un quadrivettore di norma invariante $p^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 \equiv m^2$. Se vogliamo implementare questa relazione come una equazione per la funzione d'onda di uno scalare $\phi(x)$, ricordandosi che in Meccanica Quantistica $\mathbf{p} \rightarrow -i\nabla$, $E \rightarrow i\frac{\partial}{\partial t}$, otteniamo l'equazione di Klein-Gordon:

$$\boxed{-\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} + \nabla^2\phi = m^2\phi \Rightarrow (\square + m^2)\phi = 0 \quad \square \equiv \partial_\mu\partial^\mu = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2} \quad (16)$$

Cerchiamo una soluzione di onda piana della forma

$$\phi(x) = e^{-iEt+i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} = e^{-ipx} \quad px = p_\mu x^\mu = Et - \mathbf{p}\mathbf{x} \quad (17)$$

Sostituendo nella (16) otteniamo che deve valere $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$ che è la relazione voluta.

E' possibile definire una corrente conservata analoga a quella della MQ*:

$$J = (\rho, \mathbf{j}) \quad J_\mu = i\phi^* \partial_\mu \phi - i(\partial_\mu \phi^*) \phi \equiv i\phi^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi \quad \partial^\mu J_\mu = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} = 0 \quad (18)$$

Per il teorema della divergenza, l'interpretazione della corrente è che la variazione della carica in un dato volume V ($Q = \int_V d^3x \rho$) è pari al flusso della corrente \mathbf{j} . La validità della (18) è evidente utilizzando le equazioni del moto (16).

Una particella fisica viene descritta da un pacchetto d'onda:

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \int d^3\mathbf{p} \phi(\mathbf{p}) e^{-i\varphi(\mathbf{p})} \quad \varphi(\mathbf{p}) = E(\mathbf{p})t - \mathbf{p}\mathbf{x} \quad (19)$$

con la funzione $\varphi(\mathbf{p})$ significativamente diversa da zero in un intervallo $\Delta\mathbf{p}$ intorno al valore $\mathbf{p} = \bar{\mathbf{p}}$ in cui la $\phi(\mathbf{p})$ ha il suo massimo. L'integrale (19) è diverso da zero solo in una regione in cui la fase varia poco (*stazionarietà della fase*). In effetti nelle regioni in cui la fase varia rapidamente le oscillazioni dell'integrando fanno azzerare l'integrale. Il pacchetto d'onda è quindi significativamente diverso da zero nelle regioni in cui $d\varphi(\mathbf{p}) = \nabla_{\mathbf{p}} E(\mathbf{p})t - \mathbf{x} = 0$ da cui si ottiene la velocità del pacchetto (detta velocità di gruppo) $\mathbf{v}_g = \frac{\mathbf{x}}{t} = \nabla_{\mathbf{p}} E(\mathbf{p})$.

2.2 Fermioni: l'equazione di Dirac

L'equazione di Dirac descrive le particelle di spin $\frac{1}{2}$. Per una particella libera di massa m , si scrive:

$$\boxed{(i\partial - m)\psi(x) = 0 \quad \partial \equiv \gamma_\mu \partial^\mu \quad \{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}} \quad (20)$$

ψ è un quadrispinore, ha cioè quattro componenti, e le matrici di Dirac $\gamma_\mu, \mu = 0, 1, 2, 3$ sono matrici 4x4. Una possibile rappresentazione che soddisfa la regola di anticommutazione in (20) è data dalla (2). L'equazione di Dirac soddisfa le seguenti proprietà:

1. è covariante di Lorentz, cioè se $\psi(x)$ soddisfa l'equazione $(i\partial - m)\psi(x) = 0$ in un dato sistema di riferimento, dopo una trasformazione di Lorentz $x \rightarrow x', \psi \rightarrow \psi'$ l'equazione diventa $(i\partial' - m)\psi'(x') = 0$. In altre parole qualsiasi osservatore "vede" la stessa equazione.
2. Le soluzioni soddisfano la corretta regola di dispersione $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$

Il punto 1 per essere compreso necessita l'introduzione delle rappresentazioni spinoriali del gruppo di Lorentz, cioè di come trasforma uno spinore per trasformazioni di Lorentz; tale trattazione esula dallo scopo del corso. Il punto 2 invece si può ottenere moltiplicando la (20) per l'operatore $i\partial + m$:

$$(i\gamma_\mu \partial^\mu + m)(i\gamma_\mu \partial^\mu - m)\psi = 0 \Rightarrow -\left(\frac{\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\}}{2} + \frac{[\gamma_\mu, \gamma_\nu]}{2}\right) \partial^\mu \partial^\nu \psi - m^2 \psi = 0 \Rightarrow (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\psi = 0 \quad (21)$$

avendo utilizzato il fatto che il prodotto di un tensore simmetrico ($\partial^\mu \partial^\nu$) per uno antisimmetrico ($[\gamma_\mu, \gamma_\nu]$) è zero. L'equazione di Dirac ammette una corrente conservata, nella forma:

$$j_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \quad ; \quad \bar{\psi} \equiv \psi^\dagger \gamma_0 \quad (i\partial - m)\psi = 0 \Rightarrow \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (22)$$

Infatti, utilizzando la proprietà $\gamma_\mu^\dagger \gamma_0 = \gamma_0 \gamma_\mu$, si ha $(i\partial - m)\psi = 0 \Rightarrow -i\partial_\mu \psi^\dagger \gamma_\mu^\dagger \gamma_0 = m\psi^\dagger \gamma_0 \Rightarrow i\partial^\mu \bar{\psi} \gamma_\mu = -m\bar{\psi}$ da cui la conservazione della corrente.

Poiché ψ soddisfa la (21), le soluzioni hanno la forma $\psi(x) \sim e^{-ipx} u(p)$ con $(\not{p} - m)u(p) = 0$ e $p_0 = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Si preferisce per convenzione scrivere le soluzioni con energia negativa come $\psi(x) = e^{ipx} v(p)$, $(\not{p} + m)v(p) = 0$, $p_0 = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Vediamo per prime le soluzioni ad energia positiva. Indichiamo con α, β gli spinori di Weyl, cioè a due componenti, mentre ψ è un quadrispinore, con 4 componenti. L'equazione di Dirac corrisponde in notazione di Weyl a due equazioni:

$$(\not{p} - m)u = 0 \quad \text{con} \quad u = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} (p_0 - \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma})\beta = m\alpha \\ (p_0 + \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma})\alpha = m\beta \end{cases} \quad (23)$$

*notare che $\partial^\mu = \frac{\partial}{\partial x_\mu}$ cioè le derivate rispetto alle x_μ hanno gli indici in alto. Questo è reso evidente dal fatto che $\frac{\partial}{\partial x_\mu} x_\mu = 4$ deve essere indipendente dal sistema di riferimento. Inoltre, il fattore i in j_μ serve a rendere j_μ hermitiana

Le 2 equazioni che compaiono nella (23) sono in realtà equivalenti una volta imposta la relazione di “mass shell” $p^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2$. Infatti, risolvendo la seconda equazione per β e sostituendo nella prima si ottiene, utilizzando la (4), $(p_0 - \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma})(p_0 + \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma})\alpha = (p_0^2 - \mathbf{p}^2)\alpha = m^2\alpha$ che è identicamente soddisfatta. Possiamo quindi limitarci ad utilizzare la seconda delle (23). Esistono 2 soluzioni, corrispondenti a due possibili scelte per α ; potremmo ad esempio scegliere α_1 come lo spinore con $S_z = +\frac{1}{2}$ e α_2 come lo spinore con $S_z = -\frac{1}{2}$. In pratica però, data la forma della (23), conviene scegliere spinori che sono autostati di elicità, cioè che hanno lo spin orientato lungo la direzione del triimpulso. Definendo $\alpha(\hat{\mathbf{p}}) = \alpha_+$, $\alpha(-\hat{\mathbf{p}}) = \alpha_-$, le due soluzioni indipendenti si scrivono (vedi (A.1) in Appendice):

$$u_+ = \begin{pmatrix} \alpha_+ \\ \frac{p_0 + |\mathbf{p}|}{m} \alpha_+ \end{pmatrix} \quad u_- = \begin{pmatrix} \alpha_- \\ \frac{p_0 - |\mathbf{p}|}{m} \alpha_- \end{pmatrix} \quad \longrightarrow \quad u_+ = \begin{pmatrix} \sqrt{p_0 - |\mathbf{p}|} \alpha_+ \\ \sqrt{p_0 + |\mathbf{p}|} \alpha_+ \end{pmatrix} \quad u_- = \begin{pmatrix} \sqrt{p_0 + |\mathbf{p}|} \alpha_- \\ \sqrt{p_0 - |\mathbf{p}|} \alpha_- \end{pmatrix} \quad (24)$$

dove l'ultimo passaggio si riferisce alle soluzioni correttamente normalizzate in modo che $u^\dagger u = 2p_0$, $\bar{u}u = 2m$ e lo spazio delle fasi sia quello invariante relativistico (vedi par. (3)).

Nei calcoli di sezioni d'urto compare spesso la quantità $\sum_i u_i \bar{u}_i$, $i = +, -$ dove $\bar{u} \equiv u^\dagger \gamma_0$. Per ottenere questa quantità occorre scrivere i proiettori $\alpha_\pm \alpha_\pm^\dagger \equiv P_\pm$. Questi si possono ottenere (vedi (A.1)) dalla forma esplicita di α_\pm , oppure notando che i proiettori soddisfano $P_+ + P_- = 1$ e $\boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}}P_\pm = \pm P_\pm$, da cui si ricava $P_\pm = \frac{1 \pm \boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}}}{2}$. Si ottiene infine:

$$u_\pm \bar{u}_\pm = \begin{pmatrix} mP_\pm & (p_0 \mp |\mathbf{p}|)P_\pm \\ (p_0 \pm |\mathbf{p}|)P_\pm & mP_\pm \end{pmatrix} \Rightarrow \sum_{s=+,-} u_s \bar{u}_s = \begin{pmatrix} m & p_0 - \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} \\ p_0 + \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p} & m \end{pmatrix} = \not{p} + m \quad (25)$$

Le soluzioni ad energia negativa sono $\psi(x) = v(p)e^{ipx}$ con $p_0 = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ e quindi $(\not{p} + m)v(p) = 0$. Calcoli analoghi a quelli per le $u(p)$ conducono a:

$$v_- = \begin{pmatrix} \sqrt{p_0 - |\mathbf{p}|} \beta_+ \\ -\sqrt{p_0 + |\mathbf{p}|} \beta_+ \end{pmatrix} \quad v_+ = \begin{pmatrix} \sqrt{p_0 + |\mathbf{p}|} \beta_- \\ -\sqrt{p_0 - |\mathbf{p}|} \beta_- \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}}\beta_\pm = \pm \beta_\pm \quad \sum_{+,-} v\bar{v} = \not{p} - m \quad (26)$$

Notare che elicità $+$ delle soluzioni a energia negativa corrisponde a spinori di tipo $-$. Questo è dovuto alla nostra scelta delle soluzioni: $u(p)e^{-ipx}$ diventa, per le soluzioni con $E < 0$, $v(p)e^{ipx}$ cioè viene invertito, oltre al segno dell'energia, anche quello del triimpulso. Il che significa che uno stato a elicità $+$ è allineato a $-\mathbf{p}$: $\boldsymbol{\sigma}(-\mathbf{p})\beta = \beta \Rightarrow \boldsymbol{\sigma}\mathbf{p}\beta = -\beta$ cioè elicità $+$ per v corrisponde un bispinore β_- .

2.3 Bosoni di gauge

I bosoni di gauge sono i mediatori delle forze elettromagnetica, debole, forte. Cominciamo con vedere le equazioni di moto del fotone, la cui dinamica è descritta dalle equazioni di Maxwell*:

$$\boldsymbol{\nabla} \wedge \mathbf{E} = \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \boldsymbol{\nabla} \cdot \mathbf{E} = \rho \quad \boldsymbol{\nabla} \wedge \mathbf{B} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (27)$$

Prendendo la divergenza dell'ultima equazione si ottiene:

$$0 = \epsilon_{ijk} \partial_i \partial_j B_k = \partial_i \mathbf{j}_i + \frac{\partial}{\partial t} \partial_i E_i \Rightarrow \partial_i \mathbf{j}_i + \frac{\partial}{\partial t} \rho = \partial^\mu j_\mu = 0 \quad ; \quad j_\mu = (\rho, \mathbf{j}) \quad (28)$$

dove ho utilizzato la terza delle (27) e dove ho tenuto conto che $\epsilon_{ijk} \partial_i \partial_j B_k$ è la contrazione di un tensore simmetrico con uno antisimmetrico e vale quindi zero. La (28) è l'equazione di continuità per la densità di corrente. Le equazioni di Maxwell si possono scrivere in maniera compatta, oltre che relativisticamente invariante in maniera esplicita, introducendo un potenziale vettore A_μ tale che

$$\mathbf{B} = \boldsymbol{\nabla} \wedge \mathbf{A} \quad \mathbf{E} = -\boldsymbol{\nabla} A_0 - \dot{\mathbf{A}} \quad (29)$$

Che questo si possa fare è assicurato dalle prime due equazioni in (27). Le ultime due equazioni in (27) si riscrivono:

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} = j_\nu \quad \text{con} \quad F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (\Rightarrow \quad \partial^\mu j_\mu = 0) \quad (30)$$

e l'equazione di continuità è inclusa automaticamente. Questa equazione fisicamente implica la conservazione *locale* della corrente: la diminuzione di carica in un volume Ω è data dal flusso di corrente uscente da quel volume. Siccome possiamo prendere Ω piccolo a piacere, processi in cui la carica è creata in un punto e distrutta in un altro non sono

*Si usa qui il sistema di unità di misura “Heaviside-Lorentz”; vedi una discussione in Appendice C di [1]

consentiti, malgrado conservino la carica globale. Per vedere l'equivalenza della (30) con le equazioni di Maxwell (27) consideriamo ad esempio la componente 0 dell'equazione (30), che si scrive*:

$$\partial^i F_{i0} = \partial^i (\partial_i A_0 - \partial_0 A_i) = \partial^i E_i = \frac{\partial E_i}{\partial x_i} = \nabla \mathbf{E} = \rho \quad (31)$$

Le equazioni (27) si scrivono in forma compatta, in termini del potenziale vettore:

$$\square A_\mu - \partial_\nu \partial^\nu A_\mu = j_\nu \quad (32)$$

che è l'equazione di moto per il fotone, analogo dell'equazione di Dirac per i fermioni e di Klein-Gordon per gli scalari. Per risolvere la (32) è conveniente sfruttare una proprietà delle equazioni che descrivono l'elettromagnetismo: l'invarianza di gauge. In effetti, è facile vedere che il potenziale A_μ non è univocamente determinato dai campi \mathbf{B} , \mathbf{E} che descrivono la fisica. In particolare, le trasformazioni:

$$A_0(x) \rightarrow A_0 + \frac{\partial \chi(x)}{\partial t} \quad \mathbf{A}(x) \rightarrow \mathbf{A} - \nabla \chi(x) \quad \Rightarrow \quad A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi \quad (33)$$

dove χ è una generica funzione di x , non cambiano i valori di \mathbf{B} , \mathbf{E} dati in (29), e non cambiano quindi la fisica. La trasformazione (33) è detta trasformazione di gauge sul campo A_μ , e consente di scegliere A_μ in modo tale che $\partial_\mu A^\mu = 0$. Quest'ultima scelta è detta "gauge di Lorentz"; in tale gauge le equazioni di moto sono semplicemente $\square A_\mu = j_\mu$. Un fotone libero cioè nello spazio in assenza di cariche esterne, propaga quindi secondo l'equazione:

$$\boxed{\square A_\mu = 0 \Rightarrow A_\mu(x) = \epsilon_\mu(p) e^{-ipx} \quad ; \quad p^2 = 0} \quad (34)$$

dove ϵ_μ è un quadrivettore indipendente da x , detto vettore di polarizzazione. Un quadrivettore ha 4 gradi di libertà, ma in realtà a causa della invarianza di gauge il fotone ha solo 2 polarizzazioni indipendenti. In effetti se scegliamo la gauge di Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$, questo si traduce per l'onda piana (34) nella condizione $p\epsilon(p) = 0$, riducendo quindi a 3 le polarizzazioni possibili. Possiamo però ancora fare una trasformazione di gauge (detta ristretta) $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi$ purché valga $\square \chi = 0$ senza uscire dalla gauge di Lorentz. Scegliendo $\chi = \exp[-i\alpha p x]$ questo ammonta per le polarizzazioni a $\epsilon \rightarrow \epsilon - i\alpha p$. Posso quindi scegliere α in modo che la componente temporale di ϵ sia zero (basta prendere $i\alpha = \epsilon_0$) e in definitiva la condizione di Lorentz si riduce a $p\epsilon = 0$ e ci sono solo 2 polarizzazioni indipendenti, ortogonali a \mathbf{p} e dette perciò trasverse.

2.4 Soluzioni ad energia negativa; mare di Dirac e interpretazione di Feynman

Ho finora trascurato un problema che affligge le equazioni finora viste e le loro soluzioni. Il primo è l'esistenza di soluzioni ad energia negativa: ad esempio la (17) ammette sia soluzioni con $E = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ che soluzioni con $E = -\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} < 0$. Oltre alla difficoltà di interpretazione delle soluzioni a energia negativa, questo significa che lo spettro in energia non è limitato inferiormente. Non esistendo uno stato di minima energia, sono possibili transizioni verso energie sempre più negative senza alcun limite. Inoltre, la densità di probabilità ρ in (18) non è definita positiva per via dei termini derivativi; per un'onda piana $\phi = \exp(-ipx)$ ad esempio si ha $j_\mu = 2p_\mu$ cioè $\rho = 2E$ che è negativo per le soluzioni a energia negativa. L'equazione di Dirac non è affetta da quest'ultimo problema in quanto $\rho = \psi^\dagger \psi > 0$, e in effetti storicamente Dirac la introdusse proprio per questo motivo. Resta il problema delle soluzioni a energia negativa, che rimangono anche nelle soluzioni di Dirac. Dirac postulò che lo stato di "vuoto", ovvero di minima energia nel quale non ci sono particelle, sia in realtà uno stato nel quale i livelli ad energia negativa sono completamente riempiti, e quelli a energia positivi completamente vuoti. Se adesso aggiungiamo uno stato a energia positiva (elettrone), questo non può decadere negli stati ad energia negativa per via del principio di esclusione di Pauli. Lo stato di vuoto ha energia (e carica) infinita, ma questo non è un problema in quanto in un esperimento fisico si misurano sempre *differenze* di energia, che sono finite. Ad esempio, semplicemente fornendo energia al vuoto possiamo creare una coppia: un elettrone di carica - viene eccitato dal mare di Dirac, lasciando una "buca" (antielettrone) di carica +. L'energia che dobbiamo fornire per un processo di questo tipo è almeno $2m$ dove m è la massa dell'elettrone. L'interpretazione di Dirac è oggi particolarmente utile in fisica dello stato solido e in fisica nucleare, tuttavia non risolve il problema relativo ai bosoni (eq. di Klein-Gordon), per i quali il principio di esclusione non vale.

Feynman propose la reinterpretazione delle soluzioni ad energia negativa come descrittive di particelle che propagano all'indietro nel tempo o, equivalentemente, come antiparticelle che propagano in avanti. Prima di tutto, occorre reinterpretare $j_\mu = -ie(\phi^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi)$ come densità di carica-corrente: ρ diventa una densità di carica, invece che una

*ricordarsi dei segni - nella metrica, per cui $E_i = -\frac{\partial}{\partial x_i} A_0 - \frac{\partial}{\partial t} A_i = +\partial_i A_0 - \partial_0 A_i$

probabilità, e non deve essere necessariamente positiva. Consideriamo adesso un elettrone di energia $E = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ e carica $-e$. La corrente è $j_\mu = -2e(E, \mathbf{p})$. Un positrone con lo stesso p_μ ma carica $+e$ ha $j_\mu = 2e(E, \mathbf{p}) = -2e(-E, -\mathbf{p})$ cioè la corrente di un elettrone con impulso $-\mathbf{p}$. In altre parole, l'emissione di un positrone con energia E è equivalente all'assorbimento di un elettrone di energia $-E$. Ovvero, le particelle di energia negativa che propagano indietro nel tempo vengono reinterpretate come antiparticelle di energia positiva che propagano avanti nel tempo.

Occorre osservare che, aldilà del valore storico delle interpretazioni di Dirac e di Feynman, un approccio moderno è possibile solo attraverso il formalismo della teoria dei campi, che descrive correttamente i processi multiparticelle. In questo formalismo ϕ, ψ, A_μ diventano campi, cioè operatori definiti in ogni punto x dello spazio tempo, e le difficoltà relative alle soluzioni ad energia negativa possono essere evitate.

3 Regola d'oro di Fermi; spazio delle fasi

3.1 La regola di Fermi nel caso non relativistico

Una applicazione diretta della (12) per ottenere quantità fisiche si scontra subito col fatto che le probabilità di transizione si ottengono dal modulo quadro dell'ampiezza, che a sua volta contiene una $\delta(E_f - E_i)$. Che significato dare ad una espressione come $[\delta(E_f - E_i)]^2$? Uso qui un trucco matematico, detto "spegnimento adiabatico del potenziale", che consiste nella sostituzione $V \rightarrow V e^{-\epsilon|t|}$, $\epsilon > 0$. Dal punto di vista fisico, la giustificazione sta nel fatto che il potenziale $V(\mathbf{x})$ responsabile del decadimento non può essere diverso da zero per tempi arbitrariamente lunghi. Il tempo fisico di interazione è qui $T \sim \frac{1}{\epsilon}$. Alla fine dei calcoli si fa di nuovo il limite $\epsilon \rightarrow 0$. Dalla (12) la probabilità di transizione dallo stato iniziale a quello finale è ($\Delta \equiv E_f - E_i$):

$$|\int_{-\infty}^{\infty} \langle f|V|i \rangle e^{-\epsilon|t|} e^{i\Delta t} dt|^2 = |\langle f|V|i \rangle|^2 \left| \frac{i}{\Delta + i\epsilon} - \frac{i}{\Delta - i\epsilon} \right|^2 = |\langle f|V|i \rangle|^2 \left(\frac{2\epsilon}{\Delta^2 + \epsilon^2} \right)^2 \rightarrow 2\pi T \delta(E_f - E_i) |\langle f|V|i \rangle|^2 \quad (35)$$

Notare che come regola mnemonica si passa dalla (12) alla (35) con la sostituzione $\delta^2(E_f - E_i) = \frac{T}{2\pi} \delta(E_f - E_i)$. L'ultimo passaggio necessita di qualche commento. Si è utilizzato:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4}{(x^2 + 1)^2} dx = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{2\epsilon}{\Delta^2 + \epsilon^2} \right)^2 \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} 2\pi \delta(E_f - E_i) \quad (36)$$

Per ottenere dalla (35) il risultato finale bisogna ricordare che la quantità fisicamente rilevante è la probabilità di transizione per unità di tempo; si pensi ad esempio a un decadimento radiativo in cui si misura il "rate", cioè il numero di decadimenti al secondo ad esempio. Dividendo per T si ottiene quindi:

$$d\omega_{fi} = 2\pi \delta(E_f - E_i) |\langle f|V|i \rangle|^2 \quad (\text{probabilità di transizione } i \rightarrow f \text{ per unità di tempo}) \quad (37)$$

Come primo esempio concreto di applicazione consideriamo il decadimento radiativo di un nucleo: il nucleo nello stato iniziale $|i\rangle$ di energia iniziale E_i emette una particella con energia δE decadendo nello stato $|f\rangle$; trascuriamo per ora il rinculo del nucleo. La particella emessa finale è un'onda piana nel continuo $\sim e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}$. Tuttavia, in maniera analoga a quanto fatto per la variabile tempo, consideriamo un volume di interazione finito L^3 , facendo alla fine il limite $L \rightarrow \infty$. Gli impulsi sono allora quantizzati:

$$\mathbf{p}_i^n = \frac{2\pi}{L} n; \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad i = 1, 2, 3 \quad (38)$$

Per ottenere una quantità fisica dalla (37) consideriamo la probabilità che il sistema faccia una transizione a un piccolo gruppo di stati raggruppati intorno a un dato stato $|\bar{\mathbf{p}}\rangle$. Il numero di stati in un piccolo volume $d^3\mathbf{p}$ intorno a $|\bar{\mathbf{p}}\rangle$ (spazio delle fasi) è $d\phi_{\mathbf{p}} = \frac{L^3}{(2\pi)^3} d^3\mathbf{p}$. Si ottiene

$$d\Gamma = d\omega d\phi_{\mathbf{p}} = 2\pi \delta(E_f - E_i) |\langle f|V|i \rangle|^2 \frac{L^3}{(2\pi)^3} d^3\mathbf{p}_f \quad (39)$$

Per scrivere tutto in funzione della variabile energia, usiamo il fatto che per una particella non relativistica $E_f = \frac{|\mathbf{p}_f|^2}{2m}$ per cui $|\mathbf{p}_f| d|\mathbf{p}_f| = m dE_f$ e che $d^3\mathbf{p}_f = |\mathbf{p}_f|^2 d\Omega_f d|\mathbf{p}_f|$. Inoltre, il fattore L^3 che compare nella (39) scompare dall'espressione finale per il fatto che gli stati sono normalizzati a probabilità 1 nel volume L^3 , cioè $f_{\mathbf{p}_f}(\mathbf{x}) = \frac{e^{-i\mathbf{p}_f\mathbf{x}}}{\sqrt{L^3}}$ e quindi $|\langle f|V|i \rangle|^2 \propto \frac{1}{L^3}$. Se rinormalizziamo gli stati finali $f_{\mathbf{p}_f}(\mathbf{x}) \rightarrow e^{-i\mathbf{p}_f\mathbf{x}}$ otteniamo infine:

$$d\Gamma = |\langle f|V|i \rangle|^2 \sqrt{2mE_f} \frac{m}{4\pi^2} d\Omega_f = |\langle f|V|i \rangle|^2 \rho(E_f) \quad (\text{regola d'oro di Fermi}) \quad (40)$$

L'espressione $\rho(E_f)$ è detta densità di stati e dipende dalla *regola di dispersione*, cioè dalla funzione $E_f(|\mathbf{p}_f|)$. Nel caso in questione lo stato finale è una particella libera non relativistica e la densità di stati assume la forma data in (40). Più in generale, nota la regola di dispersione si può trovare la densità di stati seguendo i passi qui descritti; esempi rilevanti di stati finali interagenti si trovano ad esempio in fisica dello stato solido e in fisica nucleare. Il significato fisico è che un numero iniziale N_0 di particelle diventa al tempo t $N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$ dove la vita media è $\tau = \frac{1}{\Gamma}$.

3.2 Caso relativistico; sezioni d'urto e decadimenti

Notiamo preliminarmente che le espressioni (12,37) e successive, ricavate al primo ordine perturbativo, sono valide a tutti gli ordini se invece che arrestarci al primo, continuiamo l'espansione della matrice $S_{fi} \equiv \langle f | \mathcal{U}_I(-\infty, \infty) | i \rangle$ secondo la (11). Ad esempio la (15) diventa:

$$S_{fi} = \delta_{fi} - 2\pi i \delta(E_f - E_i) \mathcal{A}_{fi} \quad (41)$$

avendo definito l'ampiezza $\mathcal{A}_{fi} = \langle f | T | i \rangle$ ottenuta dall'espansione a tutti gli ordini della matrice \mathcal{S} .

Dobbiamo a questo punto dare significato fisico alla (41), in modo da poter calcolare quantità osservabili. Il primo passo è quello di normalizzare correttamente le funzioni d'onda. Considerando per semplicità le particelle scalari, si ha:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{L^3}} e^{-ipx} \rightarrow \rho = i(\phi^* \overleftrightarrow{\partial}_t \phi) = \frac{2E}{L^3} \quad ; \quad N = \int_{L^3} \rho d^3x = 2E \quad (42)$$

Cioè normalizzando la funzione d'onda come nella (42) il numero di particelle N nel volume L^3 risulta essere $2E^*$. Questa normalizzazione è in accordo col fatto che ρ è la componente tempo di un quadrivettore, ed è chiamata perciò normalizzazione covariante. In accordo con questa normalizzazione, dobbiamo cambiare lo spazio delle fasi finali che appare in (39): siccome ci sono $2E$ particelle nel volume, per ogni particella è disponibile una frazione $\frac{1}{2E}$:

$$d\text{Lips} = \Pi_f \frac{L^3}{2E_f (2\pi)^3} d^3p_f \quad (\text{Lips=Lorentz invariant phase space}) \quad (43)$$

Consideriamo ora un esperimento in cui una particella, ad esempio a riposo, decade in due o più particelle nucleari. Esempi di tale tipo sono i decadimenti atomici, quelli nucleari (decadimenti β ecc.), e i decadimenti di fisica delle particelle nei quali si possono creare particelle non presenti inizialmente: $Z \rightarrow e^+ e^-$, $\mu^- \rightarrow \nu_\mu e^- \bar{\nu}_e$ e via dicendo. per ottenere la probabilità di decadimento nell'unità di tempo devo dividere la (37) anche per $2E_i$ per normalizzare tale probabilità ad una particella iniziale. Tenendo conto della (43) otteniamo:

$$d\Gamma = \frac{1}{2E_i} 2\pi \delta(E_f - E_i) |\langle f | \mathcal{A} | i \rangle|^2 \Pi_f \frac{L^3}{2E_f (2\pi)^3} d^3p_f \quad (44)$$

Adesso occorre ricordare che l'ampiezza che appare nella (44) è una *densità* e che la dipendenza spaziale degli stati finali e iniziali, che sono onde piane, è $\sim e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}$. Indicando $P_i = \sum_i p_i$, $P_f = \sum_f p_f$ si ha:

$$\langle f | \mathcal{A} | i \rangle \rightarrow \int d^3x e^{-i\mathbf{P}_i \mathbf{x}} e^{i\mathbf{P}_f \mathbf{x}} \langle f | \mathcal{A} | i \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{P}_f - \mathbf{P}_i) \langle f | \mathcal{A} | i \rangle \quad (45)$$

$$|(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{P}_f - \mathbf{P}_i) \langle f | \mathcal{A} | i \rangle|^2 = (2\pi)^3 L^3 \delta^3(\mathbf{P}_f - \mathbf{P}_i) |\langle f | \mathcal{A} | i \rangle|^2 \quad (46)$$

dove l'ultimo passaggio è effettuato in analogia a quanto visto per la $\delta(E_f - E_i)$. Mettendo insieme le (44,45,46) e dopo aver, di nuovo, fatto il passaggio $\frac{1}{\sqrt{L^3}} e^{-ipx} \rightarrow e^{-ipx}$ si ottiene infine:

$$\boxed{d\Gamma = \frac{1}{2E_i} |\mathcal{A}_{fi}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \Pi_f \frac{d^3p_f}{2E_f (2\pi)^3}} \quad (47)$$

Un'altra tipica situazione sperimentale è quella in cui si osserva la diffusione (scattering) di $n_i = 2$ particelle iniziali in $n_f \geq 2$ particelle finali. L'osservabile in questo caso è la sezione d'urto, definita come numero di particelle diffuse nell'unità di tempo diviso per il flusso iniziale di particelle. Poiché il flusso ha dimensioni $[I] = [L]^{-2} [T]^{-1}$, la sezione d'urto ha dimensioni di un'area (eV^{-2} in unità naturali).

L'espressione per la sezione d'urto $P_i = p_1 + p_2 \rightarrow P_f = \sum_f p_f$ si ottiene in maniera analoga a quella per la larghezza Γ . Mettiamo per comodità in un sistema di riferimento in cui la particella 1 (fascio) va a sbattere contro la particella 2 inizialmente ferma (bersaglio); questo è detto sistema di riferimento del laboratorio. Oltre al fattore $2E_2$

notare la differenza con la MQ nella quale avrei $N = \int_{L^3} \phi^ \phi = 1$

già presente nella Γ , necessario per riferirsi a una singola particella bersaglio, occorre dividere per il flusso ρv_r , dove v_r è la velocità del fascio (particella 1) e $\rho = \frac{2E_1}{L^3}$. Si ottiene:

$$d\sigma = \frac{L^3}{v_r 2E_1 2E_2} (2\pi)^4 L^3 \delta^4(P_f - P_i) |\langle f | A | i \rangle|^2 \Pi_f \frac{L^3}{2E_f (2\pi)^3} d^3 p_f \quad (48)$$

Di nuovo, i fattori di L^3 vengono “mangiati” con la sostituzione $\frac{1}{\sqrt{L^3}} e^{-ipx} \rightarrow e^{-ipx}$. Inoltre, $v_r 2E_1 2E_2 = \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_1} 2E_1 2E_2 = 4|\mathbf{p}_1|E_2$. Infine, possiamo dare una espressione covariante a vista al flusso: $I = 4\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}$. E' facile rendersi conto che, ad esempio nel sistema del lab., questa espressione coincide con quella $I = 4|\mathbf{p}_1|E_2$ data in precedenza. In definitiva la sezione d'urto si scrive:

$$\boxed{d\sigma = \frac{|A_{fi}|^2}{I} d\text{Lips} \quad d\text{Lips} = (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \Pi_f \frac{d^3 p_f}{2E_f (2\pi)^3} \quad I = 4E_1 E_2 = 4\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} \quad (49)$$

Le (47,49) sono le formule di base per ricavare larghezza Γ e sezione d'urto σ . Nei prossimi paragrafi vedremo alcuni esempi di calcolo di ampiezze \mathcal{A}_{fi} in diversi casi fisici.

4 Le interazioni elettromagnetiche: primi esempi

4.1 Particella carica in interazione col campo elettromagnetico

In questo paragrafo analizzeremo le equazioni che descrivono l'interazione elettromagnetica, cercando di dar loro una forma covariante. Il prototipo delle teorie dei campi che descrivono le interazioni fondamentali è la QED (Quantum ElectroDynamics). Ci limiteremo a questo tipo di interazione, che ha il vantaggio di essere sufficientemente semplice avendo allo stesso tempo molte delle caratteristiche fondamentali di teorie più complesse quali quelle che descrivono le interazioni nucleari deboli e quelle forti.

Un elettrone in un campo elettromagnetico è soggetto alla Forza di Lorentz $\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$, dove e è la carica dell'elettrone con segno, e \mathbf{v} la sua velocità. Questa forza si deriva dalla Hamiltoniana:

$$H = \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2m} + eA_0 \quad (50)$$

Difatti le equazioni di Hamilton $\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$, $\dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$ si scrivono*:

$$\begin{cases} \dot{p}_i = (p_j - eA_j)e\partial_i A_j - e\partial_i A_0 \\ \dot{x}_i = \frac{p_i - eA_i}{m} \end{cases} \Rightarrow m \ddot{x}_i = e(-\dot{A}_i + v_j \partial_i A_j - \partial_i A_0) = e(-\partial_t A_i - \partial_i A_0 + v_j \partial_i A_j - v_j \partial_j A_i) \quad (51)$$

Ricordandosi che $E_i = -\partial_i A_0 - \partial_t A_i$, $B_i = \epsilon_{ijk} \partial_j A_k$ e utilizzando $\epsilon_{kij} \epsilon_{kmn} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}$, si ottiene che l'ultima espressione è proprio $e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})_i$.

L'equazione di Schrödinger che si ottiene dalla Hamiltoniana (50) con la usuale sostituzione $p_\mu \rightarrow i\partial_\mu$ cioè $\mathbf{p} \rightarrow -i\nabla$, $H \rightarrow i\partial_t$, si scrive:

$$\frac{(-i\nabla - e\mathbf{A})^2}{2m} \psi + eA_0 \psi = i\partial_t \psi \quad iD_0 \psi = \frac{(i\mathbf{D})^2}{2m} \psi \quad D_\mu \equiv \partial_\mu + ieA_\mu \quad (52)$$

La derivata che appare in (52) è detta *covariante*, per motivi che analizzeremo in seguito. Per il momento è importante osservare che il passaggio dalla equazione che descrive l'elettrone libero a quella dell'elettrone in interazione col campo elettromagnetico si effettua in maniera molto semplice, tramite la sostituzione $\partial_\mu \rightarrow D_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$.

La (52) ammette una simmetria che è di fondamentale importanza nella fisica moderna: la simmetria di gauge, definita dalle trasformazioni:

$$A_\mu(x) \rightarrow A'_\mu(x) = A_\mu(x) + \partial_\mu \chi(x) \quad \psi(x) \rightarrow \psi'(x) = e^{-ie\chi(x)} \psi(x) \quad (53)$$

Infatti la derivata covariante ha una regola di trasformazione molto semplice rispetto alle (53):

$$D_\mu \psi \rightarrow D'_\mu \psi' = (\partial_\mu + ieA_\mu + ie\partial_\mu \chi) e^{-ie\chi} \psi = e^{-ie\chi} D_\mu \psi \quad (54)$$

*ricordarsi che lungo le traiettore $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ per il campo $A_i(t, \mathbf{x}(t))$ si ha $\dot{A}_i = \partial_t A_i + \dot{x}_j \partial_j A_i$

ed è detta per questo covariante*. Una volta notato che si ha anche $\mathbf{D}^2\psi \rightarrow e^{-ie\chi}\mathbf{D}^2\psi$, è semplice mostrare che l'equazione di Schrödinger (52) è covariante rispetto alle trasformazioni di gauge (53), cioè:

$$iD_0\psi = \frac{(i\mathbf{D})^2}{2m}\psi \Rightarrow iD'_0\psi' = \frac{(i\mathbf{D}')^2}{2m}\psi' \quad (55)$$

In maniera analoga, le equazioni relativistiche di Klein-Gordon e di Dirac:

$$(D_\mu D^\mu + m^2)\psi = 0 \quad (i\mathcal{D} - m)\psi = 0 \quad (56)$$

sono covarianti secondo le trasformazioni di gauge, e descrivono particelle di spin 0 e di spin $\frac{1}{2}$ in interazione col campo elettromagnetico. La prescrizione per ottenere le interazioni è data semplicemente dalla sostituzione $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + ieA_\mu$. E' importante osservare che le trasformazioni di gauge (53) dipendono dal punto dello spazio-tempo x (χ dipende da x) e sono perciò dette *locali*.

In teoria di campo si procede spesso in maniera inversa a quanto visto per l'equazione di Schrödinger, cioè si impone la simmetria (di gauge in questo caso) e questa simmetria, a sua volta, determina le interazioni. Ad esempio in questo caso, il richiedere l'invarianza sotto trasformazioni *locali* come quelle di gauge definite dalla (53) impone la forma delle interazioni attraverso la sostituzione $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + ieA_\mu$. Ci sono vari ottiene motivi per questa procedura; ad esempio in teoria dei campi le simmetrie sono sempre collegate alla conservazione di quantità fisiche. La quantità fisica legata alle trasformazioni di gauge è la carica elettrica.

4.2 Ampiezza per lo scattering elettromagnetico di particelle di spin 0

Consideriamo adesso la diffusione di due particelle di spin 0, che chiameremo π e K . Analizzeremo questo processo in due passi:

- calcolare l'interazione del π^+ con un generico potenziale A_μ
- trovare il potenziale A_μ prodotto dal moto del K^+

Notare che potremmo invertire i ruoli di π^+ e K^+ ottenendo gli stessi risultati.

L'equazione di Klein-Gordon che descrive l'interazione del π (descritto da una funzione d'onda ϕ) con un campo elettromagnetico si ottiene, come detto, dalla prescrizione $\partial_\mu \rightarrow D_\mu$:

$$(D_\mu D^\mu + m^2)\phi = 0 \Rightarrow (\square + m^2)\phi = -ie(\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu)\phi + e^2 A^2 \phi \equiv -V\phi \quad (57)$$

Nell'ultimo passaggio abbiamo definito il potenziale di interazione come il termine che è nullo per la particella libera. Il procedimento corretto è in realtà di determinare la Hamiltoniana che produce la (57) e poi separare in parte libera e parte di interazione; il risultato finale è comunque il potenziale definito in (57).

Consideriamo un π iniziale di impulso p_1 e funzione d'onda $\phi_1 = e^{-ip_1x}$, e un π finale con funzione d'onda $\phi_3 = e^{-ip_3x}$. L'ampiezza si scrive:

$$\mathcal{A} = -i \int d^4x \phi_3^* V \phi_1 = e \int d^4x \phi_3^* (\partial_\mu A^\mu + A^\mu \partial_\mu) \phi_1 \quad (58)$$

avendo, nell'ultimo passaggio, trascurato il termine $e^2 A^2$ in (57) che interviene a ordini superiori nella teoria perturbativa. L'espressione (58) si può riscrivere in forma più trasparente facendo una integrazione per parti, assumendo che $|\mathbf{A}| \rightarrow 0$ per $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ e $A_0 \rightarrow 0$ per $t \rightarrow \pm\infty$. In questo modo il termine di superficie scompare e l'ampiezza si riscrive:

$$\mathcal{A} = e \int d^4x (-\partial_\mu \phi_3^*) A^\mu \phi_1 + \phi_3^* A^\mu \partial_\mu \phi_1 = -i \int j_\mu(\pi^+) A^\mu \quad j_\mu(\pi^+) = ie(\phi_3^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi_1) \quad (59)$$

La corrente $j_\mu(\pi^+)$ è quindi la corrente elettromagnetica di transizione per il processo $1 \rightarrow 3$; l'ampiezza di transizione è semplicemente proporzionale a $j_\mu(\pi^+) A^\mu$. Per il caso di onde piane che stiamo considerando si ha:

$$j_\mu(\pi^+) = ie(\phi_3^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi_1) = e(p_1 + p_3)_\mu e^{i(p_3 - p_1)x} \quad (60)$$

Come già accennato, il campo elettromagnetico che compare nella (59) è quello prodotto dal moto del K^+ . La sua espressione può essere trovata in base alla (32), che in gauge di Lorentz $\partial_\mu A^\mu = 0$ si scrive:

$$\square A_\mu = j_\mu(K^+) \quad j_\mu(K^+) = ie(\phi_4^* \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi_2) = e(p_2 + p_4)_\mu e^{i(p_4 - p_2)x} \quad (61)$$

*qui il termine covariante si riferisce alle trasformazioni di gauge (53), non a quelle di Lorentz

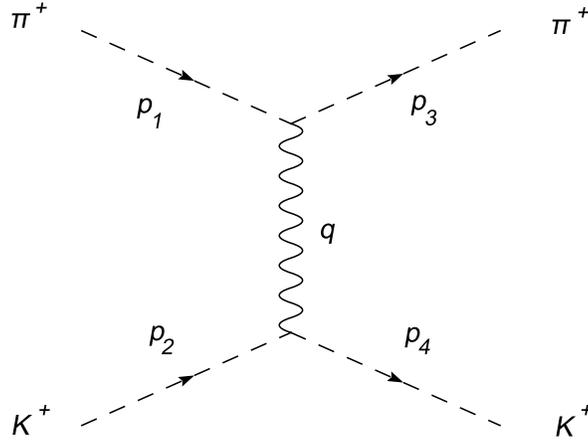


Figura 1: Diagramma di Feynman per lo scattering elettromagnetico di 2 particelle di spin 0, il π^+ e il K^+

La soluzione di quest'equazione è estremamente semplice una volta introdotto il momento trasferito $q = p_4 - p_2 = p_1 - p_3^*$ e se si osserva che $\square e^{iqx} = (-q^2)e^{iqx}$:

$$\square A_\mu = e(p_2 + p_4)_\mu e^{iqx} \Rightarrow A_\mu = -e \frac{(p_2 + p_4)_\mu}{q^2} e^{iqx} \quad (62)$$

Mettendo insieme le (59,62) si ottiene infine:

$$\mathcal{A} = ie^2 \frac{1}{q^2} (p_1 + p_3)_\mu (p_2 + p_4)^\mu \int d^4x e^{i(p_3 - p_1)x} e^{i(p_4 - p_2)x} \quad (63)$$

L'integrale in dx produce la δ di conservazione del momento, per cui

$$\mathcal{A} = (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 - p_2 - p_1) \underbrace{[-ie(p_1 + p_3)_\mu] \frac{-ig^{\mu\nu}}{q^2} [-ie(p_2 + p_4)_\nu]}_{\mathcal{A}_{Feyn}} \quad (64)$$

L'ampiezza \mathcal{A}_{Feyn} è ottenuta per convenzione eliminando la δ di conservazione dell'energia, ed è quella che compare nella espressione (49) per la sezione d'urto.

Un diagramma di Feynman (fig. 1) consente di visualizzare in maniera semplice le regole per calcolare l'ampiezza. In questo caso usiamo due regole:

- A un vertice scalare-scalare fotone viene assegnato un fattore $-iQ(p_1 + p_2)_\mu$ dove Q è la carica della particella e dove p_2 è l'impulso uscente dal vertice mentre p_1 è quello entrante. Gli altri casi si ricavano di conseguenza: ad esempio se ho produzione di coppia particella(p_1)-antiparticella (p_2) devo vedere quest'ultima come particella che entra con impulso $-p_2$ e la regola dà $-iQ(p_1 - p_2)_\mu$
- Al fotone viene assegnato un *propagatore* $-i\frac{g_{\mu\nu}}{q^2}$. Il fotone scambiato (vedi fig. 1) ha impulso $q^2 = (p_1 - p_3)^2 \neq 0$ e differisce in questo da un fotone che propaga nel vuoto, detto fotone reale, che ha $q^2 = 0$. Per questo il fotone scambiato viene detto virtuale.

4.3 Sezione d'urto per lo scattering elettromagnetico di particelle di spin 0

Siamo ora in condizione di scrivere l'espressione finale per la sezione d'urto. Lo spazio delle fasi per uno stato finale di due particelle si scrive:

$$dLips = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{d^3p_3}{2E_3(2\pi)^3} \frac{d^3p_4}{2E_4(2\pi)^3} = \frac{1}{(2\pi)^2} \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) \frac{d^3p_3}{4E_3E_4} \Big|_{\mathbf{p}_4 = \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_2} \quad (65)$$

*ricordarsi che la conservazione del quadrimomento si scrive $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$

dove ho eliminato l'integrale in d^3p_4 tenendo conto del fatto che la δ^3 implica la conservazione del triimpulso. Per valutare questa espressione mettiamoci ora nel sistema del centro di massa, nel quale si ha:

$$p_1 = (E_1, \mathbf{p}) \quad p_2 = (E_2, -\mathbf{p}) \quad p_3 = (E_3, \mathbf{p}') \quad p_4 = (E_4, -\mathbf{p}') \quad p_1^2 = p_3^2 = m_1^2 \quad p_2^2 = p_4^2 = m_2^2 \quad (66)$$

la Quantità $E_1 + E_2$ si indica di solito con \sqrt{s} ed è la massa invariante delle 2 particelle iniziali: $s = (p_1 + p_2)^2$. Nel sistema del centro di massa si ha

$$\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}', E_3 = \sqrt{|\mathbf{p}'|^2 + m_1^2}, E_4 = \sqrt{|\mathbf{p}'|^2 + m_2^2} \quad d^3p' = |\mathbf{p}'|^2 d|\mathbf{p}'| d\Omega$$

Adesso, ricordandosi che $\delta(f(x)) = 1/f'(x_0)\delta(x - x_0)$ con $f(x_0) = 0$ si ottiene:

$$d^3p' \delta(E_3(|\mathbf{p}'|) + E_4(|\mathbf{p}'|) - \sqrt{s}) = |\mathbf{p}'|^2 d|\mathbf{p}'| d\Omega \frac{1}{\frac{|\mathbf{p}'|}{E_3} + \frac{|\mathbf{p}'|}{E_4}} = |\mathbf{p}'| \frac{E_3 E_4}{E_3 + E_4} d\Omega \Big|_{E_3 + E_4 = \sqrt{s}} = |\mathbf{p}'| \frac{E_3 E_4}{\sqrt{s}} d\Omega \quad (67)$$

Infine, la conservazione del triimpulso è tenuta automaticamente in conto nella (66), mentre la conservazione dell'energia dà:

$$\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_1^2} + \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_2^2} = \sqrt{\mathbf{p}'^2 + m_1^2} + \sqrt{\mathbf{p}'^2 + m_2^2} \Rightarrow |\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'| \quad (68)$$

Mettendo insieme le (65,67) si ottiene l'espressione dello spazio delle fasi nel sistema del c.m.:

$$d\text{Lips} = \frac{1}{16\pi^2} \frac{|\mathbf{p}|}{\sqrt{s}} d\Omega \quad \mathbf{p} = \text{triimpulso nel c.m.} \quad \sqrt{s} = \text{energia nel c.m.} \quad (69)$$

e l'espressione per la sezione d'urto dalle (49,64,69) risulta:

$$d\sigma = \frac{1}{I} \frac{1}{16\pi^2} \frac{|\mathbf{p}|}{\sqrt{s}} \left| e^2 \frac{(p_1 + p_3)(p_2 + p_4)}{q^2} \right|^2 d\Omega \quad (70)$$

Proviamo ora a valutare la sezione d'urto nel caso particolare semplificato $m_1 = m_2 = 0$. Si ha:

$$p_1 = E(1, \hat{\mathbf{p}}) \quad p_2 = E(1, -\hat{\mathbf{p}}) \quad p_3 = E(1, \hat{\mathbf{p}}') \quad p_4 = E(1, -\hat{\mathbf{p}}') \quad \sqrt{s} = 2E \quad \hat{\mathbf{p}}\hat{\mathbf{p}}' = \cos \theta$$

da cui si ricavano gli invarianti:

$$p_i^2 = 0, i = 1, 2, 3, 4 \quad p_3 p_4 = p_1 p_2 = \frac{s}{2} \quad p_2 p_4 = p_1 p_3 = \frac{s}{4}(1 - \cos \theta) \quad p_1 p_4 = p_2 p_3 = \frac{s}{4}(1 + \cos \theta) \quad (71)$$

da cui:

$$q^2 = (p_1 - p_3)^2 = -\frac{s}{2}(1 - \cos \theta) \quad (p_1 + p_3)(p_2 + p_4) = 2p_1 p_2 + 2p_2 p_3 = s(1 + \frac{1 + \cos \theta}{2}) \quad (72)$$

Inoltre nel caso in esame $2|\mathbf{p}| = \sqrt{s}$ e $I = 4p_1 p_2 = 2s$ per cui:

$$d\sigma = \frac{e^4}{64\pi^2 s} \left(\frac{3 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} \right)^2 d\Omega \Rightarrow \frac{d\sigma}{\sin \theta d\theta} = \frac{e^4}{32\pi s} \left(\frac{3 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} \right)^2 \quad (73)$$

La sezione d'urto ha le dimensioni giuste ($1/s$ è un'area in unità naturali). Nella (73) abbiamo potuto dare l'ultimo passaggio perché l'ampiezza non dipende dall'angolo azimutale ϕ , il che non è vero in generale. Il significato fisico è che moltiplicando il flusso di particelle iniziali per la sezione d'urto differenziale calcolata per $\theta = \bar{\theta}$ si ottiene il numero di eventi al secondo in un angolo solido definito da $\bar{\theta} < \theta < \bar{\theta} + d\theta, 0 < \phi < 2\pi$. Notare che in questo caso la sezione d'urto totale, cioè integrata su tutti gli angoli, diverge a causa della presenza di $(1 - \cos \theta)^2$ nel denominatore. Questo è tipico per le sezioni d'urto elettromagnetiche; la singolarità per $\theta \rightarrow 0$ è detta singolarità Coulombiana. Questo non è tuttavia un problema dal punto di vista pratico perché il detector ha sempre una zona di "buio" per piccoli angoli laddove è necessario avere una zona sgombra per il passaggio del fascio. Dal punto di vista fisico, angoli di scattering piccoli corrispondono a distanze enormi dal centro di scattering, e le dimensioni del detector sono sempre finite. Supponiamo ad esempio di imporre $\theta > \frac{\pi}{4}$. Si ottiene

$$\sigma = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\pi} \frac{e^4}{32\pi s} \left(\frac{3 + \cos \theta}{1 - \cos \theta} \right)^2 \sin \theta d\theta \approx \frac{e^4}{\pi s} = 16\pi \frac{\alpha^2}{s} \quad (74)$$

La forma della sezione d'urto si poteva in effetti arguire dato il numero di costanti di accoppiamento coinvolte ($\mathcal{A} \sim e^2 \Rightarrow \sigma \propto e^4 \sim \alpha^2$) e dato che la sezione d'urto deve avere dimensioni di $[\sigma] = [E]^{-2}$; avendo posto tutte le masse

a zero, \sqrt{s} resta l'unica scala dimensionata e quindi $\sigma \sim \frac{\alpha^2}{s}$. La costante $\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi}$ è detta costante di struttura fine. Cerchiamo ora di capire quanti eventi ci si possono aspettare in un anno in un acceleratore tipico come LEP (oramai defunto). Il flusso iniziale, detto anche luminosità, è in questo caso $5 \cdot 10^{31} \text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ (!), e l'energia è $\sqrt{s} \approx 100 \text{ GeV}$. Per calcolare la sezione d'urto in unità MKS occorre ricordare che $[\hbar c] = [E][L]$ e quindi per avere una superficie occorre moltiplicare la sezione d'urto per $(\hbar c)^2$. La sezione d'urto risulta quindi:

$$\sigma = \frac{16\pi}{(137)^2} \frac{(0.2 \text{ GeV} \cdot 10^{-13} \text{ cm})^2}{(100 \text{ GeV})^2} \approx 10^{-34} \text{ cm}^2 = 0.1 \text{ nbarn} \quad (1 \text{ barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2) \quad (75)$$

avendo introdotto l'unità di misura $1 \text{ barn} = 10^{-24} \text{ cm}^2$, che è un valore tipico delle sezioni d'urto nucleari. Come si vede, le sezioni d'urto in fisica delle particelle sono molto più piccole, e tipicamente variano dal picobarn al nanobarn. Per ottenere il numero di eventi in un anno, basta moltiplicare la sezione d'urto per il tempo e per la luminosità:

$$N = \underbrace{5 \cdot 10^{31} \text{ cm}^{-2} \text{ s}^{-1}}_{\text{lum.}} \cdot \underbrace{10^{-34} \text{ cm}^2}_{\sigma} \cdot \underbrace{3 \cdot 10^7 \text{ s}}_{1 \text{ anno}} = 15 \cdot 10^4 \quad (76)$$

Ci sono quindi, nel caso in esame, circa centocinquantamila eventi in un anno.

4.4 Scattering Compton sul pione

Lo scattering Compton è la diffusione di un fotone su una particella, scalare o fermione. Consideriamo il processo $\gamma(q_1) + \pi^+(k_1) \rightarrow \gamma(q_2) + \pi^+(k_2)$. Uno dei diagrammi di Feynman è raffigurato in fig. 2. Confrontando con la fig. 1 si vede che in questo caso, diversamente che dal caso dello scattering πK , i fotoni sono stati fisici, detti anche onshell in quanto i loro impulsi soddisfano $q_2^2 = q_1^2 = 0$. Le loro funzioni d'onda sono quindi le polarizzazioni fisiche trasverse $A_\mu(x) = \epsilon_\mu(q_1), \epsilon_\mu(q_2)$. Invece ad essere off-shell questa volta è il pione, in quanto $(p_1 + k_1)^2 \neq m^2$; il pione è quindi qui una particella virtuale alla quale dobbiamo associare un propagatore. Qual'è il propagatore del pione? per il fotone abbiamo visto che il campo A_μ in interazione è descritto dall'equazione 61 $\square A_\mu = j_\mu$ che per un'onda piana $A_\mu, j_\mu \sim e^{iqx}$ ha soluzione $A_\mu \sim 1/q^2 j_\mu$. In analogia al caso del fotone possiamo dire che per il pione $(\square + m^2)\phi = j$ implica $\phi \sim \frac{1}{q^2 + m^2} j$, e quindi il propagatore è proporzionale a $\frac{1}{q^2 + m^2}$. Da un punto di vista matematico più rigoroso, il propagatore è la trasformata di Fourier della funzione di Green dell'equazione d'onda della particella libera:

$$(\square + m^2)D(x) = -\delta^4(x) \Rightarrow D(x) = \int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4} e^{-iqx} D(q) \quad D(p) = \frac{1}{q^2 - m^2} \quad (77)$$

La teoria dei propagatori discussa in modo rigoroso e dettagliato si può trovare nel cap. 6 di [2].

Siamo ora in grado, per analogia con quanto visto per lo scattering πK , di trovare l'ampiezza relativa al diagramma di fig. 2:

- Al vertice di sinistra corrisponde un'ampiezza

$$ie \int d^4 x [\phi^*(\pi^+, p) \overleftrightarrow{\partial}_\mu \phi(\pi^+, k_1)] A^\mu(\gamma; q_1) \sim e(p + k_1)_\mu \epsilon^\mu(q_1)$$

avendo tenuto conto che $A_\mu \sim \epsilon_\mu e^{-iq_1 x}$ e omettendo una delta di conservazione dell'impulso che assicura che $p = q_1 + k_1$

- Analogamente, al vertice di destra corrisponde un'ampiezza $e(p + k_2)_\mu \epsilon^*(q_2)$
- Infine, il propagatore del pione è $\frac{1}{p^2 - m^2}$

Tenendo conto della conservazione del quadriimpulso ai vertici $p = q_1 + k_1 = q_2 + k_2$ si ottiene l'ampiezza invariante:

$$\mathcal{A}^{\text{fig.2}} = e^2 \epsilon(q_1) \cdot (2k_1 + q_1) \frac{1}{(q_1 + k_1)^2 - m^2} \epsilon^*(q_2) \cdot (2k_2 + q_2) = 4e^2 \frac{(\epsilon(q_1) \cdot k_1)(\epsilon^*(q_2) \cdot k_2)}{s - m^2} \quad s \equiv (q_1 + k_1)^2 \quad (78)$$

avendo utilizzato il fatto che per polarizzazioni fisiche $q \cdot \epsilon(q) = 0$ e avendo definito l'energia invariante $s = (q_1 + k_1)^2$ E' bene ricordare a questo punto che per ottenere la (78) abbiamo solo dato qualche argomentazione giustificata basata sul primo termine dello sviluppo perturbativo (15) della matrice S. Il diagramma di fig. 2 corrisponde in realtà al secondo termine dello sviluppo. Per dimostrare che da questo termine si ottiene effettivamente la (78) si può procedere in due modi. Il primo modo, più intuitivo, è quello di sviluppare la teoria dei propagatore in meccanica quantistica relativistica; un'ottimo testo in questo senso è [2]. Alternativamente, e in maniera più formale, si usa un approccio moderno basato sulla teoria dei campi; un'ottimo introduzione si può trovare in [3].

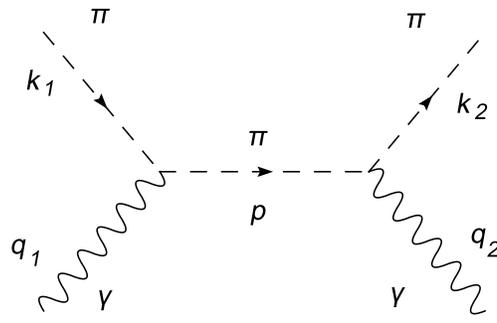


Figura 2: Diagramma di Feynman per lo scattering Compton del π^+

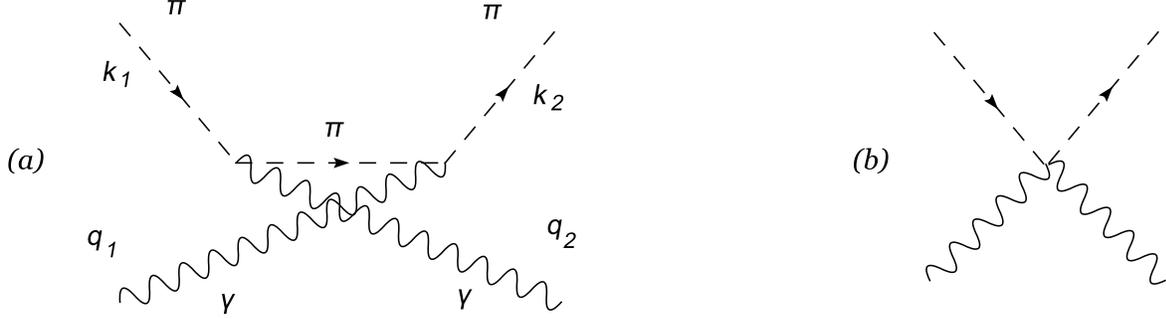


Figura 3: Diagrammi di Feynman per lo scattering Compton del π^+

Procedendo nell'analisi dell'ampiezza, occorre osservare che questa si ottiene sommando *tutti* i diagrammi di Feynman che si ottengono connettendo gli stati iniziali con quelli finali. Quindi alla (78) ottenuta dal diagramma di fig. 2 occorre aggiungere ad esempio il diagramma di fig. 3(a) :

$$\mathcal{A}^{\text{fig.3(a)}} = 4e^2 \frac{(\epsilon(q_1) \cdot k_2)(\epsilon^*(q_2) \cdot k_1)}{u - m^2} \quad u \equiv (k_1 - q_2)^2 \quad (79)$$

Le sezioni d'urto vengono comunemente espresse in funzione delle variabili di Mandelstam s, t, u che sono invarianti di Lorentz; nel caso in esame:

$$s = (k_1 + q_1)^2 \quad t = (k_1 - k_2)^2 \quad u = (k_1 - q_2)^2 \quad s + t + u = k_1^2 + q_1^2 + k_2^2 + q_2^2 = \sum_{\alpha=i,f} m_\alpha^2 \quad (80)$$

dove l'ultimo passaggio si ottiene sfruttando la conservazione dell'energia.

L'ultimo diagramma di Feynman relativo al processo considerato è quello di figura 3(b) che corrisponde al termine $V = -e^2 A_\mu A^\mu$ in (57). Questo termine è di ordine e^2 come i due precedenti e va quindi conteggiato nell'ampiezza. Al digramma di fig 3(b) corrisponde:

$$\mathcal{A}^{\text{fig.3(b)}} = - \int d^4x \phi^*(x, k_2) e^2 A_\mu(x) A^\mu(x) \phi(x, k_1) \quad (81)$$

Sostituendo le funzioni d'onda $\phi(x, k) = e^{-ikx}$, $A^\mu(x) = \epsilon^\mu(q_1) e^{-iq_1x}$, $A_\mu(x) = \epsilon_\mu^*(q_2) e^{iq_2x}$ ottengo l'ampiezza:

$$\mathcal{A}^{\text{fig.3(b)}} = -e^2 (\epsilon(q_1) \cdot \epsilon^*(q_2)) \quad (82)$$

avendo ommesso la solita delta di conservazione dell'energia. Mettendo insieme le (78,79,82) si ottiene:

$$\mathcal{A}^{\pi\gamma \rightarrow \pi\gamma} = e^2 \epsilon_\mu^*(q_2) \epsilon_\nu(q_1) \left\{ \frac{4k_1^\nu k_2^\mu}{s - m^2} + \frac{4k_1^\mu k_2^\nu}{u - m^2} - g^{\mu\nu} \right\} = e^2 \epsilon_\mu^*(q_2) \epsilon_\nu(q_1) \mathcal{A}^{\mu\nu} \quad (83)$$

Come si può fare una verifica su questo risultato? Come più volte detto, una trasformazione di gauge corrisponde a $\epsilon_\mu(q) \rightarrow \epsilon_\mu(q) + q_\mu$; questa trasformazione deve lasciare invariata l'ampiezza, il che significa che la sostituzione $\epsilon^\mu(q_1) \rightarrow q_1^\mu$ deve produrre 0, cioè $\epsilon^{\mu*}(q_2) q_1^\mu \mathcal{A}_{\mu\nu} = 0$ e analogamente $q_2^\mu \epsilon^\nu(q_1) \mathcal{A}_{\mu\nu} = 0$. Le identità di questo tipo, legate alla invarianza di gauge, sono dette identità di Ward. Si ottiene perciò:

$$\epsilon_\mu^*(q_2) q_{1\nu} \left\{ \frac{4k_1^\nu k_2^\mu}{s - m^2} + \frac{4k_1^\mu k_2^\nu}{u - m^2} - g^{\mu\nu} \right\} = \frac{4(q_1 k_1)(k_2 \epsilon_2^*)}{2(k_1 q_1)} + \frac{4(q_1 k_2)(k_1 \epsilon_2^*)}{-2(k_2 q_1)} - (q_1 \epsilon_2^*) = \epsilon_2^* \cdot (2k_2 - 2k_1 - q_1) \quad (84)$$

che è in generale diverso da zero. D'altra parte è facile notare che se il terzo termine della (84) viene moltiplicato per 2, si ottiene $\epsilon_2^* \cdot (2k_2 - 2k_1 - 2q_1) = 2\epsilon_2^* q_2 = 0$. In altre parole l'ampiezza (82) andrebbe moltiplicata per 2; in effetti il risultato finale corretto non è la (83), bensì:

$$\mathcal{A}^{\pi\gamma \rightarrow \pi\gamma} = ie^2 \epsilon_\mu^*(q_2) \epsilon_\nu(q_1) \left\{ \frac{4k_1^\nu k_2^\mu}{s - m^2} + \frac{4k_1^\mu k_2^\nu}{u - m^2} - 2g^{\mu\nu} \right\} = ie^2 \epsilon_\mu^*(q_2) \epsilon_\nu(q_1) \mathcal{A}^{\mu\nu} \quad (85)$$

Il fattore 2 nel termine associato al digramma di fig. (3b) è dovuto al fatto che ognuno dei fattori A in A^2 può essere associato con emissione oppure assorbimento di un fotone. Più precisamente, ci siamo dimenticati nell'integrale (82) del fatto che ci sono soluzioni sia a energia positiva che negativa, cioè $A_\mu(x) = \epsilon_\mu(q)(e^{iqx} + e^{-iqx})$ e quindi l'ampiezza è:

$$- \int d^4x \phi^*(x, k_2) e^2 A_\mu(x) A^\mu(x) \phi(x, k_1) = - \int d^4x e^{ik_2x} \epsilon_\mu(q_1) (e^{iq_1x} + e^{-iq_1x}) \epsilon^\mu(q_2) (e^{iq_2x} + e^{-iq_2x}) e^{-ik_1x} \quad (86)$$

Adesso però ci ritroviamo con 4 termini! In realtà 2 dei 4 termini vanno scartati, per chè corrispondono rispettivamente a una $\delta^4(k_2 + q_1 + q_2 - k_1)$ e ad una $\delta^4(k_2 - q_1 - q_2 - k_1)$ e quindi a processi fisici diversi dal nostro: la $\delta^4(k_2 + q_1 + q_2 - k_1)$ corrisponde a un processo $k_1 \rightarrow q_1 + q_2 + k_2$ in cui uno scalare iniziale va in quello finale irraggiando due fotoni, e la $\delta^4(k_2 - q_1 - q_2 - k_1)$ a un processo $k_1 + q_2 + q_1 \rightarrow k_2$ in cui uno scalare iniziale assorbe 2 fotoni. Rimangono 2 integrali che danno la conservazione dell'energia corretta per lo scattering Compton:

$$- \int d^4x e^{ik_2x} \epsilon_\mu(q_1) e^{iq_1x} \epsilon^\mu(q_2) e^{-iq_2x} e^{-ik_1x} - \int d^4x e^{ik_2x} \epsilon_\mu(q_1) e^{-iq_1x} \epsilon^\mu(q_2) e^{iq_2x} e^{-ik_1x} \quad (87)$$

Da qui il fattore 2. Come si vede, l'invarianza di gauge oltre a servire come modello teorico delle interazioni e ad essere associata a quantità fisiche conservate, è un utile strumento di verifica della correttezza dei calcoli.

Per calcolare la sezione d'urto è utile mettersi nel sistema del laboratorio:

$$k_1 = (m, \mathbf{0}) \quad q_1 = \omega(1, \hat{\mathbf{q}}) \quad k_2 = (E, \mathbf{k}); E^2 - \mathbf{k}^2 = m^2 \quad q_2 = \omega'(1, \hat{\mathbf{q}}') \quad (88)$$

Poichè le polarizzazioni fisiche trasverse hanno solo componenti spaziali e poichè in questo sistema di riferimento $\mathcal{A}_{ij} = 2\delta_{ij}$, l'ampiezza diventa semplicemente $\mathcal{A} = 2ie^2(\epsilon_2^* \epsilon_1)$. Supponiamo di voler calcolare, come è tipico, la sezione d'urto mediata sulle polarizzazioni iniziali (nel caso di un fascio non polarizzato) e sommata su quelle finali (cioè non misuro la polarizzazione finale). Fare la media sulle polarizzazioni iniziali equivale in questo caso a sommare le probabilità, ovvero le sezioni d'urto che sono collegate al modulo quadro dell'ampiezza, e **non** sommare sulle ampiezze. Cioè la somma sulle polarizzazioni, essendo il fascio non polarizzato è una somma incoerente: il fascio ha probabilità 1/2 di avere polarizzazione ϵ_1 e probabilità 1/2 di avere polarizzazione ϵ_2 . Diverso sarebbe il caso di un fascio polarizzato in una qualche direzione, per il quale dovrei ricorrere al formalismo della matrice densità. La media sulle polarizzazioni iniziali dà un fattore 1/2 per i 2 possibili stati iniziali, mentre il modulo quadro dell'ampiezza sommato sulle polarizzazioni è:

$$\frac{|\mathcal{A}^{\pi\gamma}|^2}{4} = e^4 \sum_{\alpha, \beta} |\epsilon^\alpha(\mathbf{k}_1) \cdot \epsilon^\beta(\mathbf{k}_2)|^2 = e^4(1 + \cos^2 \theta) \quad (89)$$

In questa formula gli indici α, β indicano i due possibili stati di polarizzazione trasversa. E' possibile calcolare la (89) mettendosi in un sistema di riferimento sul piano di scattering e calcolando i 4 termini, oppure utilizzando il fatto che $\sum_\alpha \epsilon_i^\alpha(\mathbf{k}) \epsilon_j^\alpha(\mathbf{k}) = \delta_{ij} - \hat{\mathbf{k}}_i \hat{\mathbf{k}}_j$ e quindi:

$$\sum_{\alpha, \beta} |\epsilon^\alpha(\mathbf{k}_1) \cdot \epsilon^\beta(\mathbf{k}_2)|^2 = \sum_{\alpha, \beta} \epsilon_i^\alpha(\mathbf{k}_1) \epsilon_j^\alpha(\mathbf{k}_1) \epsilon_i^\beta(\mathbf{k}_2) \epsilon_j^\beta(\mathbf{k}_2) = (\delta_{ij} - \hat{\mathbf{k}}_{1i} \hat{\mathbf{k}}_{1j})(\delta_{ij} - \hat{\mathbf{k}}_{2i} \hat{\mathbf{k}}_{2j}) = 1 + \cos^2 \theta \quad (90)$$

Occorre adesso scrivere lo spazio delle fasi; l'espressione fin qui usata non è valida in quanto non siamo nel sistema del centro di massa:

$$d\text{Lips} = (2\pi)^4 \delta^4(k_1 + q_1 - q_2 - k_2) \frac{d^3q_2}{(2\pi)^3 2\omega'} \frac{d^3k_2}{(2\pi)^3 2E} = \frac{1}{8\pi} \delta(E + \omega' - m - \omega) \frac{\omega'}{E} d\omega' d\cos\theta \Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}'+\mathbf{p}} \quad (91)$$

Per valutare la delta occorre vedere come dipende E da ω' tenendo conto della conservazione del triimpulso:

$$E = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} = \sqrt{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 + m^2} = \sqrt{(\omega^2 + \omega'^2 - 2\omega\omega' \cos\theta) + m^2} \quad (92)$$

cioè $\frac{\partial E}{\partial \omega'} = \frac{\omega' - \omega \cos\theta}{E}$ da cui:

$$\delta(E + \omega' - m - \omega) d\omega' = \left| 1 + \frac{\partial E}{\partial \omega'} \right|^{-1} = \frac{E}{E + \omega' - \omega \cos\theta} \Rightarrow d\text{Lips} = \frac{1}{8\pi} \frac{\omega'}{E + \omega' - \omega \cos\theta} d\cos\theta \quad (93)$$

La sezione d'urto, una volta tenuto conto del flusso iniziale $4(p_1 k_1) = 4m\omega$, risulta quindi:

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = e^4 \frac{1 + \cos^2\theta}{32\pi\omega m} \frac{\omega'}{E + \omega' - \omega\cos\theta} \quad (94)$$

Così formulata la sezione d'urto non è molto utile: in realtà sia E che ω' dipendono da θ , che in un esperimento è la cosa più facile da misurare. Per trovare $\omega'(\theta)$ usiamo la conservazione del quadriimpulso, nella forma:

$$k_2 = k_1 + q_1 - q_2 \Rightarrow m^2 = m^2 + 2(\omega - \omega')m - 2\omega\omega'(1 - \cos\theta) \Rightarrow \omega' = \frac{m\omega}{m + \omega(1 - \cos\theta)} \quad (95)$$

La conservazione dell'energia dà anche $E + \omega' = m + \omega$ e sostituendo nella (94) si ottiene:

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{e^4}{32\pi} \frac{1 + \cos^2\theta}{[m + \omega(1 - \cos\theta)]^2} \quad (96)$$

5 Interazioni elettromagnetiche dei fermioni

Per capire l'interazione di un elettrone col campo elettromagnetico, riscriviamo l'equazione di Dirac (20) aggiungendo il campo e.m. tramite la sostituzione $\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu + ieA_\mu$. Si ottiene:

$$(i\partial - m - eA)\psi = 0 \Rightarrow i\partial_t\psi = \gamma_0(i\gamma_i\partial_i - m)\psi + \underbrace{e\gamma_0\gamma_\mu A^\mu}_V \psi \quad (97)$$

In questa equazione il primo termine corrisponde alla particella libera; interpretiamo il secondo termine come un termine di potenziale, in analogia a quanto fatto per gli scalari. Al primo ordine perturbativo l'ampiezza è data quindi da:

$$\mathcal{A} = e \int d^4x \psi_f^\dagger \gamma_0 \gamma_\mu A^\mu \psi_i = e \int d^4x j_\mu A^\mu \quad j_\mu = \bar{\psi} \gamma_\mu \psi \quad (98)$$

Ritroviamo quindi nel termine di interazione la corrente conservata j_μ definita in (22). L'interazione elettromagnetica si scrive quindi $j_\mu A^\mu$ sia nel caso degli scalari che dei fermioni, dove j_μ è la corrente conservata relativa alle equazioni di Klein-Gordon e di Dirac rispettivamente.

Infine, il propagatore di un fermione si ottiene direttamente dall'equazione di Dirac $(i\partial - m)\psi = 0$, in analogia con quanto visto per fotone e scalari, ed ha l'espressione:

$$\frac{i}{\not{p} - m} = i \frac{\not{p} + m}{p^2 - m^2} \quad (99)$$

Avendo utilizzato l'identità (**Esercizio:** dimostrarla) $(\not{p} - m)(\not{p} + m) = p^2 - m^2$.

Siamo ora in grado di dare le regole di Feynman complete per la QED, che sono riassunte nelle fig. 5,6,7.

5.1 Diffusione elettrone-pione in QED

Veniamo ora al primo esempio di scattering elettromagnetico in cui sono coinvolti fermioni, analizzando il processo $e^-(k_1)\pi^+(p_1) \rightarrow e^-(k_2)\pi^+(p_2)$. In analogia a quanto visto per lo scattering $\pi - K$, l'ampiezza è data da:

$$\mathcal{A} = -i \int j_\mu(e^-) A^\mu = -i \int j_\mu(e^-) \frac{1}{q^2} j^\mu(\pi^+) \quad (100)$$

dove A_μ è il campo generato dal moto del pione. Inserendo gli stati iniziali di onda piana per fermioni e scalari otteniamo:

$$j_\mu(e^-) = -e\bar{u}(k_2)\gamma_\mu u(k_1)e^{i(k_2-k_1)x} \quad j_\mu(\pi^+) = e(p_1 + p_2)_\mu e^{i(p_2-p_1)x} \quad (101)$$

da cui l'ampiezza:

$$\mathcal{A} = -ie^2 \frac{1}{q^2} \bar{u}(k_2)(\not{p}_1 + \not{p}_2)u(k_1) \int e^{i(k_2-k_1)x} e^{i(p_2-p_1)x} \quad q \equiv k_2 - k_1 \quad (102)$$

Per ottenere la sezione d'urto occorre adesso fare il modulo quadro di questa ampiezza. Come si procede per la parte fermionica? Rimettiamo intanto gli indici omessi:

$$\bar{u}(k_2)\gamma_\mu u(k_1) = \bar{u}_r^\alpha(k_2)\gamma_\mu^{\alpha\beta} u_s^\beta(k_1) \quad (103)$$

Gli indici α, β sono qui indici di Dirac: ricordo che u, \bar{u} sono spinori a 4 componenti soluzioni dell'equazione di Dirac nel vuoto (vedi eq. (24)), mentre le γ_μ sono matrici 4x4. Gli indici α, β variano quindi da 1 a 4 da non confondere

con gli indici di Lorentz $\mu = 0, 1, 2, 3$. Per ogni valore di μ la combinazione (103) è quindi un numero. Gli indici r, s sono invece indici di elicità e assumono valori $r, s = +1, -1$ (vedi ancora la (24)). Date quindi le polarizzazioni iniziali e finali (ogni possibile polarizzazione fisica è combinazione lineare di u_- e u_+), si tratta di scrivere la corrispondente soluzione dell'eq. di Dirac e trovare quindi le 4 componenti della corrente fermionica j_μ definita nella (103); quindi posso scrivere l'ampiezza. Questo procedimento è però laborioso e inutile per la stragrande maggioranza dei processi fisici. Infatti quello che si misura di solito è la sezione d'urto non polarizzata, cioè con un fascio iniziale non polarizzato e senza misurare lo spin finale. La quantità rilevante è quindi:

$$|\mathcal{A}|^2 = \frac{1}{2} \frac{e^4}{q^2} \sum_{r,s} \bar{u}_r(k_2) \gamma_\mu u_s(k_1) (p_1 + p_2)^\mu (\bar{u}_r(k_2) \gamma_\nu u_s(k_1))^* (p_1 + p_2)^\nu \equiv \frac{1}{2} \frac{e^4}{q^4} L^{\mu\nu} T_{\nu\mu} \quad (104)$$

dove il fattore $1/2$ tiene conto dei 2 possibili stati di spin dell'elettrone iniziale e dove L, T sono i tensori della parte elettronica e della parte relativa al pione (la L ricorda che l'elettrone è un leptone, cioè una particella leggera che non ha interazioni forti). Il primo passo è il seguente:

$$(\bar{u}_2 \gamma_\mu u_1)^* = (\bar{u}_2^\dagger \gamma_0 \gamma_\mu u_1)^\dagger = u_1^\dagger \gamma_1^\dagger \gamma_0^\dagger u_2 = \bar{u}_1 \gamma_0 \gamma_\mu^\dagger \gamma_0 u_2 = \bar{u}_1 \gamma_\mu u_2 \quad (105)$$

avendo sfruttato il fatto che per un numero, le operazioni \dagger e $*$ sono equivalenti (è però utile scrivere esplicitamente le componenti). Inoltre $\gamma_0^\dagger = \gamma_0, \gamma_0^2 = 1$ e $\gamma_0 \gamma_\mu^\dagger \gamma_0 = \gamma_\mu$ come si può verificare dalle (2). Resta quindi da valutare:

$$L^{\mu\nu} = \sum_{r,s} \bar{u}_r^\alpha(k_2) \gamma_\mu^{\alpha\beta} u_s^\beta(k_1) \bar{u}_s^\delta(k_1) \gamma_\nu^{\delta\gamma} u_r^\gamma(k_2) \quad (106)$$

A questo punto viene in aiuto la (25) che si scrive $u_s^\beta(k_1) \bar{u}_s^\delta(k_1) = (\not{k}_1 + m)^{\beta\delta}$ per cui:

$$L^{\mu\nu} = \sum_r \bar{u}_r^\alpha(k_2) \gamma_\mu^{\alpha\beta} (\not{k}_1 + m)^{\beta\delta} \gamma_\nu^{\delta\gamma} u_r^\gamma(k_2) = \gamma_\mu^{\alpha\beta} (\not{k}_1 + m)^{\beta\delta} \gamma_\nu^{\delta\gamma} (\not{k}_2 + m)^{\gamma\alpha} = \text{Tr} \{ \gamma_\mu (\not{k}_1 + m) \gamma_\nu (\not{k}_2 + m) \} \quad (107)$$

dove m è la massa dell'elettrone. Per calcolare questa traccia utilizziamo le regole per le tracce delle matrici di Dirac:

$$\text{Tr} \{ \gamma_\mu \gamma_\nu \} = 4g_{\mu\nu} \quad ; \quad \text{Tr} \{ \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \} = 4(g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}) \quad ; \quad \text{Tr} \{ \text{n. dispari di matrici } \gamma \} = 0 \quad (108)$$

Esistono poi altre identità utili che riguardano le contrazioni:

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = 4 \quad \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\mu = -2\gamma^\alpha \quad \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu = 4g^{\alpha\beta} \quad \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta \gamma^\mu = -2\gamma^\delta \gamma^\beta \gamma^\alpha \quad (109)$$

$$\gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta \gamma^\gamma \gamma^\mu = 2(\gamma^\gamma \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta + \gamma^\delta \gamma^\beta \gamma^\alpha \gamma^\gamma) \quad (110)$$

Vediamo ora come ricavare queste regole. $\text{Tr} \{ \gamma_\mu \} = 0$ è ovvio dalla definizione (2) delle matrici γ . Per due matrici abbiamo $\text{Tr} \{ \gamma_\mu \gamma_\nu \} = \text{Tr} \left\{ \frac{[\gamma_\mu, \gamma_\nu]}{2} + \frac{\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\}}{2} \right\} = \frac{1}{2} \text{Tr} \{ 2g_{\mu\nu} \} = 4g_{\mu\nu}$, avendo utilizzato $\{ \gamma_\mu, \gamma_\nu \} = 2g_{\mu\nu} \mathbf{I}$ (\mathbf{I} =matrice identità). Notare che il termine di anticommutatore non contribuisce per via della proprietà di ciclicità della traccia $\text{Tr} \{ \gamma_\mu \gamma_\nu \} = \text{Tr} \{ \gamma_\nu \gamma_\mu \}$. Per la traccia di 3 matrici conviene utilizzare la matrice γ_5 introdotta in (2) e che soddisfa $\gamma_5^2 = 1, \{ \gamma_5, \gamma_\nu \} = 0$ *. Allora

$$\text{Tr} \{ \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \} = \text{Tr} \{ \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_5^2 \} = \text{Tr} \{ \gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_5 \} = -\text{Tr} \{ \gamma_\mu \gamma_5 \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_5 \} = -\text{Tr} \{ \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_5^2 \} = -\text{Tr} \{ \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \} \quad (111)$$

e analogamente per un numero dispari qualunque di matrici γ . Infine, resta da valutare la traccia di 4 matrici γ ; usiamo ripetutamente la regola di anticommutazione $\gamma_\mu \gamma_\nu = -\gamma_\nu \gamma_\mu + 2g_{\mu\nu}$ (evidenzio le coppie per le quali uso questa identità):

$$\begin{aligned} \text{Tr} \{ \widehat{\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma} \} &= -\text{Tr} \{ \gamma_\nu \widehat{\gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\sigma} \} + 2g_{\mu\nu} \text{Tr} \{ \gamma_\rho \gamma_\sigma \} = \text{Tr} \{ \gamma_\nu \gamma_\rho \widehat{\gamma_\mu \gamma_\sigma} \} - 2g_{\rho\mu} \text{Tr} \{ \gamma_\nu \gamma_\sigma \} + 8g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} \\ &= -\text{Tr} \{ \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\mu \} + 8g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} - 8g_{\rho\mu} g_{\sigma\nu} + 8g_{\mu\sigma} g_{\rho\nu} \end{aligned} \quad (112)$$

da cui il risultato che appare in (108). Le contrazioni (109) sono facili da ricavare da $\{ \gamma_\mu, \gamma_\nu \} = 2g_{\mu\nu}$.

Siamo ora in grado di calcolare la traccia relativa al tensore fermionico:

$$\text{Tr} \{ \gamma_\mu (\not{k}_1 + m) \gamma_\nu (\not{k}_2 + m) \} = \text{Tr} \{ \gamma_\mu \not{k}_1 \gamma_\nu \not{k}_2 \} + m^2 \text{Tr} \{ \gamma_\mu \gamma_\nu \} = 4[k_1^\mu k_2^\nu + k_1^\nu k_2^\mu - g^{\mu\nu} (k_1 k_2)] + 4m^2 g^{\mu\nu} \quad (113)$$

Un'ulteriore semplificazione deriva dal fatto che $q^2 = (k_2 - k_1)^2 = 2m^2 - 2k_1 k_2$ per cui:

$$L^{\mu\nu} = 4[k_1^\mu k_2^\nu + k_1^\nu k_2^\mu + g^{\mu\nu} \frac{q^2}{2}] \quad (114)$$

*la matrice γ_5 è di fondamentale importanza nella descrizione delle interazioni deboli

A questo punto possiamo valutare l'ampiezza modulo quadro utilizzando la (104):

$$|\mathcal{A}|^2 = \frac{1}{2} \frac{e^4}{q^4} L^{\mu\nu} T_{\nu\mu} = \frac{e^4}{q^4} (p_1 + p_2)_\mu (p_1 + p_2)_\nu 2[k_1^\mu k_2^\nu + k_1^\nu k_2^\mu + g^{\mu\nu} \frac{q^2}{2}] \quad (115)$$

Una identità utile per valutare questa quantità è $q^\mu L_{\mu\nu} = L_{\mu\nu} q^\nu = 0$. Questa, che si può verificare direttamente dalle definizioni, non è altro che un'identità di Ward simile a quella incontrata per lo scattering Compton, ed esprime la conservazione della corrente elettromagnetica. In effetti è facile verificare che $q_\mu j^\mu = (k_1 - k_2)^\mu \bar{u}(k_2) \gamma_\mu u(k_1) = 0$ dal momento che $u(k_1), u(k_2)$ soddisfano l'equazione di Dirac, e analogamente per $L_{\mu\nu}$ che si ricava dalla corrente. Si ha quindi:

$$(p_1 + p_2)_\mu (p_1 + p_2)_\nu L^{\mu\nu} = (q + 2p_1)_\mu (q + 2p_1)_\nu L^{\mu\nu} = 4p_1^\mu p_1^\nu 2[k_1^\mu k_2^\nu + k_1^\nu k_2^\mu + g^{\mu\nu} \frac{q^2}{2}] = 8[2(p_1 k_1)(p_1 k_2) + M^2 \frac{q^2}{2}] \quad (116)$$

dove $M^2 = p_1^2 = p_2^2$ è la massa del pione.

Calcoliamo ora la sezione d'urto nel sistema in cui il pione è inizialmente a riposo, e trascuriamo la massa dell'elettrone ($m = 0$). La cinematica è quindi identica a quella dello scattering Compton:

$$p_1 = (M, \mathbf{0}) \quad k_1 = \omega(1, \hat{\mathbf{q}}) \quad p_2 = (E, \mathbf{k}); E^2 - \mathbf{k}^2 = M^2 \quad k_2 = \omega'(1, \hat{\mathbf{q}}') \quad (117)$$

e quindi ($q^2 = -2k_1 k_2 = -2\omega\omega'(1 - \cos\theta) = -4\omega\omega' \sin^2 \frac{\theta}{2}$):

$$|\mathcal{A}|^2 = \frac{e^4}{q^4} (p_1 + p_2)_\mu (p_1 + p_2)_\nu L^{\mu\nu} = \frac{(4\pi\alpha)^2}{(2\omega\omega'(1 - \cos\theta))^2} M^2 \omega\omega'(1 + \cos\theta) = \frac{M^2 \pi^2 \alpha^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{\omega\omega' \sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (118)$$

da cui la semplice espressione per la sezione d'urto:

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} (e^- \pi^+ \rightarrow e^- \pi^+) = \frac{\alpha^2}{8\pi\omega^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{M}{M + 2\omega \sin^2 \frac{\theta}{2}} \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (119)$$

Notare la presenza della solita singolarità Coulombiana $d\sigma \sim \frac{1}{\theta^4}$.

5.2 Sezione d'urto elettrone-muone

Utilizzando le regole di Feynman il calcolo dell'ampiezza per il processo $e^-(k_1; s_1) \mu^-(p_1, r_1) \rightarrow e^-(k_2; s_2) \mu^-(p_2, r_2)$ dove k, p indicano gli impulsi e r, s gli spin (elicità) è piuttosto semplice:

$$\mathcal{A}_{s_1 r_1}^{s_2 r_2} = e^2 \bar{u}_{s_2}(k_2) \gamma_\mu u_{s_1}(k_1) \frac{g^{\mu\nu}}{q^2} \bar{u}_{r_2}(p_2) \gamma_\nu u_{r_1}(p_1) \quad (120)$$

Consideriamo la sezione d'urto unpolarised, cioè mediata sugli spin iniziali e sommata su quelli finali:

$$\sum_{r_1, r_2, s_1, s_2} \frac{|\mathcal{A}_{s_1 r_1}^{s_2 r_2}|^2}{4} = \left(\frac{e^2}{q^2}\right)^2 \frac{\text{Tr}\{(k_2 + m)\gamma_\mu(k_1 + m)\gamma_\nu\}}{2} \frac{\text{Tr}\{(\not{p}_2 + M)\gamma^\mu(\not{p}_1 + M)\gamma_\nu\}}{2} \equiv \left(\frac{e^2}{q^2}\right)^2 L_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \quad (121)$$

con $m(M)$ massa dell'elettrone (muone). Utilizzando il risultato (114) si ha:

$$L^{\mu\nu} = 4[k_1^\mu k_2^\nu + k_1^\nu k_2^\mu + g^{\mu\nu} \frac{q^2}{2}] \quad M^{\mu\nu} = 4[p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu + g^{\mu\nu} \frac{q^2}{2}] \quad (122)$$

A questo punto la conservazione della corrente implica $q_\mu L^{\mu\nu} = L^{\mu\nu} q_\nu = 0$ e sostituendo in $M_{\mu\nu}$ $p_2 = p_1 + q$ abbiamo

$$L_{\mu\nu} M^{\mu\nu} = L_{\mu\nu} [4p_1^\mu p_1^\nu + q^2 g^{\mu\nu}] \quad (123)$$

Il primo termine nella parentesi quadra corrisponde esattamente alla sezione d'urto $e^- \pi^+$ (vedi (116)); il secondo termine è nuovo ed è dovuto al fatto che il muone, diversamente dal pione, ha spin 1/2. Il calcolo per la sezione d'urto nel limite di massa nulla dell'elettrone (valido per situazioni relativistiche in cui le energie in gioco sono grandi rispetto a tale massa) risulta:

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} (e^- \mu^- \rightarrow e^- \mu^-) = \left(\frac{d\sigma}{d\cos\theta} (e^- \pi^+ \rightarrow e^- \pi^+) \right) \left(1 - \frac{q^2 \tan^2 \frac{\theta}{2}}{2M^2} \right) \quad (124)$$

valida nel sistema di riferimento del laboratorio, definito dalle (117). Questa sezione d'urto è la somma di un termine identico alla sezione d'urto su pione, e di un termine (proporzionale a $\tan^2 \frac{\theta}{2}$) che tiene conto dello spin del muone. La (124) sarà importante nella definizione del modello a partoni del protone.

6 Sezione d'urto elettrone-protone

6.1 Fattori di forma

Consideriamo lo scattering da un potenziale esterno in meccanica quantistica. L'ampiezza è in questo caso, considerando stati finali e iniziali di onda piana:

$$-2\pi i \delta(E_f - E_i) \langle f | V(\mathbf{x}) | i \rangle = -2\pi i \delta(E_f - E_i) \int d^3x V(\mathbf{x}) e^{i(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f) \cdot \mathbf{x}} = -2\pi i \delta(E_f - E_i) \tilde{V}(\mathbf{q}) \quad \mathbf{q} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i \quad (125)$$

e la sezione d'urto risulta $d\sigma = \text{cost.} |\tilde{V}(\mathbf{q})|^2$, dove la cost. tiene conto di flusso iniziale, spazio delle fasi ecc. Nel caso di scattering elettromagnetico da una carica puntiforme, il potenziale soddisfa $\nabla^2 V = \delta^3(\mathbf{x})$ e in trasformata di Fourier $\tilde{V}(\mathbf{q}) = \frac{1}{\mathbf{q}^2}$ da cui la sezione d'urto $d\sigma = \text{cost.} |\frac{1}{\mathbf{q}^2}|^2$. Se invece lo scattering avviene da una carica distribuita con densità $\rho(\mathbf{x})$, il potenziale soddisfa $\nabla^2 V = \rho(\mathbf{x})$ e quindi $d\sigma = \text{cost.} |\frac{\tilde{\rho}(\mathbf{q})}{\mathbf{q}^2}|^2$. In definitiva, indicando con $d\sigma_{\text{punt}}$ la sezione d'urto senza struttura, cioè puntiforme, nel caso di carica distribuita si ha:

$$d\sigma_\rho = d\sigma_{\text{punt}} |\tilde{\rho}(\mathbf{q})|^2 \quad (126)$$

La funzione $\rho(\mathbf{q})$ è detta fattore di forma, relativa in questo caso al potenziale, proprio perchè è legata alla forma del bersaglio: in questo caso, la distribuzione di carica. Un esperimento di scattering può essere quindi una utilissima sonda per capire come è fatto il bersaglio. Il primo esempio fu probabilmente il famoso esperimento di Rutherford: mandando particelle alpha su atomi, alcune di queste tornano indietro a angoli di deflessione elevati, cosa spiegabile solo con un nocciolo molto piccolo di carica +. Dal punto di vista matematico, la (126) fa capire che se la carica è distribuita in maniera molto uniforme, la $\tilde{\rho}(\mathbf{q})$ è quasi una delta, cioè è significativamente diversa da zero solo a piccoli valori del momento trasferito \mathbf{q} , quindi lo scattering avviene quasi tutto in avanti. Se invece la carica è concentrata nell'origine, la $\tilde{\rho}(\mathbf{q})$ è diversa da zero anche a valori elevati di $|\tilde{\rho}(\mathbf{q})|$, che corrispondono a grandi valori dell'angolo di deflessione (backscattering). Quantitativamente, un dato valore di $|\mathbf{q}|$ sonda un valore di $|\mathbf{x}|$ ad esso legato dal principio di indeterminazione di Heisenberg: $|\mathbf{q}||\mathbf{x}| \sim 1$. Notare infine che se normalizziamo la carica a 1, $\int d^3x \rho(\mathbf{x}) = 1$, questo comporta $\tilde{\rho}(0) = 1$.

Che cosa possiamo dire a proposito dello scattering $\pi^+ e^-$ analizzato in precedenza? Se possiamo pensare all'elettrone come puntiforme, altrettanto non si può certamente dire per il pione. Il π^+ è composto da un quark up (u) e da un antiquark down (\bar{d}), ma non possiamo di certo pensare questi due quark come cariche libere e puntiformi. In effetti, oltre all'interazione elettromagnetica, che possiamo pensare trascurabile, i quarks si scambiano gluoni, che mediano le interazioni forti. Queste ultime però, alla scala di massa tipica del pione di circa 200 MeV, sono fortemente non perturbative e non possono essere trattate con la teoria delle perturbazioni. In effetti, la descrizione del pione in termini dei quarks che lo costituiscono e delle interazioni fra loro (in analogia a come si descrive ad esempio un atomo come nucleo+elettroni) è un problema tuttora aperto*. Che cosa possiamo fare dunque? Ritorniamo alla forma della corrente utilizzata nel caso di pioni puntiformi $j_\mu(x) = (p_1 + p_2)_\mu e^{i(p_2 - p_1)x} = j_\mu(0) e^{iqx}$. Al solito la dipendenza da x si combina con altri fattori per dare la delta di conservazione dell'impulso, per cui concentriamoci sulla $j_\mu(0)$. Qual'è la sua forma più generale? Dobbiamo scrivere un oggetto che si trasforma come un quadrivettore e abbiamo a disposizione pochiquadrivettori: p_1, p_2, q legati dalla conservazione dell'energia $p_2 - p_1 = q$ quindi solo 2 oggetti indipendenti. Quindi $j^\mu(0) = A p_1^\mu + B p_2^\mu$. A, B non sono necessariamente costanti: possono dipendere dagli invarianti che riesco a costruire, che sono $p_1^2 = p_2^2 = M^2$. Tutti gli altri invarianti sono funzioni di questi, ad esempio $p_1 p_2 = M^2 - \frac{q^2}{2}$ e così via. Inoltre M^2 è proprio una costante: interessa qui solo la dipendenza dalle variabili cinematiche come q^2 per cui la forma più generale è $j^\mu(0) = A(q^2) p_1^\mu + B(q^2) p_2^\mu$. Possiamo ancora dire qualcosa, grazie all'invarianza di gauge che ci assicura che la corrente è conservata $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$ Che si traduce in $q_\mu j^\mu(0) = 0$:

$$j^\mu(0) = A(q^2) p_1^\mu + B(q^2) p_2^\mu \quad (p_2 - p_1)_\mu j^\mu(0) = (p_1 p_2 - M^2)(A - B) = 0 \Rightarrow A = B \quad (127)$$

La forma più generale della corrente è quindi $j^\mu(0) = F(q^2)(p_1^\mu + p_2^\mu)$. A questo punto è facile seguire gli stessi passaggi che hanno permesso di ricavare la sezione d'urto per pioni puntiforme ottenendo:

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta}(e^- \pi^+ \rightarrow e^- \pi^+) = \frac{d\sigma}{d\cos\theta}(e^- \pi^+ \rightarrow e^- \pi^+) \Big|_{\text{punt}} |F(q^2)|^2 \quad (128)$$

La carica elettrica è definita come la carica misurata quando q^2 tende a zero, per cui deve essere $F(0) = 1$. Questa condizione è analoga a quella vista in precedenza per la normalizzazione della carica nel caso di scattering da potenziale.

*esistono alcune tecniche non perturbative come lagrangiane chirali, QCD su reticolo ma manca una descrizione completa

Infine, è chiaro come gli esperimenti di scattering di questo tipo (con $q^2 < 0$, cioè “spacelike”) o esperimenti di annichilazione $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ (con $q^2 > 4M^2$, cioè “timelike”) possono misurare $F(q^2)$ e quindi sono una sonda sulla struttura del pione. Spiegare questa struttura è, come già accennato, una sfida difficile per qualsiasi teoria.

Consideriamo adesso la corrente associata ad un fermione. per l’elettrone, considerato puntiforme, abbiamo visto che la corrente si scrive $j_\mu(e^-) = \bar{u}(k_2)\gamma_\mu u(k_1)$. Cosa possiamo dire per un oggetto puntiforme come ad esempio il protone? Dobbiamo costruire in questo caso, in analogia a quanto fatto per il pione, l’oggetto più generale della forma $\bar{U}(k_2)\Gamma_\mu u(k_1)$. La matrice γ_μ è una generica matrice 4x4, quindi è necessario scrivere una base nello spazio delle matrici 4x4. E’ possibile dimostrare che le 16 matrici della tabella 2 sono effettivamente una base ortonormale (vedi [3]), per cui è possibile scrivere ogni bilineare nella forma $\bar{u}_2 M u_1 = \sum_\alpha c_\alpha \bar{u}_2 \Gamma_\alpha u_1$. In tabella sono riportate anche le proprietà sotto parità del bilineare. Ad esempio, $\bar{u}_2 \gamma_\mu u_1 \xrightarrow{P} g_{\mu\mu} \bar{u}_2 \gamma_\mu u_1$ significa che la componente temporale rimane invariata ($g_{00} = 1$) e quelle spaziali cambiano segno ($g_{ii} = -1$); questo è il comportamento sotto parità di un vettore. Così il campo elettromagnetico A_μ è un vettore, e così pure, ovviamente, la corrente scalare $j_S^\mu = (p_1 + p_2)^\mu$. Anche la corrente fermionica $j_F^\mu = \bar{u}(k_2)\gamma_\mu u(k_1)$ è un vettore, di modo che l’interazione elettromagnetica $j_\mu A^\mu$ sotto parità va in se stessa in quanto le componenti spaziali A_i, j_i cambiano entrambe segno (formalmente $j_\mu A^\mu \xrightarrow{P} g_{\mu\mu} g^{\mu\mu} j_\mu A^\mu = j_\mu A^\mu$). Si dice che la QED (quantum electrodynamics) è invariante sotto parità.

Ritornando alla forma più generale della corrente di un protone, abbiamo a disposizione come nel caso del π i vettori k_1, k_2 e l’invariante $q^2 = (k_2 - k_1)^2$. In più, possiamo scrivere un bilineare utilizzando tutte le matrici della tabella 2. Alcuni termini sono però esclusi, e lo sono in particolare tutti quelli che contengono γ_5 . Ad esempio, se scrivo $j_5^\mu = \bar{u}(k_2)\gamma_\mu\gamma_5 u(k_1)$, l’accoppiamento col campo elettromagnetico $j_5^\mu A_\mu$ non è invariante sotto parità in quanto j_5^μ è un pseudovettore, cioè le componenti spaziali *non* cambiano segno sotto parità. D’altra parte l’invarianza sotto parità è ben verificata sperimentalmente per la QED. In definitiva, la forma più generale per la corrente del protone, utilizzando $q = k_2 - k_1$ e $P = k_2 + k_1$ al posto di k_1 e k_2 è

$$J_\mu = \bar{U}(k_2)\Gamma_\mu U(k_1) = \bar{U}(k_2) \{Aq^\mu + BP^\mu + C\gamma^\mu + Di\sigma^{\mu\nu}q_\nu + Ei\sigma^{\mu\nu}P_\nu\} U(k_1) \quad (129)$$

con A, B, \dots, E funzioni di q^2 . Una prima semplificazione di questa espressione si ottiene utilizzando le identità di Gordon, che nel caso in esame si scrivono:

$$\bar{U}(k_2) \{i\sigma_{\mu\nu}q^\nu - 2M\gamma_\mu + P_\mu\} U(k_1) = 0 \quad ; \quad \bar{U}(k_2) \{i\sigma_{\mu\nu}P^\nu + q_\mu\} U(k_1) = 0 \quad (130)$$

Esercizio Utilizzando l’equazione di Dirac $kU(k) = MU(k)$, dimostrare le identità di Gordon (130)

Posso quindi eliminare 2 dei 5 fattori di forma nella (129); per convenzione si usa la forma:

$$\bar{U}(k_2)\Gamma_\mu U(k_1) = \bar{U}(k_2) \{Aq^\mu + B\gamma^\mu + Ci\sigma^{\mu\nu}q_\nu\} U(k_1) \quad (131)$$

Infine, la conservazione della corrente $q_\mu J^\mu = 0$ implica $q^2 A = 0$ (**Esercizio**: dimostrare questo passaggio!) cioè $A = 0$ da cui l’espressione finale:

$$J_\mu = \bar{U}(k_2) \{F_1(q^2)\gamma_\mu + F_2(q^2)i\sigma^{\mu\nu}q_\nu\} U(k_1) \quad (132)$$

Nel prossimo paragrafo cerchiamo di capire qual’è il significato fisico di questa espressione.

6.2 Limite non relativistico della corrente: il momento magnetico dell’elettrone

Per dare un significato fisico alla (132) consideriamo dapprima un la elettrone in campo magnetico. Nel limite nonrelativistico, il sistema viene descritto dall’hamiltoniana (50). Consideriamo il caso di un campo esterno A_μ indipendente dal tempo e mettiamo in gauge di Lorentz, $\partial_\mu A^\mu = \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ per cui $[\mathbf{A}, \mathbf{p}] = 0$ e la (50) si scrive:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V \quad ; \quad V = e \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}}{m} + eA_0 \quad (+ \frac{e^2}{2m} \mathbf{A}^2) \quad (133)$$

In realtà però noi sappiamo che l’elettrone relativistico è correttamente descritto dall’equazione di Dirac, e, dal punto di vista perturbativo, da un’interazione di tipo $j_\mu A^\mu$. Il significato fisico di questa espressione è però poco chiaro. Per dare una interpretazione fisica proviamo a considerare un esperimento di scattering di un elettrone da potenziale al primo ordine della teoria delle perturbazioni. Da un lato, possiamo fare un trattamento nonrelativistico tramite il potenziale definito in (133) (escludendo il termine $e^2 \mathbf{A}^2$ che è di ordine superiore in e). Dall’altro, possiamo confrontare quanto ottenuto con l’espressione relativistica ottenuta dall’ampiezza $\mathcal{A} \sim A_\mu j^\mu$; per far questo occorre fare una espansione anche nel parametro $\frac{q}{m}$ che dice quanto la cinematica si discosta dal limite nonrelativistico.

Per fare il limite nonrelativistico della corrente, e quindi delle soluzioni dell'equazione di Dirac, conviene utilizzare piuttosto che la rappresentazione (2) una rappresentazione in cui il ruolo di γ_0 e γ_5 sono scambiati:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (134)$$

Le soluzioni dell'equazione di Dirac $(\not{p} - m)u = 0$ in questa rappresentazione sono (**Esercizio**: dimostrarlo):

$$u = \begin{pmatrix} \alpha \\ \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{p_0 + m} \alpha \end{pmatrix} \quad (135)$$

Questa rappresentazione è quindi migliore nel limite nonrelativistico $\frac{v}{c} = \frac{|\mathbf{p}|}{p_0} \rightarrow 0$ in quanto sono separate le componenti "piccole di ordine $\frac{v}{c}$ " (in basso nella (135)) e quelle "grandi" di ordine 1 (in basso nella (135)). Nella rappresentazione (2) invece, le componenti sono dello stesso ordine nel limite nonrelativistico (vedi la 24). Dalla (135) si ottiene $u^\dagger u = \frac{2p_0}{p_0 + m} \approx 1$ nel limite nonrelativistico; analogamente $\bar{u}u = 1$.

Consideriamo ora un esperimento di scattering da potenziale esterno di un elettrone, con impulso iniziale p_1 e finale p_2 , definendo $q = p_2 - p_1$. Lo scattering in teoria delle perturbazioni nonrelativistica viene descritto da un'ampiezza:

$$\mathcal{A} = -2\pi\delta(E_2 - E_1)i \int \langle f|V|i \rangle = -2\pi\delta(E_2 - E_1)i \int V(\mathbf{x})e^{i(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \cdot \mathbf{x}} = -2\pi i \delta(q_0) \tilde{V}(\mathbf{q}) \quad (136)$$

dove ho indicato con la tilde la trasformata di Fourier. Nella teoria delle perturbazioni relativistica invece, l'ampiezza è:

$$\mathcal{A} = \int A_\mu(\mathbf{x})j^\mu(x) = \int A_\mu(\mathbf{x})e^{iqx}j^\mu(0) = -2\pi i \delta(q_0) \tilde{A}^\mu(\mathbf{q})j_\mu(0) \quad (137)$$

Per mettere a confronto queste due espressioni occorre fare il limite nonrelativistico della corrente elettronica $j_\mu(0) = \bar{u}(p_2)\gamma_\mu u(p_1)$; conviene utilizzare l'identità di Gordon (130) ($q = p_2 - p_1, P = p_2 + p_1$):

$$e\bar{u}(p_2)\gamma_\mu u(p_1) = \frac{e}{2m}\bar{u}(p_2) \{i\sigma_{\mu\nu}q^\nu + P_\mu\} u(p_1) \quad (138)$$

Il termine in P_μ è il più semplice da interpretare, essendo identico a quello di una particella scalare:

$$e\bar{u}(p_2)\frac{(p_1 + p_2)^\mu}{2m}u(p_1) \approx e\frac{p_1^\mu}{m}\bar{u}(p_1)u(p_1) = e\frac{p_1^\mu}{m} = (e, e\frac{\mathbf{p}}{m}) \quad (139)$$

avendo tenuto solo il termine di ordine 0 in q , cioè avendo posto $p_1 = p_2$. Utilizzando questa espressione, l'ampiezza diventa:

$$\mathcal{A} = -2\pi i \delta(q_0) \tilde{A}^\mu(\mathbf{q})j_\mu(0) = -2\pi i \delta(q_0) (e\tilde{A}_0 + e\frac{\mathbf{p} \cdot \tilde{\mathbf{A}}}{m}) \quad (140)$$

ed è facile identificare in questa espressione il potenziale definito in (133). In particolare, il termine in A_0 è l'interazione Coulombiana di una particella di carica e . Abbiamo quindi imparato che nel limite $q = 0$ si ottiene semplicemente l'interazione nonrelativistica di una particella carica in campo elettromagnetico.

Il secondo termine nella (138) identifica, come vedremo, lo spin dell'elettrone, e scompare nel limite $q \rightarrow 0$. Lo spin è quindi un effetto relativistico, che scompare nel limite nonrelativistico. Per valutare questo termine, iniziamo col dire che siccome A_μ non dipende dal tempo, comunque q_0 è zero (vedi la (137)). Quindi $\sigma_{\mu\nu}q^\nu = \sigma_{\mu j}q^j$. Utilizzando le (134) si ottiene:

$$i\sigma_{0j} = -\frac{[\gamma_0, \gamma_j]}{2} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}, \quad i\sigma_{ij} = -\frac{[\gamma_i, \gamma_j]}{2} = \begin{pmatrix} -i\epsilon_{ijk}\sigma_k & 0 \\ 0 & -i\epsilon_{ijk}\sigma_k \end{pmatrix} \quad (141)$$

Siccome $\sigma_{\mu\nu}q^\nu$ contiene già una potenza di q , possiamo valutare $\bar{u}(k_2)\sigma_{\mu\nu}u(k_1)$ nel limite $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = 0, E_1 = E_2 = m$. In questo limite contribuiscono solo le componenti "grandi" di u , cioè quelle in alto nella (135), e quindi σ_{0j} in particolare non contribuisce. si ottiene:

$$\frac{e}{2m}\bar{u}(p_2) \{i\sigma_{\mu\nu}q^\nu\} u(p_1)\tilde{A}^\mu \approx \frac{e}{2m}\alpha^\dagger (-i\epsilon_{ijk}\sigma_k q_j) \alpha \tilde{A}^i = \alpha^\dagger \left(\frac{e}{2m} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B} \right) \alpha \quad (142)$$

dove ho tenuto conto del fatto che, siccome $B_k = \epsilon_{kji}\partial_j A_i$, in trasformata di Fourier $\tilde{B}_k = i\epsilon_{kji}q_j \tilde{A}^i$. Il termine (142) può essere descritto come un'interazione fra il campo magnetico \mathbf{B} e il momento magnetico dell'elettrone $\boldsymbol{\mu}$:

$$V(x) = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} \quad ; \quad \boldsymbol{\mu} = \frac{e}{m} \mathbf{S} \equiv g \frac{e}{2m} \mathbf{S} \quad (143)$$

Il coefficiente g viene chiamato fattore di Landé, e vale 2 per l'elettrone. Per la fisica classica, per un insieme di cariche con un momento angolare \mathbf{L} e rapporto fra carica e massa pari a $\frac{e}{m}$ il fattore di Landé vale $g = 1$. Così se descrivo l'elettrone come una distribuzione di cariche arbitrarie in rotazione, anche per l'elettrone dovrebbe valere $g=1$. Invece il valore quantistico predetto dall'equazione di Dirac è, come abbiamo visto, $g = 2$.

Siamo ora in grado di dare una interpretazione fisica della corrente del protone (132), che assume e grazie alla identità di Gordon la forma:

$$J_\mu = e\bar{U}(p_2) \left\{ F_1(q^2) \frac{p_1^\mu + p_2^\mu}{2M} + (F_1(q^2) + 2MF_2(q^2)) \frac{i\sigma^{\mu\nu} q_\nu}{2M} \right\} U(k_1) \quad (144)$$

Il primo termine è, come visto, quello di una particella di carica $eF_1(0)$. Siccome sperimentalmente le cariche di elettrone e protone sono uguali, deve essere $F_1(0) = 1$. Il secondo termine corrisponde a una particella di momento magnetico $\frac{e}{2M}(F_1(0) + 2MF_2(0)) \equiv \frac{e}{2M}(1 + k)$. $k = 2MF_2(0)$ è detto momento magnetico anomalo, perchè indica di quanto si scosta il valore del momento magnetico da quello predetto dall'equazione di Dirac per un fermione carico puntiforme, che corrisponde a $k = 0$. In tab. 1 sono indicati i valori sperimentali di k per l'elettrone, il protone e il neutrone. E' evidente l'incongruenza con quanto finora detto: se l'elettrone è effettivamente puntiforme e la sua corrente è $j_\mu = \bar{u}\gamma_\mu u$, perchè il suo momento magnetico è anomalo, cioè si discosta dal valore $g = 2$ predetto dall'equazione di Dirac? Il motivo è che l'elettrone è puntiforme per modo di dire; le correzioni radiative inducono un fattore di forma, cioè una dipendenza da q^2 : un esempio è il diagramma di fig. (4).

6.3 Scattering elastico elettrone-protone

Abbiamo adesso in mano tutti gli elementi per calcolare la sezione d'urto elastica $e^-p^+ \rightarrow e^-p^+$ in QED. Tale scattering è detto elastico perchè l'identità delle particelle iniziali (e^-, p) è la stessa di quelle finali. Se il protone fosse puntiforme, otterremmo lo stesso risultato che nello scattering elettrone-muone analizzato nel par.5.2, e cioè la sezione d'urto (124). Se possiamo considerare l'elettrone puntiforme, in quanto le correzioni ad una corrente del tipo $j_\mu \sim \gamma_\mu$ sono di ordine 10^{-3} (vedi tab. 1), la corrente del protone data in (132) contiene due fattori di forma di cui bisogna tener conto. Il calcolo della sezione d'urto elettrone-protone procede sulle stesse linee di quello della sezione d'urto elettrone-muone, fatta eccezione per la forma diversa della corrente protonica. Per convenzione si riparametrizza la corrente del protone (132) nella forma:

$$J_\mu = \bar{U}(p_2) \left\{ F_1(q^2)\gamma_\mu + \frac{kF_2(q^2)}{2M}i\sigma^{\mu\nu}q_\nu \right\} U(p_1) \quad (145)$$

dove k è il momento magnetico anomalo del protone, di modo che F_1 e F_2 hanno le stesse dimensioni e $F_2(0) = 1$. Calcolando il tensore adronico da questa corrente e dopo un procedimento piuttosto laborioso, si ottiene:

$$|\mathcal{A}|^2 = L_{\mu\nu}M^{\mu\nu} \quad M^{\mu\nu} = \frac{W_2(q^2)}{M^2}[p^\mu - \frac{pq}{q^2}q^\mu][p^\nu - \frac{pq}{q^2}q^\nu] + W_1(q^2)(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}) \quad (146)$$

dove $L_{\mu\nu}$ è l'usuale tensore fermionico (122) e dove $W_2 = F_1^2 - \frac{k^2q^2}{4M^2}F_2$, $W_1 = -\frac{q^2}{2M^2}(F_1 + kF_2)^2$. Procedendo nel calcolo della sezione d'urto seguendo i passi finora visti, si ottiene nel sistema del laboratorio:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{lab}^{e^+p\ el} = \frac{\alpha^2}{4E^2} \frac{E'}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} W_2(q^2) + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} W_1(q^2) \right) \quad (147)$$

dove $E(E')$ è l'energia dell'elettrone prima (dopo) dello scattering. Il primo termine in questa espressione è identico alla sezione d'urto elettrone - pione (119) per cui si intuisce che W_2 è in qualche modo legato al contributo della distribuzione di carica del protone alla sezione d'urto. W_1 invece, che è zero nel caso di scattering elettrone-pione, è legato allo spin del protone e quindi alla distribuzione del momento magnetico. A causa del rinculo del protone però questa identificazione non è immediata (tale identificazione è semplice nel caso di scattering da potenziale fisso come abbiamo visto sopra). E' possibile fare una identificazione precisa di distribuzione di momento magnetico e carica solo in un sistema di riferimento preciso, quello di Breit; vedere [3] cap. 8. Nel caso $W_1 = W_2 = 1$, cioè in assenza di fattori di forma, si riottiene la sezione d'urto (puntiforme) elettrone muone (124).

6.4 Scattering inelastico elettrone-protone

Lo scattering elastico è possibile solo se l'energia dell'elettrone, o meglio il suo q^2 , sono relativamente bassi, fino a circa 150 MeV. Aldilà di tale energia si apre la soglia di produzione di un pione, e il processo diventa $ep \rightarrow e\Delta^+ \rightarrow ep\pi^0$.

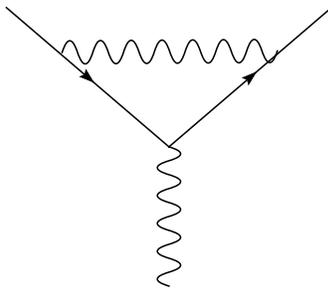


Figura 4: Correzione di vertice per l'elettrone

e^-	$1.15965...10^{-3}$
p^+	$1.7928...$
n^0	$-1.913....$

Tabella 1: Valori del momento magnetico anomalo $k = 2MF_2(0)$ da [4]

Γ_α	numero	parità
1	1	1
γ_5	1	-1
γ_μ	4	$g^{\mu\mu}$
$\gamma_\mu\gamma_5$	4	$-g^{\mu\mu}$
$\sigma_{\mu\nu} \equiv i\frac{[\gamma_\mu, \gamma_\nu]}{2}$	6	$g_{\mu\mu}g_{\nu\nu}$

Tabella 2: Base di matrici 4x4. Sono indicati anche il numero di matrici indipendenti e le proprietà sotto trasformazione di parità



Figura 5: Regole di Feynman per stati iniziali e finali fermionici. La freccia fermionica segue il flusso della carica della particella (e non l'impulso!); ad esempio carica - per l'elettrone. La macchia nera indica il diagramma di Feynman.

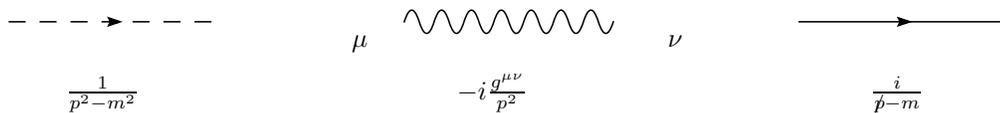


Figura 6: Regole di Feynman per i propagatori scalare, del fotone, fermionico

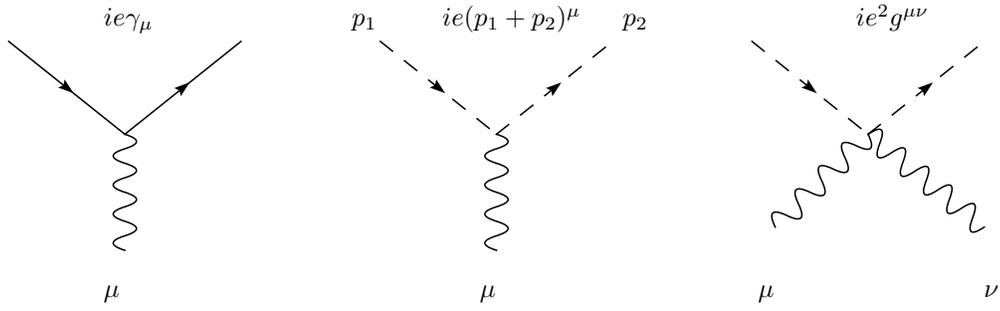


Figura 7: Regole di Feynman per i vertici

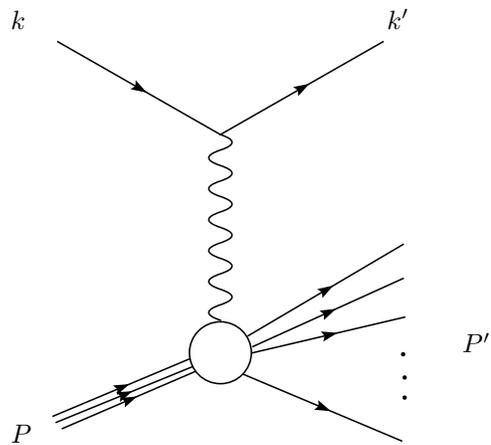


Figura 8: Scattering profondamente anelastico (DIS=Deep Inelastic Scattering)

Questo processo è inelastico per via della presenza del pione nello stato finale. Ad energie ancora maggiori, dell'ordine del GeV e superiori, il protone si spezza perdendo la sua identità e vengono generati nuovi adroni di tutti i tipi *. La cosa più semplice da misurare sperimentalmente diventa la sezione d'urto *inclusiva*, cioè $e^-(k)+p(P) \rightarrow e^-(k')+X(P')$ in cui non ci si preoccupa di cosa sia X e si osserva solo l'elettrone finale. La massa invariante, $W \equiv P'^2$, dello stato adronico finale è in questo caso una variabile e non è più fissata ad essere la massa del protone quadro come nel caso dello scattering elastico. Questo significa che q^2 non è più la sola variabile cinematica indipendente. Infatti nel caso elastico la conservazione dell'impulso $P+k=P'+k'$ e le condizioni di mass shell $P^2=P'^2=M^2, k^2=k'^2=0$ (l'elettrone è senza massa ad alta energia) implicano che $2qP=q^2$, e ogni altro invariante che si può formare con k, k', P, P' è funzione di q^2 (**Esercizio:** dimostrarlo). Ad esempio, con la cinematica dello scattering Compton nel sistema del laboratorio, si ha(**Esercizio:** dimostrarlo):

$$\omega' = \frac{m\omega}{m+\omega(1-\cos\theta)} \quad q^2 = -4\frac{m\omega^2}{m+\omega(1-\cos\theta)} \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (148)$$

il che significa che l'angolo di scattering θ determina tutto quanto. Questo non è vero nel DIS (Deep Inelastic Scattering, scattering profondamente inelastico) in quanto la massa invariante adronica $W = P'^2$ è una variabile e quindi ho due variabili cinematiche invece che una sola. Questo significa che la sezione d'urto sarà doppio differenziale, cioè una distribuzione in due variabili, mettiamo q^2 e W , oppure θ e ω' , dove θ è l'angolo di scattering dell'elettrone finale e ω' la sua energia. L'espressione per la sezione d'urto è analoga a quella per lo scattering elettrone-muone; la differenza è che non sappiamo dare una espressione precisa per il tensore adronico $W_{\mu\nu}$:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\omega'} = \left(\frac{4\pi\alpha}{q^2}\right)^2 \frac{1}{k \cdot P} 4\pi M L_{\mu\nu} W^{\mu\nu} \frac{d^3k'}{2\omega'(2\pi)^3} \quad (149)$$

Sappiamo dare un'espressione precisa per il tensore leptonic $L_{\mu\nu}$:

$$L_{\mu\nu} = \sum_{r,s} j_\mu j_\nu^* = \sum_{r,s} \bar{u}_r(k') \gamma_\mu u_s(k) \bar{u}_s(k) \gamma_\nu u_r(k') = \text{Tr}\{(k' + m)\gamma_\mu(k + m)\gamma_\nu\} = 2[k'_\mu k_\nu + k'_\nu k_\mu + \frac{q^2}{2}g_{\mu\nu}] \quad (150)$$

Del tensore adronico invece sappiamo solo che è una somma sui contributi degli stati finali adronici; tenendo conto dello spazio delle fasi si ha:

$$W^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi M} \delta^4(P+q-P') \sum_x d\text{Lips}_X \langle P|J^\mu(0)|X\rangle \langle X|J^\nu(0)|P\rangle \quad (151)$$

L'invarianza di Lorentz e la parità impongono che il tensore adronico abbia la forma:

$$W^{\mu\nu} = -W_1 g^{\mu\nu} + \frac{W_2}{M^2} P^\mu P^\nu + \frac{W_4}{M^2} q^\mu q^\nu + \frac{W_5}{M^2} (P^\mu q^\nu + q^\mu P^\nu) \quad (152)$$

La conservazione della corrente $q_\mu W^{\mu\nu} = W^{\mu\nu} q_\nu = 0$ impone le relazioni (**Esercizio:** dimostrarlo):

$$W_5 = -\frac{Pq}{q^2} W_2 \quad W_4 = \left(\frac{Pq}{q^4}\right)^2 W_2 + \frac{M^2}{q^2} W_1 \quad (153)$$

per cui la forma è simile a quella dello scattering elastico (146):

$$W^{\mu\nu} = \frac{W_2(q^2, \nu)}{M^2} \left[P^\mu - \frac{Pq}{q^2} q^\mu \right] \left[P^\nu - \frac{Pq}{q^2} q^\nu \right] + W_1(q^2, \nu) \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \quad (154)$$

In questo caso però i fattori di forma W_1, W_2 dipendono da due variabili cinematiche e non da una sola. Oltre a q^2 , qui si è scelto la variabile $\nu \equiv \frac{Pq}{M}$, che è legata a $W = P'^2$ dalla conservazione dell'energia: $P+q=P' \Rightarrow 2Pq=W^2-M^2-q^2$; nel caso di scattering elastico, $2Pq=-q^2$. Nel sistema del laboratorio in cui il protone è inizialmente fermo, $\nu = \omega - \omega'$ è l'energia persa dall'elettrone.

In definitiva, dalle formule precedenti si ottiene l'espressione per la sezione d'urto profondamente anelastica nel sistema del laboratorio:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\omega'} = \frac{\alpha^2}{4\omega^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(W_2(q^2, \nu) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1(q^2, \nu) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (155)$$

*Esistono moltissimi adroni noti, oltre a pioni e nucleoni che sono i più noti; una lista esaustiva si può trovare in [4]

Poichè si sono scelte le variabili q^2, ν per i fattori di forma, è conveniente passare a queste variabili anche per la sezione d'urto, cioè scrivere $\frac{d^2\sigma}{d\nu dQ^2}$ al posto di $\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\omega}$. Inoltre convenzionalmente si usa $Q^2 \equiv -q^2 = 2\omega\omega'(1 - \cos\theta) > 0$ al posto di q^2 . Si ha:

$$\nu = \omega - \omega' \quad Q^2 = 2\omega\omega'(1 - \cos\theta) \quad \Rightarrow \quad dQ^2 d\nu = 2\omega\omega' d\cos\theta d\omega' = \frac{\omega\omega'}{\pi} d\Omega d\omega' \quad (156)$$

per cui:

$$\frac{d^2\sigma}{dQ^2 d\nu} = \frac{\pi\alpha^2}{4\omega^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{\omega\omega'} \left(W_2(Q^2, \nu) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1(Q^2, \nu) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (157)$$

E' istruttivo confrontare questa espressione con quella per scattering elettrone-protone con protone puntiforme (che è identica a quella elettrone-muone) e con quella elettrone-protone elastica cioè con fattore di forma. Le tre sezioni d'urto si possono scrivere nella stessa forma:

$$\frac{d^2\sigma}{dQ^2 d\nu} = \frac{\pi\alpha^2}{4\omega^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{\omega\omega'} \{ \} \quad (158)$$

dove

$$\{ \}_{e\mu \rightarrow e\mu} = \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{Q^2}{2m_\mu^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2m_\mu}\right) \quad (159)$$

$$\{ \}_{ep \rightarrow ep} = \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} W_2(Q^2) + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} W_1(Q^2) \right) \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M}\right) \quad (160)$$

$$\{ \}_{ep \rightarrow eX} = \left(W_2(Q^2, \nu) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1(Q^2, \nu) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (161)$$

Le δ presenti nei primi due casi fissano la variabile ν al valore determinato dalla conservazione dell'energia $P + q = P' \Rightarrow 2Pq + q^2 = 0 \Rightarrow \nu = \frac{Pq}{M} = -\frac{q^2}{2M} = \frac{Q^2}{2M}$ e fanno diventare la sezione d'urto un differenziale singolo.

Che cosa ci si aspetta se, andando a valori di Q^2 si scopre che il protone è composto da oggetti puntiformi quasi liberi? In base alle espressioni qui sopra, ci si aspetta che i fattori di forma non dipendano più da *due* variabili indipendenti (ν, Q^2), bensì da *una* sola variabile. Daremo un significato preciso a questa affermazione nel prossimo paragrafo.

6.5 Il modello a partoni

Supponiamo che, a valori di $Q^2 \gg (1\text{GeV})^2$ il protone sia costituito da oggetti puntiformi (quasi) liberi, che chiamiamo partoni. Allora lo scattering inelastico può essere visto come una somma di scattering elastici di oggetti puntiformi, la cui sezione d'urto è data dalla (159). Consideriamo per ora un partone solo, di carica frazionaria e_i e con impulso $p \approx xP$, e quindi massa $m_i \approx \sqrt{(xP)^2} = xM$. Confrontando la (159) con la (161) si ottengono per il partone le funzioni di struttura:

$$W_1^i = e_i^2 \frac{Q^2}{4M^2 x^2} \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2Mx}\right) \quad W_2^i = e_i^2 \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2Mx}\right) \quad (162)$$

Nel modello a partoni il partone ha probabilità $f_i(x)$ di avere frazione di impulso x . Le distribuzioni f_i non sono determinate dal modello, ma vanno ricavate dall'esperimento. Per trovare la funzione di struttura del protone occorre sommare su tutti i partoni i , e integrare la funzione distribuzione, per cui:

$$W_2(\nu, Q^2) = \sum_i \int_0^1 dx f_i(x) e_i^2 \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2Mx}\right) = \sum_i \int_0^1 dx \frac{x}{\nu} f_i(x) e_i^2 \delta\left(x - \frac{Q^2}{2M\nu}\right) = \frac{1}{\nu} \sum_i e_i^2 x_B f_i(x_B) \quad x_B = \frac{Q^2}{2M\nu} \quad (163)$$

e analogamente:

$$W_1(\nu, Q^2) = \frac{1}{M} \sum_i f(x_B) \quad (164)$$

La variabile $x_B = \frac{Q^2}{2Pq}$ è detta variabile di Bjorken, e nel modello a partoni la conservazione dell'impulso fissa la frazione di impulso x ad essere uguale a x_B . Il fatto che le funzioni di struttura dipendano dalla variabile *adimensionale* x_B è detta proprietà di *scaling* e significa che tali funzioni non variano se scalo contemporaneamente di un fattore β le variabili dimensionate $Q^2, 2Pq$. Lo *scaling* significa in generale che una certa variabile scala con le sue dimensioni di massa, cioè se ha dimensioni $[M]^\alpha$ scala come β^α . Ci aspettiamo quindi che la sezione d'urto, avendo dimensioni

$[M]^{-2}$, scali come β^{-2} ; vediamo se è vero. La sezione d'urto, utilizzando le funzioni di struttura del modello a partoni, si scrive:

$$d^2\sigma = \frac{\pi\alpha^2 dQ^2 d\nu}{4\omega^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{\omega\omega'} \sum_i \left\{ \cos^2 \frac{\theta}{2} \frac{1}{\nu} e_i^2 x_B f_i(x_B) + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \frac{1}{M} f_i(x_B) \right\} \quad (165)$$

Un cambiamento di scala significa $P \rightarrow \beta P, k \rightarrow \beta k, k' \rightarrow \beta k'$ lasciando fissa la massa fisica M . Per capire come scalano i vari termini in (165) occorre esprimerli in termini di P, k, k' :

$$\omega = \frac{Pk}{M} \rightarrow \beta^2 \omega \quad \omega' = \frac{Pk'}{M} \rightarrow \beta^2 \omega' \quad \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{q^2 M^2}{(Pk)(Pk')} \rightarrow \beta^{-2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad \nu = \frac{Pq}{M} \rightarrow \beta^2 \nu \quad (166)$$

E' facile vedere a questo punto che $d^2\sigma \rightarrow \beta^{-2} d^2\sigma$. Analogamente, per rescaling $\nu W_2(Q^2, \nu) \equiv F_2$ e $MW_1(Q^2, \nu) \equiv F_q$ sono invarianti.

Lo scaling è sperimentalmente ben verificato a parte piccole correzioni che sono però ben calcolabili nell'ambito della cromodinamica quantistica (QCD) che è la teoria fondamentale delle interazioni forti.

6.6 Il modello a partoni e i quarks

Che cosa sono i partoni che compongono il protone? E' naturale identificarli in prima approssimazione con i quarks, cioè con quegli oggetti che compongono gli adroni secondo un ben definito schema: il modello a quarks (vedi apposita sezione in [3]). In questo modello gli adroni sono costituiti essenzialmente da 3 quarks: u,d,s con definiti numeri quantici di spin, carica, numero barionico e con proprietà definite secondo un'altra simmetria, la simmetria SU(3) di isospin forte. Così ad esempio per un protone, la (163) si scrive:

$$F_2^p(x) = x \left\{ \frac{4}{9} [u^p(x) + \bar{u}^p(x)] + \frac{1}{9} [d^p(x) + \bar{d}^p(x) + s^p(x) + \bar{s}^p(x)] \right\} \quad (167)$$

La vera forza dell'aver introdotto le distribuzioni dei quarks sta nel fatto che queste sono universali, cioè appaiono anche in altri tipi di esperimenti come lo scattering neutrino-protone, il processo di Drell-Yan (vedi più avanti) ecc. Si possono quindi confrontare processi diversi, ad esempio misurando le distribuzioni in un processo e utilizzandole per fare predizioni in un altro. Inoltre la simmetria di isospin del modello a quark collega le distribuzioni nel neutrone con quelle nel protone:

$$u^p(x) = d^n(x) \equiv u(x) \quad d^p(x) = u^n(x) \equiv d(x) \quad (168)$$

Le distribuzioni dei quarks soddisfano varie *regole di somma*:

- Stranezza del protone =0:

$$\int_0^1 dx [s(x) - \bar{s}(x)] = 0 \quad (169)$$

- Carica totale del protone =1, del neutrone =0

$$\int_0^1 dx \left\{ \frac{2}{3} [u - \bar{u}] - \frac{1}{3} [d - \bar{d}] \right\} = 1 \quad \int_0^1 dx \left\{ \frac{2}{3} [d - \bar{d}] - \frac{1}{3} [u - \bar{u}] \right\} = 0 \quad (170)$$

- Conservazione del momento totale:

$$\int_0^1 dx x [u + \bar{u} + d + \bar{d} + s + \bar{s}] = 1 \quad (171)$$

Quest'ultima regola di somma è pesantemente violata: i quarks portano solo circa la metà del momento del protone, il resto è portato da oggetti neutri. Questo induce a pensare che per il resto il protone sia formato dai gluoni, particelle neutre di spin 1 mediatrici delle interazioni forti.

Per finire, esistono modelli che tentano di dire qualcosa sulle distribuzioni dei quarks. uno dei più noti introduce l'idea di partoni "di valenza" e "del mare". Per esempio nel protone(s sta per "sea"):

$$u = u_v + q_s \quad d = d_v + q_s \quad \bar{u} = \bar{d} = s = \bar{s} = q_s \quad (172)$$

Il numero di distribuzioni indipendenti diventa 3, dalle 6 iniziali, e il modello guadagna quindi in predittività.

A Appendice

A.1 Spinori di Weyl con polarizzazione assegnata

Equazioni che definiscono gli spinori con elicità definita:

$$\hat{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad \bar{\sigma} \hat{\mathbf{p}} \alpha = \alpha \quad \Rightarrow \quad \alpha = \cos \frac{\theta}{2} |+\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} |-\rangle \quad \text{con} \quad |+\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad |-\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (173)$$

avendo utilizzato $\sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos \theta}{2}}$, $\cos \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{\sqrt{2(1-\cos \theta)}}$. Notare che le antiparticelle sono coniugate per cui $\bar{\alpha} = \cos \frac{\theta}{2} |\bar{+}\rangle + \sin \frac{\theta}{2} e^{-i\phi} |\bar{-}\rangle$. Chiamando $\alpha(\hat{\mathbf{p}}) = \alpha_+$, $\alpha(-\hat{\mathbf{p}}) = \alpha_-$, ottengo anche:

$$\alpha_+ = \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} \\ \sin \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad \alpha_- = \begin{pmatrix} -\sin \frac{\theta}{2} \\ \cos \frac{\theta}{2} e^{i\phi} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \alpha_+ \alpha_+^\dagger = \begin{pmatrix} \frac{1+\cos \theta}{2} & \frac{\sin \theta}{2} e^{-i\phi} \\ \frac{\sin \theta}{2} e^{i\phi} & \frac{1-\cos \theta}{2} \end{pmatrix} = \frac{1 + \boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{p}}}{2} \quad (174)$$

Analogamente $\alpha_- \alpha_-^\dagger = \frac{1 - \boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{p}}}{2}$ e inoltre:

$$\alpha_+ \alpha_-^\dagger = \begin{pmatrix} -\frac{\sin \theta}{2} & \frac{1+\cos \theta}{2} e^{-i\phi} \\ -\frac{1-\cos \theta}{2} e^{i\phi} & \frac{\sin \theta}{2} \end{pmatrix} \quad \alpha_- \alpha_+^\dagger = \begin{pmatrix} -\frac{\sin \theta}{2} & -\frac{1-\cos \theta}{2} e^{-i\phi} \\ \frac{1+\cos \theta}{2} e^{i\phi} & \frac{\sin \theta}{2} \end{pmatrix} \quad (175)$$

Riferimenti bibliografici

- [1] I.G.R. Aitchison and A.J.G. Grey, "Gauge theories in particle physics"
- [2] J.D. Bjorken and S.D. Drell, "Relativistic Quantum Mechanics", McGraw-Hill
- [3] F. Mandl and G. Shaw, "Quantum Field Theory", John Wiley & Sons
- [4] K. Hagiwara et al., Phys. Rev. D**66**, 010001 (2002) homepage <http://pdg.lbl.gov/>