

# Le Interazioni Forti

Prof. Paolo Ciafaloni

A.A. 2009 - 2010

# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Richiami introduttivi</b>	<b>3</b>
2.1	Notazioni . . . . .	3
2.2	Trasformazioni di Lorentz . . . . .	5
2.3	Teoria dei campi classica . . . . .	6
2.4	Equazioni del moto per scalare, fermione, vettore . . . . .	7
<b>3</b>	<b>Formalismo della teoria dei campi quantistica</b>	<b>9</b>
3.1	Quantizzazione dei campi . . . . .	9
3.2	Teoria delle perturbazioni dipendente dal tempo . . . . .	10
<b>4</b>	<b>Regola d'oro di Fermi; spazio delle fasi</b>	<b>13</b>
4.1	La regola di Fermi nel caso non relativistico . . . . .	13
4.2	Caso relativistico; sezioni d'urto e decadimenti . . . . .	14
<b>5</b>	<b>Lagrangiana di QCD</b>	<b>15</b>
<b>6</b>	<b>Sezione d'urto per diffusione elastica <math>ut \rightarrow ut</math></b>	<b>17</b>
<b>7</b>	<b>RGE</b>	<b>19</b>
<b>8</b>	<b>Divergenze IR: cancellazioni, risommazioni</b>	<b>20</b>
<b>9</b>	<b>Correzioni reali</b>	<b>20</b>
<b>10</b>	<b>Correzioni virtuali</b>	<b>21</b>
<b>11</b>	<b>Sezione d'urto elettrone-protone</b>	<b>21</b>
11.1	Fattori di forma . . . . .	21
11.2	Limite non relativistico della corrente: il momento magnetico dell'elettrone . . . . .	23
11.3	Scattering elastico elettrone-protone . . . . .	25
11.4	Scattering inelastico elettrone-protone . . . . .	26
11.5	Il modello a partoni . . . . .	29
11.6	Il modello a partoni e i quarks . . . . .	30
<b>12</b>	<b>Deep Inelastic Scattering</b>	<b>32</b>
12.1	Cinematica . . . . .	32
12.2	Scattering elastico . . . . .	33
12.3	Scattering elastico con fattore di forma . . . . .	33
12.4	Parton model: scaling nella teoria asintoticamente libera . . . . .	33
12.5	Altarelli-Parisi 1: fattorizzazione collineare . . . . .	33
12.6	Altarelli-Parisi 2: equazioni di evoluzione . . . . .	36
<b>13</b>	<b>Altarelli Parisi 3: struttura di colore e mixing gluone-quark</b>	<b>37</b>

## 1 Introduzione

La gerarchia fra le interazioni dipende dalla situazione fisica, e in particolare dipende dall'energia tipica del processo considerato. Ad una scala di energia  $E=10$  GeV ad esempio, le intensità tipiche delle 4 interazioni fondamentali sono date da:

$$\text{gravità} : G_N E^2 \sim 10^{-34} \quad \text{e. m.} : \alpha(E) \sim 10^{-2} \quad \text{deboli} : \alpha_W(E) \frac{E^2}{M_W^2} \sim 10^{-3} \quad \text{forti} : \alpha_s(E) \sim 0.18 \quad (1)$$

Se l'universo non è dominato dalle interazioni forti è perchè il loro raggio d'azione è estremamente piccolo, dell'ordine del raggio di Fermi  $1 \text{ fm}=10^{-15}$  m. In termini più rigorosi, la parola chiave è *confinamento*: gli oggetti fondamentali

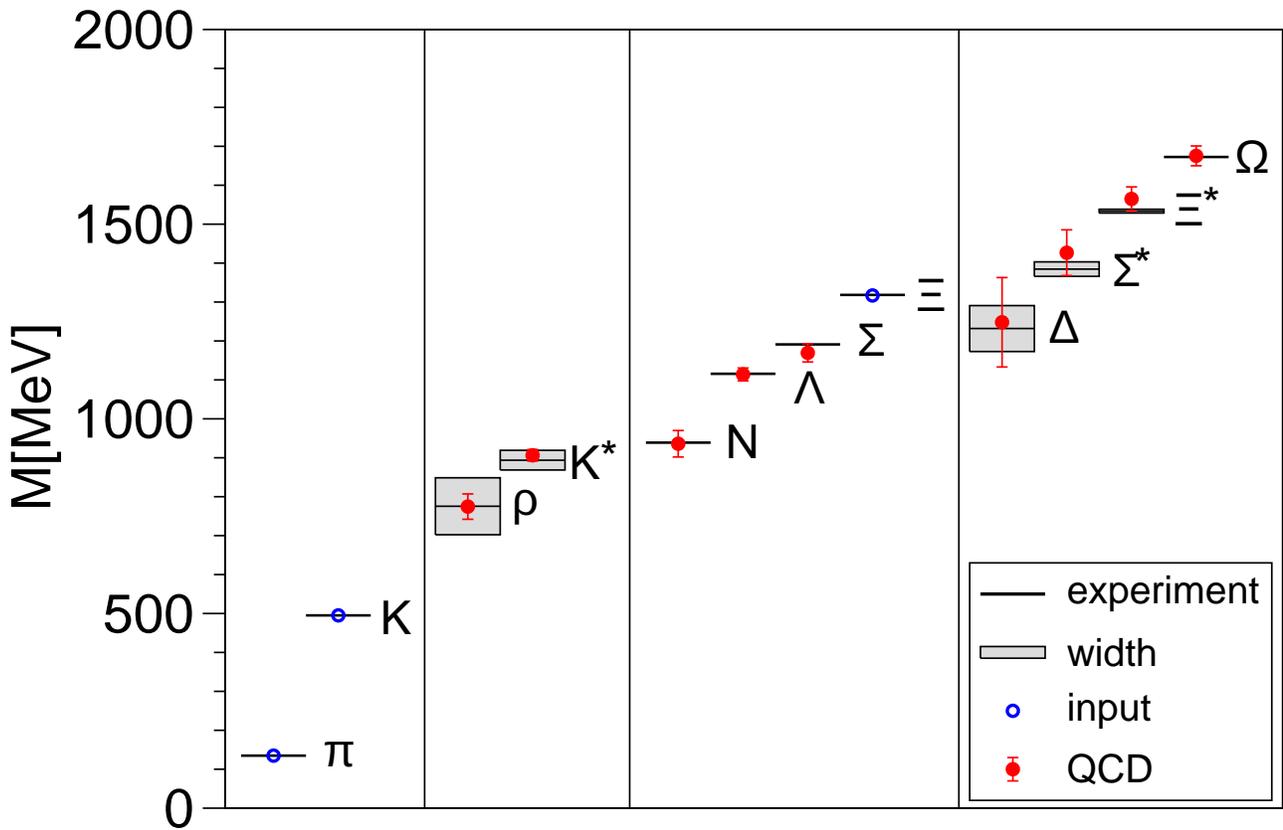


Figura 1: The light hadron spectrum of QCD. Horizontal lines and bands are the experimental values with their decay widths. Our results are shown by solid circles. Vertical error bars represent our combined statistical (SEM) and systematic error estimates.  $\pi$ ,  $K$  and  $\Xi$  have no error bars, because they are used to set the light quark mass, the strange quark mass and the overall scale, respectively. Figura presa da [1]

delle interazioni forti, che sono detti quarks, non esistono come particelle libere, bensì sono sempre confinati all'interno degli oggetti che compongono: i mesoni (es.  $\pi$ ) e i barioni (es. protone). Questo significa che gli oggetti che hanno una carica forte (detta di colore) non sono osservabili, e si combinano sempre a dare adroni con carica di colore complessiva nulla, o singoletti di colore: i barioni, costituiti da tre quarks, e i mesoni, costituiti da una coppia quark-antiquark. L'interazione fra adroni che ne risulta è molto piccola rispetto alle interazioni fra i singoli quarks: per analogia, si pensi alle forze di Van Der Waals fra due atomi elettricamente neutri. Inoltre, come già accennato e come vedremo meglio nel seguito, il raggio di azione è molto piccolo.

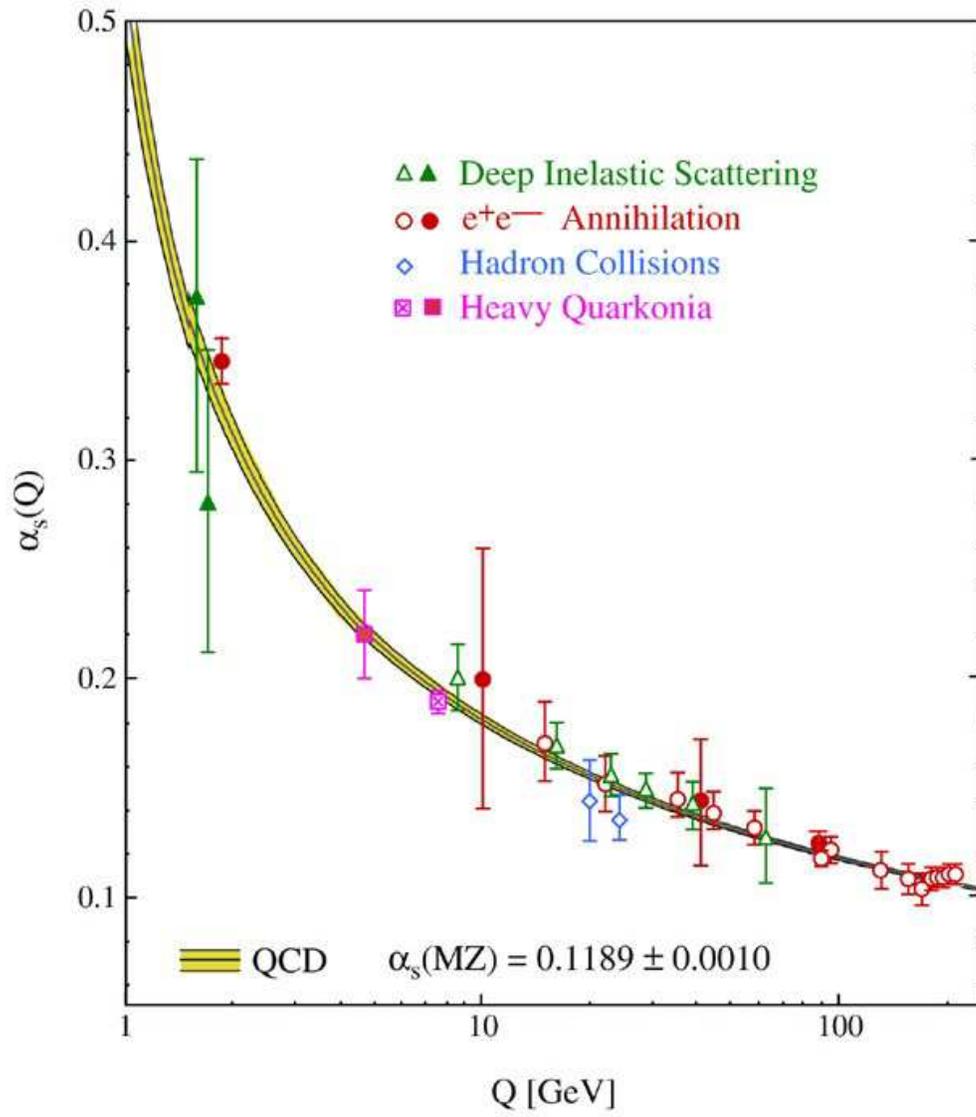
La visione moderna delle interazioni forti è alquanto frammentata, nel senso che non esiste una teoria fondamentale in grado di descrivere quantitativamente tutti gli esperimenti in cui le interazioni forti giocano un ruolo rilevante. Il motivo principale è che lo strumento principe che si usa in teoria dei campi per passare dal modello teorico (Lagrangiana di QCD) alle predizioni per le osservabili, e cioè la teoria delle perturbazioni, non è utilizzabile per energie inferiori alla scala di 1 GeV circa, cioè proprio alla scala di massa tipica di adroni e mesoni!

in quanto la costante di accoppiamento diventa troppo grande  
la costante di accoppiamento  $\alpha_s$  consente di usare lo strumento

## 2 Richiami introduttivi

### 2.1 Notazioni

Per i quadri e trivettori uso le notazioni:  $\mathbf{p}$  è un trivettore e  $p = (p_0, \mathbf{p}) = (p_0, p_1, p_2, p_3)$  un quadrivettore. Analogamente  $x = (x_0, \mathbf{x})$ . In linea generale uso le lettere greche  $\alpha, \beta, \mu, \nu, \dots$  per gli indici di Lorentz che vanno da 0 a 3:  $\mu = 0, 1, 2, 3$ . Per gli indici spaziali che vanno da 1 a 3 uso invece  $i, j, k$ ; ad esempio  $i = 1, 2, 3$ . Indico i versori con



$\hat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$ . Inoltre  $g_{\mu\nu} = \text{Diag}(1, -1, -1, -1)^*$ . Le matrici di Pauli e di Dirac sono date da:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3)$$

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu} \quad \{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0 \quad (4)$$

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k \quad \gamma_\mu\gamma_\nu = g_{\mu\nu} + \frac{[\gamma_\mu, \gamma_\nu]}{2} \quad (5)$$

Sono qui omesse le matrici identità; ad esempio con  $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + \dots$  si intende  $\sigma_i\sigma_j = I \delta_{ij} + \dots$  dove I è la matrice identità 3x3. Analogamente,  $\gamma_\mu\gamma_\nu = I g_{\mu\nu} + \dots$  dove I è la matrice identità 4x4. In fisica delle alte energie si usa un sistema di unità di misura in cui  $\hbar = c = 1$ . In questo modo si evita di portarsi dietro  $\hbar$  e  $c$  nei calcoli. Massa ed energia, essendo  $c = 1$ , si misurano entrambe in unità di energia eV. Per tornare a unità di misura usuali occorrono due costanti fisiche dimensionate, ad esempio:

$$c \approx 3 \cdot 10^8 m/s \quad \hbar c \approx 200 MeV fm \quad 1 fm = 10^{-15} m \quad (6)$$

Esempi (definiamo le dimensioni di massa [M], lunghezza [L], energia [E] ecc):

- Una velocità  $v = 0.3$  corrisponde a  $0.3c \approx 9 \cdot 10^7 m/s$
- Le energie si misurano in eV. Siccome  $\hbar c = [E][L] = 1$ , le lunghezze si misurano in  $eV^{-1}$ , e siccome  $c = 1$  il tempo si misura in  $eV^{-1}$ .
- Una massa di 1 GeV come quella del protone corrisponde a  $\frac{1 GeV}{(3 \cdot 10^8 m/s)^2} = \frac{1.6 \cdot 10^{-10} J}{(3 \cdot 10^8 m/s)^2} \approx 1.8 \cdot 10^{-27} kg$

## 2.2 Trasformazioni di Lorentz

Una trasformazione di Lorentz lungo l'asse delle  $x$  è definita da ( $v$  è la velocità relativa dei sistemi di riferimento):

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(x - vt) \quad t' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(t - vx) \quad y' = y \quad z' = z \quad (7)$$

ed è tale che  $t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ . Più in generale, definito un quadrivettore  $(x_0, x_1, x_2, x_3)$ , le trasformazioni di Lorentz sono tutte quelle che lasciano invariante la norma  $x^2 \equiv x_\mu x^\mu = x_\mu g^{\mu\nu} x_\nu = x_0^2 - \mathbf{x}^2$ . Si definiscono quantità con indici in alto  $x^\mu \equiv g^{\mu\nu} x_\nu$  di modo che  $x^2 = x_\mu x^\mu$ . Da un punto di vista formale, le trasformazioni di Lorentz formano un gruppo che si può rappresentare con matrici  $\Lambda$  4x4:  $x'_\mu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu$ . Ad esempio le usuali rotazioni spaziali  $\mathbf{x}' = \mathbf{R}\mathbf{x}$  con  $\mathbf{R}^t \mathbf{R} = 1$  appartengono ovviamente al gruppo di Lorentz, così come la (7) e le sue generalizzazioni lungo altre direzioni. Un tensore a  $n$  indici si trasforma come  $T'_{i_1 i_2 \dots i_n} = \Lambda_{i_1}^{j_1} \Lambda_{i_2}^{j_2} \dots \Lambda_{i_n}^{j_n} T_{j_1 j_2 \dots j_n}$ . Le matrici  $\Lambda$  devono lasciare invariato il tensore metrico  $g_{\mu\nu}$ . Infatti:

$$x^2 = x'^2 \Rightarrow x_\alpha g^{\alpha\beta} x_\beta = g^{\mu\nu} \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta x_\alpha x_\beta \quad \forall x \Rightarrow g^{\alpha\beta} = g^{\mu\nu} \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta \quad (8)$$

notare che i quadrivettori con indici in alto trasformano in maniera diversa da quelli con indici in basso. Dalle definizioni sopra è infatti facile vedere che  $x_\mu \rightarrow \Lambda_\mu^\nu x_\nu \Rightarrow x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu x^\nu$  con  $\Lambda^\mu_\nu = g^{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \Lambda_\alpha^\beta$ . In concreto, se prendiamo ad esempio la (7) si ha ( $\gamma = (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$ ):

$$x_1 \rightarrow \gamma(x_1 - vx_0), x_0 \rightarrow \gamma(x_0 - vx_1) \Rightarrow x^1 \rightarrow \gamma(x^1 + vx^0), x^0 \rightarrow \gamma(x^0 + vx^1) \quad x_0 x^0 + x_1 x^1 \rightarrow x_0 x^0 + x_1 x^1 \quad (9)$$

Allo stato attuale delle conoscenze, le interazioni fondamentali sono invarianti sotto il gruppo di trasformazioni  $x'_\mu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu + a_\mu$  con  $a_\mu$  quadrivettore costante; queste trasformazioni costituiscono il gruppo di Poincarè. Le particelle elementari sono "rappresentazioni irriducibili del gruppo di Poincarè", costituito da trasformazioni di Lorentz ( $\Lambda$ ) e traslazioni ( $a$ ). In altre parole, esattamente come in Meccanica quantistica, gli autostati sono classificabili come rappresentazioni irriducibili del gruppo di simmetria dell'hamiltoniana: vedi ad esempio il momento angolare per l'atomo di idrogeno. Rimandando a [2] per una descrizione dettagliata delle rappresentazioni, mi limito a dire alcune caratteristiche fondamentali:

\*La notazione  $\text{Diag}(a,b,c,\dots)$  indica una matrice diagonale con gli elementi specificati in parentesi sulla diagonale. Il tensore metrico  $g_{\mu\nu}$  è quindi una matrice 4x4 diagonale con gli elementi (1,-1,-1,-1) sulla diagonale.

- Le particelle sono classificate con un indice continuo  $p$ , l'impulso, e con un indice discreto di spin  $s$ . L'invarianza per traslazione ha come conseguenza che la dipendenza spaziotemporale per una particella libera è quella di onda piana  $\sim e^{-ipx}$ .
- L'indice di spin assume valori  $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$ . Una particella massiva ha, come ci si aspetterebbe,  $2s + 1$  gradi di libertà. Tuttavia una particella di massa nulla ha due soli gradi di libertà qualunque sia il valore di  $s \geq \frac{1}{2}$ , che sono detti elicità.

In questo corso tratteremo solo particelle di spin 0 (scalari), spin  $\frac{1}{2}$  (fermioni), spin 1 (bosoni vettori), le cui funzioni d'onda, a meno di una costante di normalizzazione, sono:

$$\text{scalare } e^{-ipk} \quad \text{fermione } u_\alpha(p)e^{-ipx} \quad \alpha = 1, 2 \quad \text{vettore } \epsilon_\mu(p)e^{-ipx} \quad \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (10)$$

Con le seguenti proprietà sotto trasformazioni di Lorentz:

$$u_\delta \rightarrow M_{\delta\gamma}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})u_\gamma \quad \epsilon_\mu \rightarrow \Lambda_\mu^\nu \epsilon_\nu \quad (11)$$

Le trasformazioni di Lorentz formano un gruppo continuo dipendente dai parametri  $\alpha$  (rotazione) e  $\beta$  (boost). Le forma esplicite di  $M(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$ ,  $\Lambda(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})$  si possono trovare ad esempio in [3].

### 2.3 Teoria dei campi classica

La teoria dei campi si basa sul principio di azione:

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \quad \delta S = 0 \quad (12)$$

da cui si ricavano le equazioni del moto:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \quad (13)$$

La corrispondente Hamiltoniana (poco usata in teoria dei campi, visto che  $\mathcal{L}$  è invariante di Lorentz ma  $\mathcal{H}$  no) si ottiene nel modo usuale, definendo il momento canonico e facendo la trasformata di Legendre:

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)} \quad \mathcal{H} = \pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{L} \quad (14)$$

Il teorema di Noether assicura che ad ogni simmetria continua corrisponde una corrente conservata. Per "simmetria continua" intendo una trasformazione sui campi:

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \alpha \Delta \phi(x) \quad \alpha \text{ parametro continuo} \quad (15)$$

che lascia inalterate le equazioni del moto, ovvero l'azione; la Lagrangiana deve essere quindi invariante a meno di una quadri divergenza:

$$\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}(x) + \alpha \partial_\mu K^\mu; \quad j_\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \Delta \phi - K^\mu \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (16)$$

Se consideriamo la Lagrangiana che descrive l'interazione di uno scalare reale con una corrente esterna:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + j \phi \quad \Rightarrow \quad (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi(x) = j(x) \quad (17)$$

la soluzione in trasformata di Fourier  $\phi(p) = \int d^4x e^{ipx} \phi(x)$  è data da:

$$\phi(p) = \frac{1}{p^2 - m^2} j(p) \quad (18)$$

L'oggetto  $\frac{1}{p^2 - m^2}$ , che risolve l'equazione differenziale che descrive il moto, è detto funzione di Green, o propagatore.

## 2.4 Equazioni del moto per scalare, fermione, vettore

La Lagrangiana che descrive particelle libere, e le corrispondenti equazioni di moto, sono:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2 + \bar{\psi}(i\partial - m_f)\psi + F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - M^2 A_\mu A^\mu \quad (19)$$

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi = 0 \quad (i\partial - m_f)\psi = 0 \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} + M^2 A^\nu = 0 \quad (20)$$

dove  $F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$ ,  $\partial \equiv \partial_\mu \gamma^\mu$  e  $\psi$  è una funzione d'onda a 4 componenti.

Consideriamo dapprima un campo scalare. In trasformata di Fourier si ha:

$$\phi(x) = \int d^4 p e^{-ipx} \phi(p); \quad (p^2 - m^2)\phi(p) = 0 \Rightarrow \phi(p) = a(p)\delta(p^2 - m^2) \Rightarrow \phi(x) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} a(\mathbf{p}) e^{-ipx} + c.c. \quad (21)$$

con l'ultima espressione valida solo per un campo reale  $\phi = \phi^*$ . Notare che la  $\delta(p^2 - m^2)$  che fissa l'impulso "sul mass shell" ha due branche, una per  $p_0 = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$  e una per  $p_0 = -\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ : esistono quindi sia soluzioni "ad energia positiva" del tipo  $e^{-ipx}$  che soluzioni "ad energia negativa" del tipo  $e^{ipx}$ .

Nel caso di un fermione le soluzioni hanno la forma  $\psi(x) \sim e^{-ipx} u(p)$  dove  $u(p)$  è un qudrispinore che soddisfa  $(\not{p} - m)u(p) = 0$  e  $p_0 = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ . Si preferisce per convenzione scrivere le soluzioni con energia negativa come  $\psi(x) = e^{ipx} v(p)$ ,  $(\not{p} + m)v(p) = 0$ ,  $p_0 = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ . Vediamo per prime le soluzioni ad energia positiva. si ha  $\psi(x) = \int d^4 p e^{-ipx} u(p)$  dove  $u(p)$  è un qudrispinore che soddisfa  $(\not{p} - m)u(p) = 0$ . Scrivendo  $u(p)$  in termini di due bispinori (o spinori di Weyl) si ottiene:

$$u = \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} \quad \begin{cases} (p_0 - \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma})\xi - m\eta = 0 \\ (p_0 + \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma})\eta - m\xi = 0 \end{cases} \quad (22)$$

ha soluzione:

$$\begin{cases} p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 = 0 \\ \xi = \frac{p_0 + \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}}{m} \eta \end{cases}$$

Ho quindi due soluzioni per i due possibili spin. Conviene scegliere l'asse di quantizzazione dello spin lungo l'impulso, cioè scegliere la base  $\mathbf{S}\hat{\mathbf{p}}\eta_\pm = \pm\frac{1}{2}\eta_\pm$ ,  $\mathbf{S} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}$ . Esplicitamente si ha:

$$\hat{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\phi \\ \sin\theta \sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \eta_+ = \frac{1}{\sqrt{2(1 - \cos\theta)}} \begin{pmatrix} \sin\theta e^{-i\frac{\phi}{2}} \\ (1 - \cos\theta)e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} \eta_- = \frac{1}{\sqrt{2(1 + \cos\theta)}} \begin{pmatrix} -\sin\theta e^{-i\frac{\phi}{2}} \\ (1 + \cos\theta)e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}$$

Per convenzione si normalizza a  $u_r^\dagger u_s = 2p_0 \delta_{rs}$ ,  $\bar{u}_r u_s = 2m \delta_{rs}$ . Con questa normalizzazione:

$$u_+ = \begin{pmatrix} \sqrt{p_0 - |\mathbf{p}|} \eta_+ \\ \sqrt{p_0 + |\mathbf{p}|} \eta_+ \end{pmatrix}, \quad u_- = \begin{pmatrix} \sqrt{p_0 + |\mathbf{p}|} \eta_- \\ \sqrt{p_0 - |\mathbf{p}|} \eta_- \end{pmatrix}; \quad u_\pm = \begin{pmatrix} \sqrt{p_0 - \boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}}} \eta_\pm \\ \sqrt{p_0 + \boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}}} \eta_\pm \end{pmatrix},$$

dove ho tenuto conto che  $\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}\eta_\pm = \pm|\mathbf{p}|\eta_\pm$  e che  $m = \sqrt{p_0 - |\mathbf{p}|}\sqrt{p_0 + |\mathbf{p}|}$ . Definisco adesso

$$P_\pm = \eta_\pm \eta_\pm^\dagger = \frac{1}{2}(1 \pm \boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}}) \quad P_+ u_+ = u_+, P_+ u_- = 0 \quad [P_\pm, \not{p}] = [P_\pm, \boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}}] = 0$$

Si ha allora

$$u_+ \bar{u}_+ = \begin{pmatrix} m\eta_+ \eta_+^\dagger & (p_0 - |\mathbf{p}|)\eta_+ \eta_+^\dagger \\ (p_0 + |\mathbf{p}|)\eta_+ \eta_+^\dagger & m\eta_+ \eta_+^\dagger \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & p_0 - \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma} \\ p_0 + \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma} & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_+ & 0 \\ 0 & P_+ \end{pmatrix} = (\not{p} + m)P_+ = P_+(\not{p} + m)$$

Analogamente  $u_- \bar{u}_- = (\not{p} + m)P_-$  per cui si ha  $\sum_r u_r \bar{u}_r = (\not{p} + m)$ . Un caso particolare si ha se  $m=0$ ,  $p_0 = \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}$ :

$$u_+ \bar{u}_+ = \begin{pmatrix} 0 & p_0 - \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma} \\ p_0 + \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_+ & 0 \\ 0 & P_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_0 + \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p_0 - \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma} \\ p_0 + \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ = \not{p}P_L = P_R \not{p}; \quad u_- \bar{u}_- = \not{p}P_R = P_L \not{p}$$

In questo caso gli autostati di elicità coincidono con gli autostati di chiralità:

$$u_+ = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2p_0} \eta_+ \end{pmatrix}, \quad u_- = \begin{pmatrix} \sqrt{2p_0} \eta_- \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le soluzioni ad energia negativa sono  $\psi(x) = v(p)e^{ipx}$  con  $p_0 = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$  e quindi  $(\not{p} + m)v(p) = 0$ . Calcoli analoghi a quelli per le  $u(p)$  conducono a:

$$v_- = \begin{pmatrix} \sqrt{p_0 - |\mathbf{p}|} \beta_+ \\ -\sqrt{p_0 + |\mathbf{p}|} \beta_+ \end{pmatrix} \quad v_+ = \begin{pmatrix} \sqrt{p_0 + |\mathbf{p}|} \beta_- \\ -\sqrt{p_0 - |\mathbf{p}|} \beta_- \end{pmatrix} \quad \sigma \hat{\mathbf{p}} \beta_{\pm} = \pm \beta_{\pm} \quad \sum_{+,-} v \bar{v} = \not{p} - m \quad (23)$$

Notare che elicità + delle soluzioni a energia negativa corrisponde a spinori di tipo -. Questo è dovuto alla nostra scelta delle soluzioni :  $u(p)e^{-ipx}$  diventa, per le soluzioni con  $E < 0$ ,  $v(p)e^{ipx}$  cioè viene invertito, oltre al segno dell'energia, anche quello del triimpulso. Il che significa che uno stato a elicità + è allineato a  $-\mathbf{p}$ :  $\sigma(-\mathbf{p})\beta = \beta \Rightarrow \sigma \mathbf{p} \beta = -\beta$  cioè elicità + per  $v$  corrisponde un bispinore  $\beta_-$ .

Veniamo infine al caso di un bosone vettore. Le equazioni del moto (vedi (20)) si scrivono:

$$(\square + M^2)A_\mu - \partial_\mu \partial^\nu A_\nu = 0 \quad (24)$$

Le soluzioni sono di tipo onda piana:

$$A^\mu(x) = \varepsilon_p^\mu(k)e^{-ikx} + \varepsilon_p^{\mu*}(k)e^{ikx} \quad k^2 = M^2 \quad (25)$$

si ha quindi che  $k\varepsilon(k) = 0$  e che  $k_0 = \sqrt{M^2 + |\mathbf{k}|^2}$ .

Per trovare una base, cioè scrivere esplicitamente le possibili polarizzazioni di un bosone vettore, partiamo dal fatto che una base reale nello spazio a 4 dimensioni è data dai 4 vettori:

$$\varepsilon_0 = (1, \mathbf{0}) \quad \varepsilon_1 = (0, \boldsymbol{\varepsilon}_1) \quad \varepsilon_2 = (0, \boldsymbol{\varepsilon}_2) \quad \varepsilon_3 = (0, \hat{\mathbf{k}}) \quad \mathbf{k}\boldsymbol{\varepsilon}_{1,2} = 0, \boldsymbol{\varepsilon}_{1,2}^2 = 1 \quad (26)$$

Infatti ogni quadrivettore si può scrivere come  $v^\mu = \sum_{i=0,1,2,3} c_i \varepsilon_i^\mu$  con  $c_0 = v_0 = (v\varepsilon_0)$ ,  $c_i = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_i = -(v\varepsilon_i)$ . Notare il segno - nella metrica, per cui  $g^{\mu\nu}v_\nu = v^\mu = (v\varepsilon_0)\varepsilon_0^\mu - \sum_{i=1,2,3} (v\varepsilon_i)\varepsilon_i^\mu = v_\nu(\varepsilon_0^\mu\varepsilon_0^\nu - \varepsilon_i^\mu\varepsilon_i^\nu)$  da cui  $\varepsilon_0^\mu\varepsilon_0^\nu - \varepsilon_i^\mu\varepsilon_i^\nu = g^{\mu\nu}$  come si può verificare esplicitamente dalla (26). Le 4 polarizzazioni della (26) vengono chiamate scalare ( $\varepsilon_0$ ), trasverse ( $\varepsilon_{1,2}$ ), longitudinale ( $\varepsilon_3$ )

Nel caso  $M \neq 0$  i vettori  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  soddisfano  $k\varepsilon = 0$  ma  $\varepsilon_3, \varepsilon_0$  no. Tuttavia è facile trovare una combinazione di questi ultimi che soddisfa  $k\varepsilon_L = 0$ :

$$k = (k_0, \mathbf{k}); k^2 \equiv M^2 \quad \varepsilon_{1,2} = (0, \boldsymbol{\varepsilon}_{1,2}); \mathbf{k}\boldsymbol{\varepsilon}_{1,2} = 0; \boldsymbol{\varepsilon}_{1,2}^2 = 1 \quad \varepsilon_L = \frac{1}{M}(|\mathbf{k}|, k_0 \hat{\mathbf{k}}) \quad (27)$$

E' facile fare le somme sulle polarizzazioni. Infatti:

$$\sum_{1,2} \varepsilon_p^i \varepsilon_p^j = \delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{|\mathbf{k}|^2} \quad \varepsilon_L^i \varepsilon_L^j = \frac{k_0^2}{M^2} \frac{k^i k^j}{|\mathbf{k}|^2} \quad \sum_{1,2} \varepsilon_p^0 \varepsilon_p^0 = 0 \quad \varepsilon_L^0 \varepsilon_L^0 = \frac{|\mathbf{k}|^2}{M^2} \quad (28)$$

da cui, considerando anche le componenti miste  $0i$ , si ricava:

$$\sum_{T,L} \varepsilon_p^\mu \varepsilon_p^{\nu*} = -g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{M^2} \quad (29)$$

Il caso di bosone di massa nulla (fotone) è un pò più complicato. Come nel caso  $M \neq 0$  la richiesta  $k\varepsilon = 0$  elimina un grado di libertà:

$$\varepsilon_{1,2} = (0, \boldsymbol{\varepsilon}_{1,2}); \mathbf{k}\boldsymbol{\varepsilon}_{1,2} = 0; \boldsymbol{\varepsilon}_{1,2}^2 = 1 \quad \varepsilon_L^\mu = \alpha k^\mu \quad (30)$$

Tuttavia nel limite  $M = 0$  la Lagrangiana  $\mathcal{L} = F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$  acquisisce una nuova simmetria, di gauge,  $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi$  dove  $\chi$  è una generica funzione di  $x^*$ . Scegliendo  $\chi = \exp[-i\alpha kx]$  questo corrisponde per le polarizzazioni a  $\varepsilon^\mu \rightarrow \varepsilon^\mu - \alpha k^\mu$ ; in definitiva posso scegliere la gauge in modo da eliminare l'ultima delle (30), che è non fisica. Infine, ricordando che  $k = \omega(1, \hat{\mathbf{k}})$  e introdotto un vettore  $n = \omega(1, -\hat{\mathbf{k}})$  è facile verificare che:

$$\sum_{1,2} \varepsilon_i^\mu \varepsilon_i^\nu \equiv P_T^{\mu\nu} = \delta^{ij} - \hat{\mathbf{k}}^i \hat{\mathbf{k}}^j = -g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu n^\nu + k^\nu n^\mu}{(nk)} \quad (31)$$

\*Una trasformazione di gauge in particolare non cambia i valori di dei campi elettrici e magnetici  $\mathbf{B}, \mathbf{E}$  e non cambia quindi la fisica

### 3 Formalismo della teoria dei campi quantistica

#### 3.1 Quantizzazione dei campi

I campi, che sono funzioni della coordinata  $x$  cioè  $c$ -numeri nella teoria dei campi classica, vengono quantizzati come operatori in rappresentazione di interazione nella teoria dei campi. Ad esempio  $\phi$  campo reale scalare:

$$\mathcal{L} = \frac{\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi}{2} - \frac{m^2 \phi^2}{2} \Rightarrow (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi = 0 \Rightarrow \phi = \int d^4 k \delta(k^2 - m^2) a(\mathbf{k}) e^{-ikx} + c.c. = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{2\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}} a(\mathbf{k}) e^{-ikx} + c.c. \quad (32)$$

dove  $a$  è una funzione scalare di  $\mathbf{k}$ . Il campo  $\phi$  diventa un operatore, e la teoria viene quantizzata, imponendo le regole di commutazione canoniche *equal times*:

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] = [\phi(\mathbf{x}, t), \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}] = [\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{x}', t)] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (33)$$

Notare che nella (32) la misura di integrazione  $\frac{d^3 \mathbf{k}}{\omega}$ ,  $\omega = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$  è arbitraria perchè posso sempre ridefinire  $a(\mathbf{k}) \rightarrow \omega a(\mathbf{k})$  ad esempio. Per analogia con l'oscillatore armonico per il quale l'operatore di posizione  $x \propto \frac{a}{\sqrt{w}}$  adotterò le seguenti normalizzazioni:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} [a(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)} + h.c.] \Rightarrow [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (34)$$

dove l'ultimo passaggio deriva dall'aver imposto la (33).

Un campo carico è descritto dall'operatore ( $dk \equiv \frac{d^3 \mathbf{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}}$ ):

$$\phi(x) = \int dk [a(\mathbf{k}) e^{-ikx} + b^\dagger(\mathbf{k}') e^{ikx}] \quad [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = [b(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad [a(\mathbf{k}), b(\mathbf{k}')] = 0 \quad (35)$$

Da queste, oltre alla commutazione canonica  $[\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}^\dagger(\mathbf{x}', t)] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  si ricava  $[\phi(x), \phi(y)] = 0$  e  $[\phi(x), \phi^\dagger(y)] = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{\omega} \sin k(x - y)$ . Quest'ultima espressione è 0 per  $(x - y)^2 < 0$  (causalità). Infatti se  $x_0 = y_0$  vale 0 perchè l'integrando è dispari per  $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$ ; per invarianza di Lorentz questo vale per tutti i punti di tipo spazio. Inoltre, definendo  $Q = \int d^3 \mathbf{x} \mathcal{N}[\phi(x)\dot{\phi}^\dagger(x) - \dot{\phi}(x)\phi^\dagger(x)] = \int d^3 \mathbf{k} [a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) - b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k})]$  si ottiene  $[Q, \phi(x)] = \phi(x)$ .

I campi fermionici vengono quantizzati con anticommutatori:

$$\Psi(x) = \int dk [a_{\mathbf{k},r} u_r(k) e^{-ikx} + b_{\mathbf{k},r}^\dagger v_s(k) e^{ikx}] \quad \{a_{\mathbf{k},r}, a_{\mathbf{k}',s}^\dagger(\mathbf{k}')\} = \{b_{\mathbf{k},r}, b_{\mathbf{k}',s}^\dagger(\mathbf{k}')\} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^3 \delta_{rs} \quad (36)$$

con tutti gli altri anticommutatori pari a 0. Il formalismo del numero di occupazione funziona anche con gli anticommutatori; ad esempio se  $N = \int d^3 \mathbf{k} a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k})$  ho  $Na_{\mathbf{p}}^\dagger|0\rangle = -\int d^3 \mathbf{k} a^\dagger(\mathbf{k})a_{\mathbf{p}}^\dagger a(\mathbf{k})|0\rangle + \int d^3 \mathbf{k} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p}) a^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle = a_{\mathbf{p}}^\dagger|0\rangle$  e in generale  $N(a_{\mathbf{p}_1}^\dagger)^i (a_{\mathbf{p}_2}^\dagger)^j |0\rangle = (i+j)(a_{\mathbf{p}_1}^\dagger)^i (a_{\mathbf{p}_2}^\dagger)^j |0\rangle$ . E' essenziale qui il fatto che  $N$  è un operatore bosonico:  $[a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{p}}] = 0$  se  $\mathbf{k} \neq \mathbf{p}$ . Si ottiene

$$\{\Psi^\alpha(\mathbf{x}, t), \bar{\Psi}^\beta(\mathbf{0}, t)\} = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{\omega} [\sum_r u_{\mathbf{k},r} \bar{u}_{\mathbf{k},r} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} - \sum_r v_{\mathbf{k},r} \bar{v}_{\mathbf{k},r} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}] = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{\omega} (\omega \gamma_0^{\alpha\beta} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}) = i\gamma_0^{\alpha\beta} \delta^3(\mathbf{x}) \quad (37)$$

avendo tenuto conto che gli integrali in  $\mathbf{k}$  di  $m(e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} - e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}})$ ,  $\mathbf{k}\gamma(e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} + e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}})$  sono 0 perchè dispari. Da qui si ricava anche

$$\{\Psi^\alpha(\mathbf{x}, t), \Psi^\beta(\mathbf{y}, t)\} = i\delta^{\alpha\beta} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad \{\Psi^\alpha(x), \Psi^\beta(y)\} = 0 \quad (38)$$

Problemi sorgono nella quantizzazione delle teorie di gauge, per le quali la generalizzazione della (33) sarebbe  $[A_\mu(\mathbf{x}, t), \pi_\nu(\mathbf{x}', t)] = ig_{\mu\nu} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ . Tuttavia questo è incompatibile con:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + J_\mu A^\mu \Rightarrow \pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} = \dot{A}_i - \partial_i A_0 \quad \pi_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = 0 \quad ; \quad \partial_i \pi_i = -J_0 \quad (39)$$

dove l'ultima equazione è conseguenza delle equazioni del moto. Quindi delle 4 commutazioni canoniche, 1 salta perchè  $\pi_0 = 0$  e l'altra salta perchè  $\partial_i \pi_i = -J_0$  è una relazione fra gli operatori di  $A_\mu$  e quelli, che dovrebbero essere indipendenti, dei campi fermionici ad esempio. I gradi di libertà dinamici che posso quantizzare sono quindi in realtà solo 2. Però se procedo così perdo ovviamente l'invarianza manifesta di Lorentz:  $\pi_0 = 0$ .

Le difficoltà nella quantizzazione sono legate alla invarianza di gauge: data  $A_\mu(\mathbf{x}, 0)$  la soluzione non dà una soluzione univoca  $A_\mu(\mathbf{x}, t)$  perchè anche  $A_\mu(\mathbf{x}, t) + \partial_\mu \Omega(x, t)$  con  $\Omega$  opportuno è soluzione. Equivalentemente, il propagatore è in realtà un proiettore  $D_{\mu\nu} \partial_\nu \Omega = 0$ . Una maniera di risolvere è quella di fissare la gauge, eliminando i gradi di libertà spuri e restando solo con quelli fisici che verranno quantizzati. La scelta più semplice è la gauge di Coulomb,  $\partial_i A_i = 0$ . In questa gauge si ha dunque:

$$\partial_i A_i = 0 \quad ; \quad \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_i A_0} = J_0 \Rightarrow \partial_i \partial^i A_0 = -J_0 \Rightarrow A_0(\mathbf{x}, t) = \int d^3 \mathbf{x}' \frac{J_0(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (40)$$

e  $A_0$  non è più un grado di libertà dinamico della teoria. Rimane ancora qualche difficoltà: la quantizzazione canonica  $[A_i(\mathbf{x}, t), \pi_j(\mathbf{x}', t)] = -i \delta_{ij} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$  non può essere realizzata in quanto  $\partial_i A_i = 0$ . Si può ovviare facilmente imponendo una relazione leggermente diversa:

$$[A_i(\mathbf{x}, t), \pi_j(\mathbf{x}', t)] = -i \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}')} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2} \right) \quad (41)$$

che sono compatibili con le equazioni del moto:

$$\mathcal{L} = -\frac{F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}}{4} + J_i A^i - J_0 (\nabla^2)^{-1} J_0 \quad \Rightarrow \quad \square A_i = \left( \delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2} \right) J_j \equiv J_j^T \quad (42)$$

dove è sottinteso che  $A_0$  che compare in  $F_{0i}$  è in realtà  $-(\nabla^2)^{-1} J_0$ . I campi e il propagatore si scrivono:

$$A_\mu^i(x) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{\omega} \sum_{i=1}^2 [a e^{-ikx} \varepsilon_\mu^i(\mathbf{k}) + h.c.] \quad \int d^4 x e^{ikx} \langle \mathcal{T} A_\mu(x) A_\nu(0) \rangle = i \frac{P_{\mu\nu}^T}{k^2} \quad (43)$$

dove le polarizzazioni trasverse soddisfano

$$\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j = -\delta_{ij} \quad \sum \varepsilon_\mu^i \varepsilon_\nu^{i*} = P_{\mu\nu}^T \quad P_{ij}^T = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2} \quad P_{00}^T = P_{0i}^T = P_{i0}^T = 0 \quad (44)$$

Benchè il propagatore non sia covariante, la covarianza si recupera grazie alla proprietà della teoria abeliana che data una ampiezza cui esce un fotone si ha  $k_\mu A^\mu = 0$  dove  $k_\mu$  è l'impulso del fotone. Questa identità di Ward è vera anche fuori dal mass shell per le teorie abeliane. Per cui il propagatore viene sandwichato fra 2 correnti conservate:

$$J_\mu P_{\mu\nu}^T J^\nu = J_i J_i - J_i \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2} J_j = J_i J_i - J_0 \frac{k^2 + \mathbf{k}^2}{\mathbf{k}^2} J_0 \Rightarrow \frac{J_\mu P_{\mu\nu}^T J^\nu}{k^2} = \frac{J_\mu J^\mu}{k^2} - J_0 \frac{1}{\mathbf{k}^2} J_0 \quad (45)$$

In questa espressione, il primo termine è covariante e corrisponde a un propagatore proporzionale a  $g_{\mu\nu}$ , mentre il secondo cancella esattamente l'interazione istantanea Coulombiana (termine  $J_0 (\nabla^2)^{-1} J_0$  nella (42))

### 3.2 Teoria delle perturbazioni dipendente dal tempo

$$S = \mathcal{T} \exp[i \int d^4 x \mathcal{L}_I] \quad (46)$$

La rappresentazione più conveniente per la teoria delle perturbazioni è quella di interazione, nella quale l'Hamiltoniana totale viene spezzata nella somma di quella libera (esattamente risolvibile) e di quella di interazione:  $H = H_0 + V$ . Gli stati in rappresentazione di interazione sono dati da  $\Psi_I = \exp(iH_0 t) \Psi_S$  dove  $\Psi_S$  è lo stato in rappresentazione di Schrödinger, che soddisfa  $i\dot{\Psi}_S = H \Psi_S$ . Gli operatori da  $O_I = \exp(iH_0 t) O_S \exp(-iH_0 t)$  ed evolvono quindi con la Hamiltoniana libera:  $i\dot{O}_I = [O_I, H_0]$ . L'operatore di evoluzione è definito da  $\Psi_I(t) = \mathcal{U}_I(t, t_0) \Psi_I(t_0)$ . Dalla definizione di  $\Psi_I$  si ricava  $i\dot{\Psi}_I(t) = H_I(t) \Psi_I(t)$  con  $H_I(t) = e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t}$ . L'equazione per l'operatore di evoluzione diventa:

$$i\dot{\Psi}_I(t) = H_I(t) \Psi_I(t) \quad \Psi_I(t = t_0) = \Psi(t_0) \quad \Leftrightarrow \quad i \frac{\partial \mathcal{U}_I(t, t_0)}{\partial t} = H_I(t) \mathcal{U}_I(t, t_0) \quad \mathcal{U}_I(t_0, t_0) = 1 \quad (47)$$

Questa equazione si può risolvere perturbativamente introducendo un parametro "piccolo"  $g$  che parametrizza l'interazione:  $H_I \rightarrow g H_I$  e sviluppando in serie di  $g$  l'operatore di evoluzione:  $\mathcal{U}_I(t, t_0) = \mathcal{U}_I^{(0)} + g \mathcal{U}_I^{(1)} + g^2 \mathcal{U}_I^{(2)} + \dots$ . La speranza è che i primi termini della serie forniscano una buona approssimazione, e che i termini successivi siano man mano più piccoli.

Per risolvere la (47) sostituiamo l'espansione in serie di potenze di  $g$  e uguagliamo membro a membro ottenendo:

$$i \frac{\partial \mathcal{U}_I^{(0)}}{\partial t} + i g \frac{\partial \mathcal{U}_I^{(1)}}{\partial t} + i g^2 \frac{\partial \mathcal{U}_I^{(2)}}{\partial t} + \dots = g H_I \mathcal{U}_I^{(0)} + g^2 H_I \mathcal{U}_I^{(1)} + \dots \Rightarrow i \frac{\partial \mathcal{U}_I^{(0)}}{\partial t} = 0, \quad i \frac{\partial \mathcal{U}_I^{(1)}}{\partial t} = H_I \mathcal{U}_I^{(0)}, \quad \dots \quad (48)$$

La prima equazione all'ultimo membro della (48) comporta che  $\mathcal{U}_I^{(0)}(t, t_0) = 1$ . La seconda è risolta da  $\mathcal{U}_I^{(1)}(t, t_0) = -i \int_{t_0}^t H_I(t') dt'$ . All'ordine  $g^2$  si ottiene  $i \frac{\partial \mathcal{U}_I^{(2)}}{\partial t} = H_I \mathcal{U}_I^{(1)}$  e quindi  $\mathcal{U}_I^{(2)}(t, t_0) = (-i)^2 \int_{t_0}^t H_I(t'') dt'' \int_{t_0}^{t'} dt' H(t')$ . In quest'ultima espressione si nota un ordinamento dei tempi:  $t_0 < t' < t'' < t$ . Procedendo iterativamente, è facile mostrare che:

$$\mathcal{U}_I(t, t_0) = \sum_n (-i)^n \int_{t_0}^t dt_1 \dots \int_{t_0}^{t_1} dt_n H_I(t_n) \dots H_I(t_1) \equiv \mathcal{T} \exp[-i \int_{t_0}^t H_I(t') dt'] \quad H_I(t) = e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t} \quad (49)$$

dove  $\mathcal{T}$  è l'operatore di ordinamento temporale. Notare però che la (49) è una soluzione puramente formale: a livello di calcolo per osservabili concrete è molto difficile andare oltre i primi termini della serie. Nella pratica, in teorie come la QED, la QCD e le interazioni deboli solo i primi 2 o 3 termini sono stati calcolati, e sono di solito sufficienti.

Per descrivere un esperimento di scattering, si può pensare che l'interazione sia spenta per tempi molto lontani sia nel futuro che nel passato; si può ad esempio descrivere questa situazione con uno spegnimento adiabatico  $H_I \rightarrow e^{-|\varepsilon|t} H_I$ . Gli stati iniziali ( $t \rightarrow -\infty$ ) e finali ( $t \rightarrow \infty$ ) sono quindi autostati dell'Hamiltoniana libera:  $H_0|f, i\rangle = E_{f,i}|f, i\rangle$ . La quantità rilevante è la probabilità di transizione da uno stato che è un'onda piana entrante a  $t = -\infty$  ad uno stato di onda piana uscente a  $t = \infty$ . Questa probabilità è il modulo quadro dell'ampiezza di transizione  $\langle f|\mathcal{U}_I(-\infty, \infty)|i\rangle \equiv S_{fi}$ , detto anche elemento di matrice S. Ad esempio nel caso di scattering da un potenziale esterno  $V(\mathbf{x}, t)$  e al primo ordine perturbativo si ha:

$$S_{fi} = \langle f| \left[ 1 - i \int_{-\infty}^{\infty} e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t} dt \right] |i\rangle = \delta_{fi} - 2\pi i \delta(E_f - E_i) \langle f|V|i\rangle \quad (50)$$

Il primo termine dell'ultimo membro descrive il "non scattering", cioè è collegato al processo in cui la particella entrante non viene deviata. Il secondo termine è quello di scattering vero e proprio, ed è quello che analizzeremo in vari casi in questo corso.

Per capire cosa succede agli ordini successivi dello sviluppo in serie, consideriamo l'espansione:

$$\langle f|U(-\infty, \infty)|i\rangle = \langle f|i\rangle - i \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle f|e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t}|i\rangle - \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^t \langle f|dt' e^{iH_0 t} V e^{-iH_0(t-t')} V e^{-iH_0 t'}|i\rangle + \dots \quad (51)$$

dove i puntini indicano ordini superiori in  $H_I$ . Per dare un significato all'ultimo integrale, occorre fare la sostituzione  $V \rightarrow V e^{-\varepsilon|t|}$  (spegnimento adiabatico) e dopo aver traslato  $\tau = t - t'$  si ottiene:

$$- \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(E_i - E_f)t} \int_0^{\infty} d\tau \langle f|V e^{i(E_f - H_0 + i\varepsilon)\tau} V|i\rangle = -2\pi i \delta(E_f - E_i) \langle f|V \frac{1}{E_f - H_0 + i\varepsilon} V|i\rangle \quad (52)$$

Procedendo in maniera analoga per gli ordini successivi della teoria delle perturbazioni, è possibile mostrare che la matrice  $S$  soddisfa l'equazione ricorsiva (detta di Lippmann-Schwinger):

$$\boxed{S = 1 - 2\pi i T \delta(E_f - E_i) \quad T = V + V G_0 T \quad G_0 = \frac{1}{E_f - H_0 + i\varepsilon}} \quad (53)$$

Per finire, nel caso di scattering relativistico si usa spesso una *densità* di potenziale, per cui nelle ampiezze compare la quantità:  $\int d^3\mathbf{x} V$  al posto di  $V$  nella (50). In teoria dei campi, le formule sopra valgono ancora, solo che si passa a una densità di Lagrangiana. Nella (51) bisogna fare la sostituzione  $V \rightarrow V(\mathbf{x}) = \exp(i\mathbf{p}\mathbf{x}) V(\mathbf{0}) \exp(-i\mathbf{p}\mathbf{x})$ ; occorre quindi integrare anche su  $\mathbf{x}$ . Inoltre normalmente  $L_I = -H_I$  per cui:

$$U(-\infty, \infty) = T \left\{ \exp \int i L_I(\mathbf{x}) d^4x \right\} \quad L_I(\mathbf{x}) = e^{iP\mathbf{x}} L_I(0) e^{-iP\mathbf{x}} \quad (54)$$

Siccome siamo in rappresentazione di interazione,  $L_I$  è funzione degli operatori di campo in evoluzione libera. Gli operatori  $P_\mu$  di traslazioni spazio-temporali sono definiti da:

$$P_\mu = \int d^4k \delta(k^2 - m^2) k_\mu a^\dagger(\mathbf{k}) a(\mathbf{k}) \quad (55)$$

Gli stati iniziali e finali sono liberi, quindi in rappresentazione di Heisenberg non hanno evoluzione temporale:

$$\langle x|i\rangle = \langle x|a_{\mathbf{p}_i}^\dagger|0\rangle = (\mathbf{p}_i^2 + m^2)^{\frac{1}{4}} e^{i\mathbf{p}_i \mathbf{x}} \quad \langle f|i\rangle = \int d^3\mathbf{x} \langle f|\mathbf{x}\rangle \langle \mathbf{x}|i\rangle = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \delta^3(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f) \quad (56)$$

che si poteva anche ricavare da:

$$\langle f|i\rangle = \langle a_{\mathbf{p}_f} | a_{\mathbf{p}_i}^\dagger \rangle \quad \langle a_{\mathbf{p}}^\dagger | = |a_{\mathbf{p}}\rangle = 0 \quad [a(\mathbf{p}), a^\dagger(\mathbf{k})] = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \quad (57)$$

Un esempio semplice:

$$L = \frac{\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi}{2} - \frac{\lambda}{4} \phi^4 \quad \phi_0(x) = \int d^4 k \delta(k^2) (a_k e^{ikx} + a_k^\dagger e^{-ikx}) \quad \square \phi_0 = 0 \quad (58)$$

E' facile verificare che:

$$[P_\mu, a_{\mathbf{k}}] = k_\mu a_{\mathbf{k}} \Rightarrow e^{iPx} a_{\mathbf{k}} e^{-iPx} = a_{\mathbf{k}} e^{ikx} \Rightarrow e^{iPx} \phi_0(0) e^{-iPx} = \phi_0(x) \quad P^\mu |i\rangle = p_i^\mu |i\rangle \quad (59)$$

Vediamo ora i primi ordini della (54). Considero un processo  $p_1, p_2 \rightarrow p_3, p_4$ , con  $p_i = p_1 + p_2, p_f = p_3 + p_4$ . Il primo termine è banale; usando le regole di commutazione (117) si ottiene:

$$\langle f|i\rangle = \langle 0|a_{\mathbf{p}_1} a_{\mathbf{p}_2} |a_{\mathbf{p}_3}^\dagger a_{\mathbf{p}_4}^\dagger |0\rangle \equiv \langle a_1 a_2 a_3^\dagger a_4^\dagger \rangle = E_1 E_2 [\delta^3(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_1) \delta^3(\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_2) + \delta^3(\mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2) \delta^3(\mathbf{p}_4 - \mathbf{p}_1)] \quad (60)$$

che corrisponde ai 2 processi in cui non c'è interazione. Il secondo termine è:

$$i \int d^4 x \langle f|e^{iPx} L_I(0) e^{-iPx} |i\rangle = i(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \langle f|L_I(0)|i\rangle = i(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \langle f| \left[ \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{k_0} (a_{\mathbf{k}} + a_{\mathbf{k}}^\dagger) \right]^4 |i\rangle \quad (61)$$

Qui nascono i problemi perchè compaiono operatori come  $a_k a_k^\dagger$  che sono mal definiti. Ad esempio:

$$\langle 0|\phi^2(0)|0\rangle = \int \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{E_1} \frac{d^3 \mathbf{k}_2}{E_2} \langle (a_{k_1} + a_{k_1}^\dagger)(a_{k_2} + a_{k_2}^\dagger) \rangle = \int \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{E_1} \frac{d^3 \mathbf{k}_2}{E_2} \langle a_{k_1} a_{k_2}^\dagger \rangle = \int \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{E_1} = \infty \quad (62)$$

Si definisce allora il normal ordering tale che gli operatori tipo  $a$  compaiono sempre a destra e quelli tipo  $a^\dagger$  a sinistra:

$$\langle 0|:\phi^2(0):|0\rangle = \int \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{E_1} \frac{d^3 \mathbf{k}_2}{E_2} \langle (a_{k_1} + a_{k_1}^\dagger)(a_{k_2} + a_{k_2}^\dagger) : \rangle = \int \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{E_1} \frac{d^3 \mathbf{k}_2}{E_2} \langle a_{k_1} a_{k_2} + a_{k_2}^\dagger a_{k_1} + a_{k_1}^\dagger a_{k_2} + a_{k_1}^\dagger a_{k_2}^\dagger \rangle = 0 \quad (63)$$

Adesso possiamo calcolare il secondo pezzo della (54). Notare che anche qui il normal ordering è essenziale, altrimenti avrei della roba tipo  $(d[k] = d^3 k/k_0)$ :

$$\int d[k]_1 d[k]_2 d[k]_3 d[k]_4 \langle a_{p_1} a_{p_2} |a_{k_1}^\dagger a_{k_3}^\dagger a_{k_2}^\dagger a_{k_4} |a_{p_3}^\dagger a_{p_4}^\dagger \rangle = \delta^3(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_3) \int d[k]_2 + \dots = \infty \quad (64)$$

Invece a causa del N-order l'unico pezzo diverso da zero\* è:

$$\langle a_{p_1} a_{p_2} |:\phi^4(0):|a_{p_3}^\dagger a_{p_4}^\dagger \rangle = \int d[k]_1 d[k]_2 d[k]_3 d[k]_4 \langle a_{p_1} a_{p_2} a_{k_1}^\dagger a_{k_2}^\dagger a_{k_3} a_{k_4} a_{p_3}^\dagger a_{p_4}^\dagger \rangle = \int d^3 \mathbf{k}_1 d^3 \mathbf{k}_2 d^3 \mathbf{k}_3 d^3 \mathbf{k}_4 \quad (65)$$

$$\{[\delta^3(\mathbf{p}_1 - \mathbf{k}_1) \delta^3(\mathbf{p}_2 - \mathbf{k}_2) + \delta^3(\mathbf{p}_1 - \mathbf{k}_2) \delta^3(\mathbf{p}_2 - \mathbf{k}_1)][\delta^3(\mathbf{p}_3 - \mathbf{k}_3) \delta^3(\mathbf{p}_4 - \mathbf{k}_4) + \delta^3(\mathbf{p}_3 - \mathbf{k}_4) \delta^3(\mathbf{p}_4 - \mathbf{k}_3)]\} = 4 \quad (66)$$

Si ottiene infine:

$$\langle f|i \int d^4 x L_I(x) |i\rangle = -i(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \frac{\lambda}{4} \langle f|:\phi^4(0):|i\rangle = -i(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \lambda \quad (67)$$

Il termine successivo della (54) è

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{4}\right)^2 \int d^4 x d^4 y \langle f|T[:\phi^4(x)::\phi^4(y):]|i\rangle = i(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{4}\right)^2 \int d^4 z \langle f|T[:\phi^4(z)::\phi^4(0):]|i\rangle \quad (68)$$

dove ho usato il fatto che  $\phi^4(x) = \exp(iPy)\phi^4(x-y)\exp(-iPy)$ ,  $\exp(-iPy)\phi^4(y) = \phi^4(y)\exp(-iPy)$  e dove ho ribattezzato  $z = x - y$ . Per calcolare questa espressione occorre usare il teorema di Wick:

$$T\{N[A(x_1)B(x_1)\dots] N[A(x_2)B(x_2)\dots] \dots N[A(x_n)B(x_n)\dots]\} = \sum_i N[i \text{ contrazioni, no e.t.}] \quad (69)$$

dove il secondo membro significa che fissato  $i = 3$  ad esempio, bisogna sommare su tutte i possibili termini con 3 contrazioni ma senza contrarre a tempi uguali, cioè senza contrarre all'interno di ogni gruppo N-ordinato. I casi più semplici sono facili da verificare:

$$T\{A(x_1)B(x_2)\} = N[A(x_1)B(x_2)] + \langle T\{A(x_1)B(x_2)\} \rangle \quad (70)$$

$$T\{N[A^2(x_1)]B(x_2)\} = N[A^2(x_1)B(x_2)] + 2 A(x_1) \langle T\{A(x_1)B(x_2)\} \rangle \quad (71)$$

\*i pezzi del tipo  $a_k a_k a_k a_k^\dagger$  eccetera danno zero: per avere roba non nulla occorrono due  $a_k$  e due  $a_k^\dagger$ .

Nel nostro caso, la matrice S connessa è generata solo dai termini con due contrazioni

$$\int d^4 z \langle f | T[ : \phi^4(z) :: \phi^4(0) : ] | i \rangle \supset \int d^4 z \Delta^2(z) \langle f | : \phi^2(z) \phi^2(0) : | i \rangle \quad (72)$$

$$= \int d^4 z d^4 k_1 d^4 k_2 e^{ip_1 z} e^{ip_2 z} \frac{e^{-ik_1 z}}{k_1^2 + i\varepsilon} \frac{e^{-ik_2 z}}{k_2^2 + i\varepsilon} = (2\pi)^4 \int d^4 k \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(p_1 + p_2 - k)^2 + i\varepsilon} \quad (73)$$

dove il propagatore è:

$$\Delta(x) \equiv \langle T\{\phi(x)\phi(0)\} \rangle = \int d^4 k \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} e^{-ikx} \quad (74)$$

## 4 Regola d'oro di Fermi; spazio delle fasi

### 4.1 La regola di Fermi nel caso non relativistico

Una applicazione diretta della (50) per ottenere quantità fisiche si scontra subito col fatto che le probabilità di transizione si ottengono dal modulo quadro dell'ampiezza, che a sua volta contiene una  $\delta(E_f - E_i)$ . Che significato dare ad una espressione come  $[\delta(E_f - E_i)]^2$ ? Uso qui un trucco matematico, detto “spegnimento adiabatico del potenziale”, che consiste nella sostituzione  $V \rightarrow V e^{-\epsilon|t|}$ ,  $\epsilon > 0$ . Dal punto di vista fisico, la giustificazione sta nel fatto che il potenziale  $V(\mathbf{x})$  responsabile del decadimento non può essere diverso da zero per tempi arbitrariamente lunghi. Il tempo fisico di interazione è qui  $T \sim \frac{1}{\epsilon}$ . Alla fine dei calcoli si fa di nuovo il limite  $\epsilon \rightarrow 0$ . Dalla (50) la probabilità di transizione dallo stato iniziale a quello finale è ( $\Delta \equiv E_f - E_i$ ):

$$|\int_{-\infty}^{\infty} \langle f | V | i \rangle e^{-\epsilon|t|} e^{i\Delta t} dt|^2 = |\langle f | V | i \rangle|^2 \left| \frac{i}{\Delta + i\epsilon} - \frac{i}{\Delta - i\epsilon} \right|^2 = |\langle f | V | i \rangle|^2 \left( \frac{2\epsilon}{\Delta^2 + \epsilon^2} \right)^2 \rightarrow 2\pi T \delta(E_f - E_i) |\langle f | V | i \rangle|^2 \quad (75)$$

Notare che come regola mnemonica si passa dalla (50) alla (75) con la sostituzione  $\delta^2(E_f - E_i) = \frac{T}{2\pi} \delta(E_f - E_i)$ . L'ultimo passaggio necessita di qualche commento. Si è utilizzato:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{4}{(x^2 + 1)^2} dx = 2\pi \quad \Rightarrow \quad \left( \frac{2\epsilon}{\Delta^2 + \epsilon^2} \right)^2 \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} 2\pi \delta(E_f - E_i) \quad (76)$$

Per ottenere dalla (75) il risultato finale bisogna ricordare che la quantità fisicamente rilevante è la probabilità di transizione per unità di tempo; si pensi ad esempio a un decadimento radiativo in cui si misura il “rate”, cioè il numero di decadimenti al secondo ad esempio. Dividendo per  $T$  si ottiene quindi:

$$d\omega_{fi} = 2\pi \delta(E_f - E_i) |\langle f | V | i \rangle|^2 \quad (\text{probabilità di transizione } i \rightarrow f \text{ per unità di tempo}) \quad (77)$$

Come primo esempio concreto di applicazione consideriamo il decadimento radiativo di un nucleo: il nucleo nello stato iniziale  $|i\rangle$  di energia iniziale  $E_i$  emette una particella con energia  $\delta E$  decadendo nello stato  $|f\rangle$ ; trascuriamo per ora il rinculo del nucleo. La particella emessa finale è un'onda piana nel continuo  $\sim e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}$ . Tuttavia, in maniera analoga a quanto fatto per la variabile tempo, consideriamo un volume di interazione finito  $L^3$ , facendo alla fine il limite  $L \rightarrow \infty$ . Gli impulsi sono allora quantizzati:

$$\mathbf{p}_i^n = \frac{2\pi}{L} n; \quad n = 0, 1, 2, \dots; \quad i = 1, 2, 3 \quad (78)$$

Per ottenere una quantità fisica dalla (77) consideriamo la probabilità che il sistema faccia una transizione a un piccolo gruppo di stati raggruppati intorno a un dato stato  $|\bar{\mathbf{p}}\rangle$ . Il numero di stati in un piccolo volume  $d^3\mathbf{p}$  intorno a  $|\bar{\mathbf{p}}\rangle$  (spazio delle fasi) è  $d\phi_{\mathbf{p}} = \frac{L^3}{(2\pi)^3} d^3\mathbf{p}$ . Si ottiene

$$d\Gamma = d\omega d\phi_{\mathbf{p}} = 2\pi \delta(E_f - E_i) |\langle f | V | i \rangle|^2 \frac{L^3}{(2\pi)^3} d^3\mathbf{p}_f \quad (79)$$

Per scrivere tutto in funzione della variabile energia, usiamo il fatto che per una particella non relativistica  $E_f = \frac{|\mathbf{p}_f|^2}{2m}$  per cui  $|\mathbf{p}_f| d|\mathbf{p}_f| = m dE_f$  e che  $d^3\mathbf{p}_f = |\mathbf{p}_f|^2 d\Omega_f d|\mathbf{p}_f|$ . Inoltre, il fattore  $L^3$  che compare nella (79) scompare dall'espressione finale per il fatto che gli stati sono normalizzati a probabilità 1 nel volume  $L^3$ , cioè  $f_{\mathbf{p}_f}(\mathbf{x}) = \frac{e^{-i\mathbf{p}_f \mathbf{x}}}{\sqrt{L^3}}$  e quindi  $|\langle f | V | i \rangle|^2 \propto \frac{1}{L^3}$ . Se rinormalizziamo gli stati finali  $f_{\mathbf{p}_f}(\mathbf{x}) \rightarrow e^{-i\mathbf{p}_f \mathbf{x}}$  otteniamo infine:

$$d\Gamma = |\langle f | V | i \rangle|^2 \sqrt{2mE_f} \frac{m}{4\pi^2} d\Omega_f = |\langle f | V | i \rangle|^2 \rho(E_f) \quad (\text{regola d'oro di Fermi}) \quad (80)$$

L'espressione  $\rho(E_f)$  è detta densità di stati e dipende dalla *regola di dispersione*, cioè dalla funzione  $E_f(|\mathbf{p}_f|)$ . Nel caso in questione lo stato finale è una particella libera non relativistica e la densità di stati assume la forma data in (80). Più in generale, nota la regola di dispersione si può trovare la densità di stati seguendo i passi qui descritti; esempi rilevanti di stati finali interagenti si trovano ad esempio in fisica dello stato solido e in fisica nucleare. Il significato fisico è che un numero iniziale  $N_0$  di particelle diventa al tempo  $t$   $N(t) = N_0 e^{-\frac{t}{\tau}}$  dove la vita media è  $\tau = \frac{1}{\Gamma}$ .

## 4.2 Caso relativistico; sezioni d'urto e decadimenti

Notiamo preliminarmente che le espressioni (50,77) e successive, ricavate al primo ordine perturbativo, sono valide a tutti gli ordini se invece che arrestarci al primo, continuiamo l'espansione della matrice  $S_{fi} \equiv \langle f | \mathcal{U}_I(-\infty, \infty) | i \rangle$  secondo la (49). Ad esempio la (53) diventa:

$$S_{fi} = \delta_{fi} - 2\pi i \delta(E_f - E_i) \mathcal{A}_{fi} \quad (81)$$

avendo definito l'ampiezza  $\mathcal{A}_{fi} = \langle f | T | i \rangle$  ottenuta dall'espansione a tutti gli ordini della matrice  $\mathcal{S}$ .

Dobbiamo a questo punto dare significato fisico alla (81), in modo da poter calcolare quantità osservabili. Il primo passo è quello di normalizzare correttamente le funzioni d'onda. Considerando per semplicità le particelle scalari, si ha:

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{L^3}} e^{-ipx} \rightarrow \rho = i(\phi^* \overleftrightarrow{\partial}_t \phi) = \frac{2E}{L^3} \quad ; \quad N = \int_{L^3} \rho d^3x = 2E \quad (82)$$

Cioè normalizzando la funzione d'onda come nella (82) il numero di particelle  $N$  nel volume  $L^3$  risulta essere  $2E^*$ . Questa normalizzazione è in accordo col fatto che  $\rho$  è la componente tempo di un quadrivettore, ed è chiamata perciò normalizzazione covariante. In accordo con questa normalizzazione, dobbiamo cambiare lo spazio delle fasi finali che appare in (79): siccome ci sono  $2E$  particelle nel volume, per ogni particella è disponibile una frazione  $\frac{1}{2E}$ :

$$d\text{Lips} = \Pi_f \frac{L^3}{2E_f (2\pi)^3} d^3p_f \quad (\text{Lips=Lorentz invariant phase space}) \quad (83)$$

Consideriamo ora un esperimento in cui una particella, ad esempio a riposo, decade in due o più particelle nucleari. Esempi di tale tipo sono i decadimenti atomici, quelli nucleari (decadimenti  $\beta$  ecc.), e i decadimenti di fisica delle particelle nei quali si possono creare particelle non presenti inizialmente:  $Z \rightarrow e^+ e^-$ ,  $\mu^- \rightarrow \nu_\mu e^- \bar{\nu}_e$  e via dicendo. per ottenere la probabilità di decadimento nell'unità di tempo devo dividere la (77) anche per  $2E_i$  per normalizzare tale probabilità ad una particella iniziale. Tenendo conto della (83) otteniamo:

$$d\Gamma = \frac{1}{2E_i} 2\pi \delta(E_f - E_i) |\langle f | \mathcal{A} | i \rangle|^2 \Pi_f \frac{L^3}{2E_f (2\pi)^3} d^3p_f \quad (84)$$

Adesso occorre ricordare che l'ampiezza che appare nella (84) è una *densità* e che la dipendenza spaziale degli stati finali e iniziali, che sono onde piane, è  $\sim e^{i\mathbf{p}\mathbf{x}}$ . Indicando  $P_i = \sum_i p_i$ ,  $P_f = \sum_f p_f$  si ha:

$$\langle f | \mathcal{A} | i \rangle \rightarrow \int d^3x e^{-i\mathbf{P}_i \mathbf{x}} e^{i\mathbf{P}_f \mathbf{x}} \langle f | \mathcal{A} | i \rangle = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{P}_f - \mathbf{P}_i) \langle f | \mathcal{A} | i \rangle \quad (85)$$

$$|(2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{P}_f - \mathbf{P}_i) \langle f | \mathcal{A} | i \rangle|^2 = (2\pi)^3 L^3 \delta^3(\mathbf{P}_f - \mathbf{P}_i) |\langle f | \mathcal{A} | i \rangle|^2 \quad (86)$$

dove l'ultimo passaggio è effettuato in analogia a quanto visto per la  $\delta(E_f - E_i)$ . Mettendo insieme le (84,85,86) e dopo aver, di nuovo, fatto il passaggio  $\frac{1}{\sqrt{L^3}} e^{-ipx} \rightarrow e^{-ipx}$  si ottiene infine:

$$\boxed{d\Gamma = \frac{1}{2E_i} |\mathcal{A}_{fi}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \Pi_f \frac{d^3p_f}{2E_f (2\pi)^3}} \quad (87)$$

Un'altra tipica situazione sperimentale è quella in cui si osserva la diffusione (scattering) di  $n_i = 2$  particelle iniziali in  $n_f \geq 2$  particelle finali. L'osservabile in questo caso è la sezione d'urto, definita come numero di particelle diffuse nell'unità di tempo diviso per il flusso iniziale di particelle. Poiché il flusso ha dimensioni  $[I] = [L]^{-2} [T]^{-1}$ , la sezione d'urto ha dimensioni di un'area ( $eV^{-2}$  in unità naturali).

L'espressione per la sezione d'urto  $P_i = p_1 + p_2 \rightarrow P_f = \sum_f p_f$  si ottiene in maniera analoga a quella per la larghezza  $\Gamma$ . Mettiamo per comodità in un sistema di riferimento in cui la particella 1 (fascio) va a sbattere contro la particella 2 inizialmente ferma (bersaglio); questo è detto sistema di riferimento del laboratorio. Oltre al fattore  $2E_2$

\*notare la differenza con la MQ nella quale avrei  $N = \int_{L^3} \phi^* \phi = 1$

già presente nella  $\Gamma$ , necessario per riferirsi a una singola particella bersaglio, occorre dividere per il flusso  $\rho v_r$ , dove  $v_r$  è la velocità del fascio (particella 1) e  $\rho = \frac{2E_1}{L^3}$ . Si ottiene:

$$d\sigma = \frac{L^3}{v_r 2E_1 2E_2} (2\pi)^4 L^3 \delta^4(P_f - P_i) |\langle f|A|i \rangle|^2 \Pi_f \frac{L^3}{2E_f (2\pi)^3} d^3 p_f \quad (88)$$

Di nuovo, i fattori di  $L^3$  vengono “mangiati” con la sostituzione  $\frac{1}{\sqrt{L^3}} e^{-ipx} \rightarrow e^{-ipx}$ . Inoltre,  $v_r 2E_1 2E_2 = \frac{|\mathbf{p}_1|}{E_1} 2E_1 2E_2 = 4|\mathbf{p}_1|E_2$ . Infine, possiamo dare una espressione covariante a vista al flusso:  $I = 4\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}$ . E’ facile rendersi conto che, ad esempio nel sistema del lab., questa espressione coincide con quella  $I = 4|\mathbf{p}_1|E_2$  data in precedenza. In definitiva la sezione d’urto si scrive:

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{A}_{fi}|^2}{I} d\text{Lips} \quad d\text{Lips} = (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \Pi_f \frac{d^3 p_f}{2E_f (2\pi)^3} \quad I = 4E_1 E_2 = 4\sqrt{(p_1 p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} \quad (89)$$

Le (87,89) sono le formule di base per ricavare larghezza  $\Gamma$  e sezione d’urto  $\sigma$ . Nei prossimi paragrafi vedremo alcuni esempi di calcolo di ampiezze  $\mathcal{A}_{fi}$  in diversi casi fisici.

## 5 Lagrangiana di QCD

E’ bene ricordare un pò di algebra di  $SU(N)$ . Fra le rappresentazioni del gruppo è particolarmente importante la fondamentale, formata da matrici  $N \times N$   $U(\theta) = \exp i\theta^a \tau_a$  dove  $\tau_a$  sono  $N^2 - 1$  matrici hermitiane che soddisfano  $[\tau_a, \tau_b] = i f_{abc} \tau_c$  con  $f_{abc}$  costanti di struttura reali. La normalizzazione delle  $\tau_a$ , e quindi quella delle  $f_{abc}$ , è arbitraria e viene normalmente fissata da  $\text{Tr}\{\tau_a \tau_b\} = \frac{1}{2} \delta_{ab}$ .

Dalle equazioni sopra si trova  $f_{abc} = -2i \text{Tr}\{\tau_a, \tau_b\} \tau_c = -4i \text{Tr}\{\tau_a \tau_b \tau_c\}$  e quindi  $f_{abc}$  è antisimmetrico in tutti gli indici. Il Casimiro  $\tau^2 = \sum \tau^a \tau^a$  commuta con tutte le  $\tau$  ed è quindi proporzionale all’identità; la costante di proporzionalità si trova facendo la traccia e risulta  $\sum \tau^a \tau^a \equiv C_F = \frac{N^2 - 1}{2N}$ . Esiste una Fierz-identity fondamentale, che deriva dal fatto che le  $N^2 - 1$  matrici  $\tau_a$  più l’identità sono una base per le matrici hermitiane  $N \times N$  con prodotto scalare dato dalla traccia:

$$H = \sum C^a \tau^a + C^0 \Rightarrow C^0 = \frac{\text{Tr}\{H\}}{N}, C^a = 2\text{Tr}\{H \tau^a\} \Rightarrow 2\tau_{\alpha\beta}^a \tau_{\delta\gamma}^a = \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} - \frac{1}{N} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\delta\gamma} \quad (90)$$

Da questa si ricava facilmente:

$$\text{Tr}\{\tau^a \tau^b \tau^a \tau^b\} = \frac{1}{4} (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} - \frac{1}{N} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\delta\gamma}) (\delta_{\beta\alpha} \delta_{\delta\gamma} - \frac{1}{N} \delta_{\beta\delta} \delta_{\gamma\alpha}) = -\frac{1}{4} \left( \frac{N^2 - 1}{N} \right) \quad (91)$$

La rappresentazione aggiunta è definita da  $U(\theta) A^a \tau^a U^{-1}(\theta) = A'_a \tau_a$  e a livello infinitesimo  $\delta A^a = f_{abc} \theta_b A_c$  da cui segue che  $A' = \exp i T_a \theta_a A$  con  $T_{bc}^a = i f_{abc}$  generatori del gruppo nella rappresentazione aggiunta.  $T^a$  sono quindi  $N^2 - 1$  matrici  $(N^2 - 1) \times (N^2 - 1)$ . Per trovare il Casimiro nell’aggiunta si può usare il fatto che  $T_{bc}^a T_{cd}^a = f^{abc} f^{adc} = C_A \delta_{bc} \Rightarrow (N^2 - 1) C_A = f^{abc} f^{abc}$ ; il valore di  $f^{abc} f^{abc}$  si può trovare dalle formule precedenti:

$$\underbrace{\text{Tr}\{\tau^a \tau^b \tau^a \tau^b\}}_{-\frac{N^2 - 1}{4N}} = \underbrace{\text{Tr}\{\tau^b \tau^a \tau^a \tau^b\}}_{\frac{(N^2 - 1)^2}{4N}} + i f^{abc} \underbrace{\text{Tr}\{\tau^c \tau^a \tau^b\}}_{\frac{i f^{abc}}{4}} \Rightarrow f^{abc} f^{abc} = N(N^2 - 1) \Rightarrow C_A = N \quad (92)$$

A questo punto si possono dare anche le rappresentazioni esplicite “standard”:

Fondamentale e aggiunta di  $SU(2)$  con  $f^{abc} = \varepsilon^{abc}$  :

$$\tau_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (93)$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad T_3 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (94)$$

Fondamentale di  $SU(3)$  con  $f_{123} = 1, f_{345} = f_{147} = f_{246} = f_{257} = \frac{1}{2}, f_{367} = f_{156} = -\frac{1}{2}, f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ :

$$\tau_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (95)$$

$$\tau_5 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_6 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_7 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_8 = \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (96)$$

con le 8 matrici 8x8 della aggiunta date da  $T_{bc}^a = if^{abc}$ . Si verifica esplicitamente che  $f_{SU(2)}^{abc} f_{SU(2)}^{abc} = \varepsilon^{abc} \varepsilon^{abc} = 6$  e che  $f_{SU(3)}^{abc} f_{SU(3)}^{abc} = 24$  in accordo con la formula generale  $f_{SU(N)}^{abc} f_{SU(N)}^{abc} = N(N^2 - 1)$ .

La Lagrangiana di QCD è un caso particolare di teoria di Yang Mills, cioè un tipo di teoria con invarianza locale  $SU(N)$ . Per ottenere una Lagrangiana con invarianza locale, partiamo da una generica Lagrangiana con invarianza globale  $SU(N)$ :

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad \phi' = U\phi, U = \exp[i\alpha^a T^a] \quad \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \mathcal{L}(\phi', \partial_\mu \phi') \quad (97)$$

Se adesso rendiamo la trasformazione locale,  $\alpha^a \rightarrow \alpha^a(x)$ , la Lagrangiana non è più in generale invariante. Per renderla invariante localmente introduciamo N campi di gauge vettoriali  $A_\mu^a, a = 1 \dots N$ :

$$\mathbf{A}_\mu \equiv A_\mu^a T^a \quad U = \exp[i\alpha^a(x) T^a] \quad \mathbf{A}'_\mu = U \mathbf{A}_\mu U^{-1} + \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^{-1} \quad (98)$$

dove  $g$  è una costante cui daremo il significato di costante di accoppiamento. Definiamo la derivata covariante:

$$\mathbf{D}_\mu = \partial_\mu - ig \mathbf{A}_\mu \quad (99)$$

che ha, diversamente dalla derivata semplice, una “buona” proprietà di trasformazione sotto gauge, nel senso che

$$\mathbf{D}_\mu \phi \rightarrow U \mathbf{D}_\mu \phi \quad (100)$$

o equivalentemente, dato che  $\phi \rightarrow U\phi$ , si può scrivere anche  $\mathbf{D}_\mu \rightarrow U \mathbf{D}_\mu U^{-1}$ . Da quanto detto è facile constatare che la seguente lagrangiana è localmente invariante sotto  $SU(N)$ :

$$\mathcal{L}_{YM} = \mathcal{L}(\phi, D_\mu \phi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \quad (101)$$

avendo definito:

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T^a = \frac{1}{ig} [\mathbf{D}_\mu, \mathbf{D}_\nu] \Rightarrow F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \propto \text{Tr}\{\mathbf{F}_{\mu\nu} \mathbf{F}^{\mu\nu}\} \quad (102)$$

La Lagrangiana di QCD è un caso particolare con  $N=3$ :

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_{f=u,d,s,\dots} i \bar{\psi}_f \mathbf{D}_\mu \psi_f - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \quad (103)$$

A questa vanno aggiunti i termini di gauge fixing, di massa dei quarks ed i ghosts. Il termine di gauge fixing è indispensabile per risolvere un'ambiguità nella definizione del propagatore. In effetti se consideriamo un campo vettore accoppiato con una corrente,  $\mathcal{L} = -1/4 F^2 + jA$ , le equazioni del moto:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \Rightarrow \partial_\mu \partial^\mu A_\nu - \partial_\mu \partial^\nu A_\mu = j_\nu \quad (104)$$

si scrivono in trasformata di Fourier:

$$(-k^2 g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu) A^\mu = j_\nu \quad (105)$$

La corrispondente funzione di Green soddisfa, per definizione:

$$A_\mu = G_{\mu\nu} j^\nu \Rightarrow (-k^2 g_{\mu\alpha} + k_\mu k_\alpha) G^{\alpha\nu} = g_\mu^\nu \quad (106)$$

Ma quest'ultima equazione non ha soluzione, come si vede dal fatto che  $(-k^2 g_{\mu\alpha} + k_\mu k_\alpha) k^\alpha = 0$ , che è collegato all'invarianza di gauge. Per risolvere questa ambiguità si può ad esempio aggiungere alla Lagrangiana un termine  $\frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu)^2$  ( $\xi$ -gauge). In questo modo le equazioni del moto cambiano e il propagatore soddisfa:

$$\left( -k^2 g_{\mu\alpha} + k_\mu k_\alpha \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) \right) G^{\alpha\nu} = g_\mu^\nu \Rightarrow G_{\mu\nu} = \frac{1}{k^2} \left( (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} - g_{\mu\nu} \right) \quad (107)$$

Una delle scelte più comuni è la gauge di Feynman  $\xi=1$ .

## 6 Sezione d'urto per diffusione elastica $ut \rightarrow ut$

Gli ingredienti necessari per calcolare la sezione d'urto sono

- Regole di Feynman
- Espressione per lo spazio delle fasi
- Modulo quadro dell'ampiezza

Lo spazio delle fasi per uno stato finale di due particelle si scrive:

$$d\text{Lips} = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{d^3 p_3}{2E_3(2\pi)^3} \frac{d^3 p_4}{2E_4(2\pi)^3} = \frac{1}{(2\pi)^2} \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) \frac{d^3 p_3}{4E_3 E_4} \Big|_{\mathbf{p}_4 = \mathbf{p}_3 - \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1} \quad (108)$$

dove ho eliminato l'integrale in  $d^3 p_4$  tenendo conto del fatto che la  $\delta^3$  implica la conservazione del triimpulso. Per valutare questa espressione mettiamoci ora nel sistema del centro di massa, nel quale si ha:

$$p_1 = (E_1, \mathbf{p}) \quad p_2 = (E_2, -\mathbf{p}) \quad p_3 = (E_3, \mathbf{p}') \quad p_4 = (E_4, -\mathbf{p}') \quad p_1^2 = p_3^2 = m_1^2 \quad p_2^2 = p_4^2 = m_2^2 \quad (109)$$

la Quantità  $E_1 + E_2$  si indica di solito con  $\sqrt{s}$  ed è la massa invariante delle 2 particelle iniziali:  $s = (p_1 + p_2)^2$ . Nel sistema del centro di massa si ha

$$\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}', E_3 = \sqrt{|\mathbf{p}'|^2 + m_1^2}, E_4 = \sqrt{|\mathbf{p}'|^2 + m_2^2} \quad d^3 p' = |\mathbf{p}'|^2 d|\mathbf{p}'| d\Omega$$

Adesso, ricordandosi che  $\delta(f(x)) = 1/f'(x_0)\delta(x - x_0)$  con  $f(x_0) = 0$  si ottiene:

$$d^3 p' \delta(E_3(|\mathbf{p}'|) + E_4(|\mathbf{p}'|) - \sqrt{s}) = |\mathbf{p}'|^2 d|\mathbf{p}'| d\Omega \frac{1}{\frac{|\mathbf{p}'|}{E_3} + \frac{|\mathbf{p}'|}{E_4}} = |\mathbf{p}'| \frac{E_3 E_4}{E_3 + E_4} d\Omega \Big|_{E_3 + E_4 = \sqrt{s}} = |\mathbf{p}'| \frac{E_3 E_4}{\sqrt{s}} d\Omega \quad (110)$$

Infine, la conservazione del triimpulso è tenuta automaticamente in conto nella (109), mentre la conservazione dell'energia dà:

$$\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_1^2} + \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_2^2} = \sqrt{\mathbf{p}'^2 + m_1^2} + \sqrt{\mathbf{p}'^2 + m_2^2} \Rightarrow |\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'| \quad (111)$$

Mettendo insieme le (108,110) si ottiene l'espressione dello spazio delle fasi nel sistema del c.m.:

$$d\text{Lips} = \frac{1}{16\pi^2} \frac{|\mathbf{p}|}{\sqrt{s}} d\Omega \quad \mathbf{p} = \text{triimpulso nel c.m.} \quad \sqrt{s} = \text{energia nel c.m.} \quad (112)$$

Infine:

$$d\sigma = \frac{|A_{fi}|^2}{I} d\text{Lips} = \frac{|A_{fi}|^2}{4|\mathbf{p}|\sqrt{s}} \frac{1}{16\pi^2} \frac{|\mathbf{p}|}{\sqrt{s}} d\Omega = \frac{|A_{fi}|^2}{64\pi^2 s} d\Omega \quad (113)$$

Consideriamo adesso la sezione d'urto di scattering elastico  $u(k_1) t(p_1) \rightarrow u(k_2) t(p_2)$  con  $k_1^2 = k_2^2 = m^2, p_1^2 = p_2^2 = M^2$ , che potrebbe essere rilevante per processi misurati a LHC.

Le regole di Feynman rilevanti sono:

Utilizzando le regole di Feynman il calcolo dell'ampiezza per il processo  $u^-(k_1; s_1) t^-(p_1, r_1) \rightarrow u^-(k_2; s_2) t^-(p_2, r_2)$  dove  $k, p$  indicano gli impulsi e  $r, s$  gli spin (elicità) è piuttosto semplice:

$$\mathcal{A}_{s_1 r_1}^{s_2 r_2} = e^2 \bar{u}_{s_2}(k_2) \gamma_\mu u_{s_1}(k_1) \frac{g^{\mu\nu}}{q^2} \bar{u}_{r_2}(p_2) \gamma_\nu u_{r_1}(p_1) \quad (114)$$

Notare che si può usare  $g^{\mu\nu} \dots$

Consideriamo la sezione d'urto unpolarised, cioè mediata sugli spin iniziali e sommata su quelli finali:

$$\sum_{r_1, r_2, s_1, s_2} \frac{|A_{s_1 r_1}^{s_2 r_2}|^2}{4} = \left(\frac{e^2}{q^2}\right)^2 \frac{\text{Tr}\{(k_2 + m)\gamma_\mu (k_1 + m)\gamma_\nu\}}{2} \frac{\text{Tr}\{(p_2 + M)\gamma^\mu (p_1 + M)\gamma_\nu\}}{2} \equiv \left(\frac{e^2}{q^2}\right)^2 L_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \quad (115)$$

con  $m(M)$  massa del quark up (top). Per calcolare questa traccia utilizziamo le regole per le tracce delle matrici di Dirac:

$$\text{Tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu\} = 4g_{\mu\nu} \quad ; \quad \text{Tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma\} = 4(g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}) \quad ; \quad \text{Tr}\{\text{n. dispari di matrici } \gamma\} = 0 \quad (116)$$

Esistono poi altre identità utili che riguardano le contrazioni:

$$\gamma_\mu \gamma^\mu = 4 \quad \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\mu = -2\gamma^\alpha \quad \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu = 4g^{\alpha\beta} \quad \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta \gamma^\mu = -2\gamma^\delta \gamma^\beta \gamma^\alpha \quad (117)$$

$$\gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta \gamma^\gamma \gamma^\mu = 2(\gamma^\gamma \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta + \gamma^\delta \gamma^\beta \gamma^\alpha \gamma^\gamma) \quad (118)$$

Vediamo ora come ricavare queste regole.  $\text{Tr}\{\gamma_\mu\} = 0$  è ovvio dalla definizione (3) delle matrici  $\gamma$ . Per due matrici abbiamo  $\text{Tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu\} = \text{Tr}\left\{\frac{[\gamma_\mu, \gamma_\nu]}{2} + \frac{\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\text{Tr}\{2g_{\mu\nu}\} = 4g_{\mu\nu}$ , avendo utilizzato  $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}\mathbf{I}$  ( $\mathbf{I}$ =matrice identità). Notare che il termine di anticommutatore non contribuisce per via della proprietà di ciclicità della traccia  $\text{Tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu\} = \text{Tr}\{\gamma_\nu \gamma_\mu\}$ . Per la traccia di 3 matrici conviene utilizzare la matrice  $\gamma_5$  introdotta in (3) e che soddisfa  $\gamma_5^2 = 1, \{\gamma_5, \gamma_\nu\} = 0$ \*. Allora

$$\text{Tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho\} = \text{Tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_5^2\} = \text{Tr}\{\gamma_5 \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_5\} = -\text{Tr}\{\gamma_\mu \gamma_5 \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_5\} = -\text{Tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_5^2\} = -\text{Tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho\} \quad (119)$$

e analogamente per un numero dispari qualunque di matrici  $\gamma$ . Infine, resta da valutare la traccia di 4 matrici  $\gamma$ ; usiamo ripetutamente la regola di anticommutazione  $\gamma_\mu \gamma_\nu = -\gamma_\nu \gamma_\mu + 2g_{\mu\nu}$  (evidenzio le coppie per le quali uso questa identità):

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{\widehat{\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma}\} &= -\text{Tr}\{\gamma_\nu \widehat{\gamma_\mu \gamma_\rho \gamma_\sigma}\} + 2g_{\mu\nu} \text{Tr}\{\gamma_\rho \gamma_\sigma\} = \text{Tr}\{\gamma_\nu \gamma_\rho \widehat{\gamma_\mu \gamma_\sigma}\} - 2g_{\rho\mu} \text{Tr}\{\gamma_\nu \gamma_\sigma\} + 8g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} \\ &= -\text{Tr}\{\gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\mu\} + 8g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} - 8g_{\rho\mu} g_{\sigma\nu} + 8g_{\mu\sigma} g_{\rho\nu} \end{aligned} \quad (120)$$

da cui il risultato che appare in (116). Le contrazioni (117) sono facili da ricavare da  $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}$ .

Siamo ora in grado di calcolare la traccia relativa al tensore fermionico:

$$\text{Tr}\{\gamma_\mu(k_1 + m)\gamma_\nu(k_2 + m)\} = \text{Tr}\{\gamma_\mu k_1 \gamma_\nu k_2\} + m^2 \text{Tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu\} = 4[k_1^\mu k_2^\nu + k_1^\nu k_2^\mu - g^{\mu\nu}(k_1 k_2)] + 4m^2 g^{\mu\nu} \quad (121)$$

Un'ulteriore semplificazione deriva dal fatto che  $q^2 = (k_2 - k_1)^2 = 2m^2 - 2k_1 k_2$  per cui:

$$L^{\mu\nu} = 4[k_1^\mu k_2^\nu + k_1^\nu k_2^\mu + g^{\mu\nu} \frac{q^2}{2}] \quad M^{\mu\nu} = 4[p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu + g^{\mu\nu} \frac{q^2}{2}] \quad (122)$$

A questo punto la conservazione della corrente implica  $q_\mu L^{\mu\nu} = L^{\mu\nu} q_\nu = 0$  e sostituendo in  $M_{\mu\nu} p_2 = p_1 + q$  abbiamo

$$L_{\mu\nu} M^{\mu\nu} = 2L_{\mu\nu} [4p_1^\mu p_1^\nu + q^2 g^{\mu\nu}] = 8[(k_1 p_1)(k_2 p_2) + (k_1 p_2)(k_2 p_1) + \frac{m^2 + M^2}{2} q^2] \quad (123)$$

La media su colore e spin iniziali produce un fattore  $\frac{1}{2^2 N^2}$ , mentre il fattore di colore è  $\text{Tr}\{\tau^a \tau^b\} \text{Tr}\{\tau^a \tau^b\} = \frac{N}{4}$ . L'espressione finale della sezione d'urto risulta:

$$d\sigma = \frac{|A_{fi}|^2}{16\pi s} d\cos\theta = \frac{1}{16N} \frac{1}{16\pi s} \left(\frac{g^4}{(q^2)^2}\right) \left(8[(k_1 p_1)(k_2 p_2) + (k_1 p_2)(k_2 p_1) + \frac{m^2 + M^2}{2} q^2]\right) d\cos\theta \quad (124)$$

Consideriamo adesso per semplicità il caso  $m = M = 0$ ; nel sistema del centro di massa:

$$k_1 = E(1, \hat{k}) \quad p_1 = E(1, -\hat{k}) \quad k_2 = E(1, \hat{k}') \quad p_2 = E(1, -\hat{k}') \quad (p_1 + k_1)^2 = (p_2 + k_2)^2 \equiv s = 4E^2 \quad (125)$$

da cui si ottiene, definendo  $\hat{k} \hat{k}' \equiv \cos\theta$ :

$$L_{\mu\nu} M^{\mu\nu} = 2s^2 \left(1 + \frac{(1 + \cos\theta)^2}{4}\right) \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{1}{16N} \frac{2\pi\alpha_s^2}{s} \frac{4 + (1 + \cos\theta)^2}{(1 - \cos\theta)^2} \quad (126)$$

Notare la singolarità coulombiana a  $\theta = 0$ , per via della quale la sezione d'urto integrata diverge.

Per finire, di solito la sezione d'urto si esprime in funzione delle variabili di Mandelstam  $s, t, u$  definite da:

$$s = (k_1 + p_1)^2 \quad t = (k_1 - k_2)^2 = -\frac{s}{2}(1 - \cos\theta) \quad u = (k_1 - p_2)^2 = -\frac{s}{2}(1 + \cos\theta) \quad s + t + u = 0 \quad (127)$$

in termini delle quali:

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} = \frac{1}{16N} \frac{2\pi\alpha_s^2}{s} \frac{s^2 + u^2}{t^2} \quad (128)$$

Notare che la sezione d'urto dipende dal numero di colori  $N$ : dal confronto coi dati sperimentali si hanno informazioni sul numero di colori  $N = 3$ .

\*la matrice  $\gamma_5$  è di fondamentale importanza nella descrizione delle interazioni deboli

## 7 RGE

Schematizzando molto, si ha (l'indice 0 indica i campi "bare"):

$$(\partial A_0)^2 + \bar{\Psi}_0 \partial \Psi_0 + e_0 \bar{\Psi}_0 A_0 \Psi_0 = Z_A (\partial A)^2 + Z_\Psi \bar{\Psi} \partial \Psi + Z_e e \bar{\Psi} A \Psi \quad (129)$$

$$A_0 = \sqrt{Z_A} A ; \quad \Psi_0 = \sqrt{Z_\Psi} \Psi ; \quad e_0 = e \frac{Z_e}{\sqrt{Z_A} Z_\Psi} \quad (130)$$

In uno schema "fisico", il residuo al polo del propagatore dei campi rinormalizzati è fissato a 1 mentre  $e$  è la carica misurata a  $q^2 = 0$ . Questo fissa  $Z_A, Z_\Psi, Z_e$  anche per le parti finite.

Le RGE derivano dal fatto che certe quantità sono indipendenti dallo schema di rinormalizzazione, e in particolare dal punto di sottrazione  $\mu$ . Queste quantità sono in genere quantità "bare" oppure osservabili fisiche. Un primo esempio è dato dalla costante di accoppiamento  $\alpha$ , che si rinormalizza moltiplicativamente, cioè collegato all'accoppiamento "bare"  $\alpha_0$  tramite una costante adimensionale  $Z$  che dipende dal regolatore, ovvero ad esempio dal cutoff  $\Lambda$ , oltre che da  $\mu$ :  $\alpha(\mu) = Z_\alpha(\alpha_0, \frac{\Lambda}{\mu}) \alpha_0$ . Poichè  $\alpha_0$ , essendo appunto una quantità "bare", non dipende dal punto di sottrazione  $\mu$ , si ottiene:

$$\frac{d\alpha(\mu)}{d \log \mu} = \frac{\partial Z_\alpha(\alpha_0, \frac{\Lambda}{\mu})}{\partial \log \mu} \alpha_0 = \frac{\partial \log Z}{\partial \log \mu} \alpha(\mu) \equiv \beta(\alpha(\mu)) \quad (131)$$

Ad 1 loop è facile vedere che la  $\beta$ -function dipende solo da  $\alpha(\mu)$ . Infatti  $Z = 1 + \alpha_0 \log \frac{\Lambda}{\mu} + O(\alpha_0^2)$  e quindi  $\frac{1}{Z} \frac{\partial Z}{\partial \log \mu} = -b\alpha(\mu) + O(\alpha(\mu)^2)$  da cui  $\beta(\alpha(\mu)) = -b\alpha^2(\mu)$  e quindi  $\frac{1}{\alpha(\mu)} - \frac{1}{\alpha(\mu_0)} = b \log \frac{\mu}{\mu_0}$ . E' facile verificare che  $\alpha(\mu)$  non dipende da  $\mu_0$ , malgrado le apparenze. Al primo ordine è banale:  $\frac{d}{d\mu_0} [\frac{1}{\alpha(\mu)}] = -\frac{1}{\alpha^2(\mu_0)} \frac{d\alpha(\mu_0)}{d\mu_0} - b = 0$  in quanto  $\alpha(\mu_0)$  soddisfa la stessa RGE  $\frac{\partial \alpha(\mu_0)}{\partial \log \mu_0} = -b\alpha^2(\mu_0)$ . Più in generale a tutti gli ordini si ha:

$$\log \frac{\mu}{\mu_0} = \int_{\alpha(\mu_0)}^{\alpha(\mu)} \frac{d\alpha}{\beta(\alpha)} \Rightarrow \left( \frac{d\alpha(\mu)}{d \log \mu_0} - \frac{d\alpha(\mu_0)}{d \log \mu_0} \right) \frac{1}{\beta(\alpha(\mu_0))} = -1 \Rightarrow \frac{d\alpha(\mu)}{d \log \mu_0} = -\beta(\alpha(\mu_0)) + \frac{d\alpha(\mu_0)}{d \log \mu_0} = 0 \quad (132)$$

Siccome  $\alpha(\mu)$  non dipende da  $\mu_0$  posso in particolare quindi posso scegliere  $\mu_0$  in maniera tale che per  $\mu_0 = \Lambda_{QCD}$  si ha  $\alpha(\Lambda_{QCD}) \rightarrow \infty$  (polo di Landau) e in questo caso l'espressione è particolarmente semplice  $\frac{1}{\alpha(\mu)} = b \log \frac{\mu}{\Lambda_{QCD}}$ . La QCD perde così a livello quantistico l'invarianza di scala che possiede classicamente.

Un altro tipo di quantità per le quali le RGE sono semplici sono le quantità che sono finite e dipendono da una sola scala, che qui chiamo  $E$ . Sono escluse quindi le quantità che presentano divergenze IR (cioè quasi tutte purtroppo, ad esempio  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$  in QED) e quelle che necessitano rinormalizzazione moltiplicativa, come operatori composti e funzioni di Green che tratto più sotto. Un esempio di tali quantità è la sezione d'urto inclusiva  $e^-e^+$  in adroni rispetto alla QCD: gli stati iniziali non sentono le interazioni forti e non necessitano rinormalizzazione, mentre la somma sugli stati finali assicura l'assenza di divergenze IR. Allora nel limite  $E \gg m$  dove  $m$  indica tutte le scale fisiche come masse dei quarks,  $\Lambda_{QCD}$  ecc, la sezione d'urto è funzione solo di  $E$  e  $\mu$ . La prima cosa che posso fare per vedere il comportamento asintotico per  $E \gg m$  è quella di riscaldare  $\sigma \rightarrow E^2 \sigma$  per considerare quantità adimensionali, che dipendono solo dal rapporto  $\frac{E}{\mu}$ :  $\sigma = \sigma[\frac{E}{\mu}, \alpha(\mu)]$ . Globalmente questa sezione d'urto non deve dipendere da  $\mu$  cioè deve essere RGE-invariante. La (132) suggerisce come costruire una quantità con questa proprietà, la costante effettiva definita da

$$\frac{\partial \bar{\alpha}[E, \alpha(\mu)]}{\partial \log E} = \beta(\bar{\alpha}[E, \alpha(\mu)]) \quad \bar{\alpha}[E = \mu, \alpha(\mu)] = \alpha(\mu) \quad \frac{d\bar{\alpha}(E, \alpha(\mu))}{d \log \mu} = 0 \quad (133)$$

dove l'ultima proprietà deriva, appunto, dalla (132). Si ha  $\alpha[E, \alpha(\mu)] = \alpha(\mu)[1 + b\alpha(\mu) \log \frac{E}{\mu}]^{-1}$  Una qualsiasi funzione della sola running coupling constant è ancora RGE invariante:

$$\frac{d\sigma[\frac{E}{\mu}, \alpha(\mu)]}{d \log \mu} = \frac{\partial \sigma}{\partial \log \mu} + \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \log \mu} = -\frac{\partial \sigma}{\partial \log E} + \beta(\alpha(\mu)) \frac{\partial \sigma}{\partial \alpha(\mu)} = 0 \Rightarrow \sigma[\frac{E}{\mu}, \alpha(\mu)] = \sigma[1, \bar{\alpha}[E, \alpha(\mu)]] \quad (134)$$

Il vantaggio di sostituire  $\sigma[\frac{E}{\mu}, \alpha(\mu)]$  con  $\sigma[1, \bar{\alpha}[E, \alpha(\mu)]]$  è che vengono risommati, nella seconda espressione, grossi logaritmi del tipo  $\log \frac{E}{\mu}$  che sono presenti in  $\sigma[\frac{E}{\mu}, \alpha(\mu)]$  ma assenti in  $\sigma[1, \bar{\alpha}[E, \alpha(\mu)]]$ , migliorando la convergenza della serie perturbativa. Notare infine che  $\bar{\alpha}[E, \alpha(\mu)]$  non è altro che  $\alpha(E)$  cioè l'accoppiamento nello schema con sottrazione a  $\mu = E$  e uno potrebbe scrivere subito:  $\frac{d}{d\mu} \sigma[\frac{E}{\mu}, \alpha(\mu)] = 0 \Rightarrow \sigma[\frac{E}{\mu}, \alpha(\mu)] = \sigma[1, \alpha(E)]$  avendo scelto appunto  $\mu = E$ . Tuttavia la running coupling constant da un punto di vista logico è una cosa un pò diversa perchè viene calcolata misurando la costante di accoppiamento ad una scala  $\mu$  e poi evolvendola fino alla scala  $E$  tramite le RGE.

Infine, ci sono quantità che necessitano rinormalizzazione per essere finite. Di nuovo, ho bisogno di considerare quantità finite, e quindi mi devo sbarazzare delle divergenze IR. Un modo è quello di considerare funzioni di Green off mass shell, ad esempio prendendo impulsi nella regione euclidea  $p^2 < 0$ . Un'altro modo è quello di considerare quantità inclusive. In questo modo, di nuovo ho solo una scala rilevante, che chiamo  $E$  e quindi per  $E \gg m$  dove  $m$  sono le altre scale, le quantità adimensionali dipendono solo da  $\frac{E}{\mu}$ . Indicata con  $\Gamma_0$  la quantità bare, divergente ma  $\mu$ -independent e con  $\Gamma_R$  la quantità rinormalizzata, finita ma  $\mu$ -dependent, per rinormalizzazione moltiplicativa si ha:

$$\Gamma_0(E, \alpha_0) = Z^{-1}\left(\frac{E}{\mu}, \alpha_0\right)\Gamma_R\left(\frac{E}{\mu}, \alpha(\mu)\right) \Rightarrow \frac{d\Gamma_R\left(\frac{E}{\mu}, \alpha(\mu)\right)}{d\log\mu} = \frac{d\log Z\left(\frac{E}{\mu}, \alpha_0\right)}{d\log\mu}\Gamma_R \equiv \gamma(\alpha(\mu))\Gamma_R\left(\frac{E}{\mu}, \alpha(\mu)\right) \quad (135)$$

Per quanto visto prima nel caso  $\gamma = 0$ , la soluzione è a questo punto piuttosto semplice:

$$\Gamma_R\left[\left(\frac{E}{\mu}, \alpha(\mu)\right)\right] = \exp\left[-\int_0^{\log\frac{E}{\mu}} \gamma[\bar{\alpha}(x, \alpha(\mu))]dx\right] \Gamma_R[1, \bar{\alpha}[E, \alpha(\mu)]] \quad (136)$$

Nel caso di teorie asintoticamente libere come la QCD lo scaling assume una forma particolarmente semplice se ci si mette ad energie asintotiche tali che  $\alpha(E) \approx 0$ . La  $\Gamma_R$  si può allora scrivere in funzione dell'espressione nella teoria libera,  $\Gamma_R^{free} = \Gamma_R(1, \bar{\alpha} = 0)$ :

$$\Gamma_R(E, \mu) = \exp\left[-\int_0^{\log\frac{E}{\mu}} \gamma[\bar{\alpha}(t)]dt\right] \Gamma_R^{free} \Rightarrow \frac{\Gamma_R(E)}{\Gamma_R(E_0)} = \exp\left[-\int_{\log\frac{E_0}{\mu}}^{\log\frac{E}{\mu}} \gamma(\bar{\alpha}(t))dt\right] \quad (137a)$$

$$= \exp\left[-\int_{\log\frac{E_0}{\mu}}^{\log\frac{E}{\mu}} d\Gamma\bar{\alpha}(t)dt\right] = \exp\left[\int_{\bar{\alpha}(E_0)}^{\bar{\alpha}(E)} \frac{d\Gamma}{b} \frac{d\alpha}{\alpha}\right] = \exp\left[\frac{d\Gamma}{b} \log\frac{\alpha(E)}{\alpha(E_0)}\right] = \left[\frac{\alpha(E)}{\alpha(E_0)}\right]^{\frac{d\Gamma}{b}} \quad (137b)$$

Dove ho definito, al primo ordine,  $\gamma(\bar{\alpha}) = d\Gamma\alpha$  e ho tenuto conto che la running coupling constant soddisfa, sempre al primo ordine,  $\frac{d\alpha}{dt} = -b\alpha^2$  cioè  $\alpha(t)dt = -\frac{1}{b}\frac{d\alpha}{\alpha}$

## 8 Divergenze IR: cancellazioni, risommazioni

Consideriamo ancora lo scattering Coulombiano di un elettrone e occupiamoci dell'andamento della sezione d'urto per energie ( $q^2$ ) molto elevato, in modo da poter trascurare la massa dell'elettrone.

## 9 Correzioni reali

Per la fisica a 1 TeV si possono prendere tranquillamente i fermioni massless\*; le correzioni sono di ordine  $m_f^2/s \approx 0$ . Serve un cutoff IR solo per il fotone, cui si dà una massa  $\lambda$ . Considero l'emissione di un fotone di impulso  $k = (w, \mathbf{k})$ ,  $k^2 = \lambda^2$  da parte di un fermione  $p = E(1, \hat{\mathbf{p}})$ ,  $p^2 = 0$ . L'approssimazione fondamentale è quella iconale:

$$\frac{1}{\not{p} - \not{k}}\gamma^\mu u(p) \approx \frac{\not{p}}{-2kp}\gamma^\mu u(p) \approx -\frac{p^\mu}{pk}u(p) \quad (138)$$

valida per  $w \ll E$ . Al denominatore appare la variabile ( $\cos\theta = \hat{\mathbf{k}}\hat{\mathbf{p}}$ ):

$$2(p \cdot k) = 2E|\mathbf{k}| \left[ (1 - \cos\theta) + \frac{\lambda^2}{2|\mathbf{k}|^2} \right] \stackrel{\theta \sim 0, w \gg \lambda}{\approx} \frac{E}{w}(\mathbf{k}_\perp^2 + \lambda^2) \quad ; \quad \mathbf{k}_\perp \approx w\theta \quad (139)$$

Con l'approssimazione iconale si prendono solo i termini leading, divergenti sia collineari che infrarossi (doppi log), mentre ovviamente non si possono prendere ad esempio i termini di singolo log collineare di emissione di un fotone hard  $w \approx E$ .

Considero qui la correzione per emissione di un fotone ad un processo hard che coinvolge una scala  $\sqrt{s} \gg \omega$  e descritto dall'elemento di matrice  $\mathcal{M}_H$  a Born level. Tenendo in conto la (138), l'emissione reale al primo ordine è descritta da

$$\mathcal{M} \approx \mathcal{M}_0(p', p)e \left[ \frac{p'\varepsilon^*}{p'k} - \frac{p\varepsilon^*}{pk} \right]$$

\*tranne che per il top; comunque a livello doppio log dare una massa al top non cambia nulla, vedi [?]

dove  $\mathcal{M}_0$  è l'ampiezza a tree level e  $\varepsilon(k)^\mu$  è la polarizzazione del fotone. L'elemento di matrice modulo quadro è proporzionale a  $J_\mu D^{\mu\nu} J_\nu$  con  $D_{\mu\nu} = \sum_p \varepsilon_\mu^{p*} \varepsilon_\nu^p = g_{\mu\nu} + k_\mu \dots$ . Tuttavia i termini in  $k_\mu, k_\nu$  non contribuiscono per via della conservazione della corrente (??) per cui  $|\mathcal{M}|^2 \sim J^\mu J_\mu |\mathcal{M}_H|^2$ . In  $J^\mu J_\mu$  compaiono a questo punto termini del tipo  $\frac{p_i p_j}{(k p_i)(k p_j)}$ . Questi termini sono massimamente singolari quando il fotone, oltre a essere soffice, è collineare con uno dei  $\mathbf{p}_i$ . L'elemento di matrice modulo quadro è:

$$|\mathcal{M}|^2 \approx e^2 |\mathcal{M}_0|^2 \left[ \frac{2pp'}{(p'k)(pk)} \right]$$

Notare la fattorizzazione del termine singolare IR rispetto al tree level. Fissiamoci sulla regione dello spazio delle fasi in cui il fotone è collineare con uno dei fermioni, di impulso  $p$ . Dalla (139) si ha allora:

$$kp \sim \frac{\sqrt{s}}{\omega} (\omega^2 \theta^2 + \lambda^2) \quad kp_i \sim \omega \sqrt{s} \quad pp_i \sim s \quad (p_i \neq p) \quad d\phi_\lambda \sim \frac{d^3 \mathbf{k}}{\omega} \sim \omega d\omega d\theta^2 \quad (140)$$

dove  $d\phi_\lambda$  è lo spazio delle fasi del fotone. Notare che queste approssimazioni cinematiche, in particolare la seconda, sono valide solo quando nessuno dei  $\mathbf{p}_i$  è circa allineato con  $\mathbf{p}$  (large angle scattering). Imponiamo una risoluzione sperimentale sull'energia dei fotoni emessi,  $\omega < \Delta$ . A questo punto arriva l'integrale fondamentale:

$$\int \frac{pp_i}{(k p_i)(k p)} d\phi_\lambda \sim \int \frac{\omega d\omega d\theta^2}{(\omega^2 \theta^2 + \lambda^2)} \sim \int_{\omega > \lambda}^{\omega < \Delta, \theta < 1} \frac{d\omega d\theta^2}{\omega \theta^2} \sim \int \frac{d\omega}{\omega} \int_{\frac{\lambda}{\omega}}^1 2 \frac{d\theta}{\theta} \sim \int_\lambda^\Delta \frac{d\omega}{\omega} 2 \log \frac{\lambda}{\omega} \sim \log^2 \frac{\Delta^2}{\lambda^2} \quad (141)$$

dove le varie approssimazioni sono giuste a livello doppio log, cioè a meno di log singoli: ad esempio se integro su  $\theta < \frac{\pi}{2}, \omega < \frac{\Delta}{5}$  invece che  $\theta < 1, \omega < \Delta$ , la differenza è un singolo log. Adesso, concentrandoci sulla gamba 1 e tenendo conto che  $p_1^2 = 0$  e quindi i termini in cui il fotone ritorna sulla gamba 1 sono 0, si ha:

$$\int d\phi_\lambda J^2 \sim \int d\phi_\lambda \frac{p_1^\mu}{k p_1} Q_1 \sum_{i \neq 1} \frac{p_i^\mu}{k p_i} Q_i \sim \log^2 \frac{s}{\lambda^2} Q_1 \sum_{i \neq 1} Q_i = -Q_1^2 \log^2 \frac{s}{\lambda^2} \quad (142)$$

avendo tenuto conto della conservazione della carica. Il contributo complessivo è quindi  $\propto -\alpha \log^2 \frac{s}{\lambda^2} \sum_i Q_i^2$ .

## 10 Correzioni virtuali

Se calcoliamo le correzioni ad 1 loop ci accorgiamo che sono divergenti nell'infrarosso, cioè quando la variabile di integrazione  $k \rightarrow 0$ .

Più precisamente il propagatore del fermione in fig. 3 :

$$\frac{1}{(p+k)^2} = \frac{1}{k^2 + 2pk} \quad (143)$$

è singolare sia per  $k \rightarrow 0$  (divergenza IR) che per  $k \propto p$  (divergenza collineare). Una analisi accurata dell'integrazione in  $d^4 k$  permette di stabilire che ognuna delle due singolarità è di tipo logaritmico, dando così luogo ad una divergenza del tipo  $\log^2$ . Possiamo regolarizzare le singolarità ad esempio dando una massa  $\mu$  al fotone. Considerando solo i termini dominantiad alto  $q^2$ , l'effetto delle correzioni virtuali è:

$$\sigma_{virt} \sim \sigma_{Born} (1 - \alpha \log^2 \frac{q^2}{\mu^2}) \quad (144)$$

## 11 Sezione d'urto elettrone-protone

### 11.1 Fattori di forma

Consideriamo lo scattering da un potenziale esterno in meccanica quantistica. L'ampiezza è in questo caso, considerando stati finali e iniziali di onda piana:

$$-2\pi i \delta(E_f - E_i) \langle f | V(\mathbf{x}) | i \rangle = -2\pi i \delta(E_f - E_i) \int d^3 x V(\mathbf{x}) e^{i(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f) \cdot \mathbf{x}} = -2\pi i \delta(E_f - E_i) \tilde{V}(\mathbf{q}) \quad \mathbf{q} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i \quad (145)$$

e la sezione d'urto risulta  $d\sigma = \text{const.} |\tilde{V}(\mathbf{q})|^2$ , dove la const. tiene conto di flusso iniziale, spazio delle fasi ecc. Nel caso di scattering elettromagnetico da una carica puntiforme, il potenziale soddisfa  $\nabla^2 V = \delta^3(\mathbf{x})$  e in trasformata di

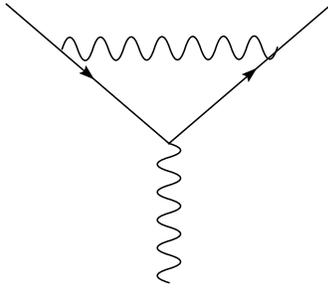


Figura 2: Correzione di vertice per l'elettrone

Fourier  $\tilde{V}(\mathbf{q}) = \frac{1}{q^2}$  da cui la sezione d'urto  $d\sigma = \text{cost.} \left| \frac{1}{q^2} \right|^2$ . Se invece lo scattering avviene da una carica distribuita con densità  $\rho(\mathbf{x})$ , il potenziale soddisfa  $\nabla^2 V = \rho(\mathbf{x})$  e quindi  $d\sigma = \text{cost.} \left| \frac{\tilde{\rho}(\mathbf{q})}{q^2} \right|^2$ . In definitiva, indicando con  $d\sigma_{\text{punt}}$  la sezione d'urto senza struttura, cioè puntiforme, nel caso di carica distribuita si ha:

$$d\sigma_\rho = d\sigma_{\text{punt}} |\tilde{\rho}(\mathbf{q})|^2 \quad (146)$$

La funzione  $\rho(\mathbf{q})$  è detta fattore di forma, relativa in questo caso al potenziale, proprio perchè è legata alla forma del bersaglio: in questo caso, la distribuzione di carica. Un esperimento di scattering può essere quindi una utilissima sonda per capire come è fatto il bersaglio. Il primo esempio fu probabilmente il famoso esperimento di Rutherford: mandando particelle alpha su atomi, alcune di queste tornano indietro a angoli di deflessione elevati, cosa spiegabile solo con un nocciolo molto piccolo di carica +. Dal punto di vista matematico, la (146) fa capire che se la carica è distribuita in maniera molto uniforme, la  $\tilde{\rho}(\mathbf{q})$  è quasi una delta, cioè è significativamente diversa da zero solo a piccoli valori del momento trasferito  $\mathbf{q}$ , quindi lo scattering avviene quasi tutto in avanti. Se invece la carica è concentrata nell'origine, la  $\tilde{\rho}(\mathbf{q})$  è diversa da zero anche a valori elevati di  $|\tilde{\rho}(\mathbf{q})|$ , che corrispondono a grandi valori dell'angolo di deflessione (backscattering). Quantitativamente, un dato valore di  $|\mathbf{q}|$  sonda un valore di  $|\mathbf{x}|$  ad esso legato dal principio di indeterminazione di Heisenberg:  $|\mathbf{q}||\mathbf{x}| \sim 1$ . Notare infine che se normalizziamo la carica a 1,  $\int d^3x \rho(\mathbf{x}) = 1$ , questo comporta  $\tilde{\rho}(0) = 1$ .

Che cosa possiamo dire a proposito dello scattering  $\pi^+e^-$  analizzato in precedenza? Se possiamo pensare all'elettrone come puntiforme, altrettanto non si può certamente dire per il pione. Il  $\pi^+$  è composto da un quark up ( $u$ ) e da un antiquark down ( $\bar{d}$ ), ma non possiamo di certo pensare questi due quark come cariche libere e puntiformi. In effetti, oltre all'interazione elettromagnetica, che possiamo pensare trascurabile, i quarks si scambiano gluoni, che mediano le interazioni forti. Queste ultime però, alla scala di massa tipica del pione di circa 200 MeV, sono fortemente non perturbative e non possono essere trattate con la teoria delle perturbazioni. In effetti, la descrizione del pione in termini dei quarks che lo costituiscono e delle interazioni fra loro (in analogia a come si descrive ad esempio un atomo come nucleo+elettroni) è un problema tuttora aperto\*. Che cosa possiamo fare dunque? Ritorniamo alla forma della corrente utilizzata nel caso di pioni puntiformi  $j_\mu(x) = (p_1 + p_2)_\mu e^{i(p_2 - p_1)x} = j_\mu(0)e^{iqx}$ . Al solito la dipendenza da  $x$  si combina con altri fattori per dare la delta di conservazione dell'impulso, per cui concentriamoci sulla  $j_\mu(0)$ . Qual'è la sua forma più generale? Dobbiamo scrivere un oggetto che si trasforma come un quadrivettore e abbiamo a disposizione pochiquadrivettori:  $p_1, p_2, q$  legati dalla conservazione dell'energia  $p_2 - p_1 = q$  quindi solo 2 oggetti indipendenti. Quindi  $j^\mu(0) = Ap_1^\mu + Bp_2^\mu$ .  $A, B$  non sono necessariamente costanti: possono dipendere dagli invarianti che riesco a costruire, che sono  $p_1^2 = p_2^2 = M^2$ . Tutti gli altri invarianti sono funzioni di questi, ad esempio  $p_1 p_2 = M^2 - \frac{q^2}{2}$  e così via. Inoltre  $M^2$  è proprio una costante: interessa qui solo la dipendenza dalle variabili cinematiche come  $q^2$  per cui la forma più generale è  $j^\mu(0) = A(q^2)p_1^\mu + B(q^2)p_2^\mu$ . Possiamo ancora dire qualcosa, grazie all'invarianza di gauge che ci assicura che la corrente è conservata  $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$  Che si traduce in  $q_\mu j^\mu(0) = 0$ :

$$j^\mu(0) = A(q^2)p_1^\mu + B(q^2)p_2^\mu \quad (p_2 - p_1)_\mu j^\mu(0) = (p_1 p_2 - M^2)(A - B) = 0 \Rightarrow A = B \quad (147)$$

La forma più generale della corrente è quindi  $j^\mu(0) = F(q^2)(p_1^\mu + p_2^\mu)$ . A questo punto è facile seguire gli stessi passaggi che hanno permesso di ricavare la sezione d'urto per pioni puntiforme ottenendo:

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta}(e^-\pi^+ \rightarrow e^-\pi^+) = \frac{d\sigma}{d\cos\theta}(e^-\pi^+ \rightarrow e^-\pi^+) \Big|_{\text{punt}} |F(q^2)|^2 \quad (148)$$

La carica elettrica è definita come la carica misurata quando  $q^2$  tende a zero, per cui deve essere  $F(0) = 1$ . Questa condizione è analoga a quella vista in precedenza per la normalizzazione della carica nel caso di scattering da potenziale.

\*esistono alcune tecniche non perturbative come lagrangiane chirali, QCD su reticolo ma manca una descrizione completa

Infine, è chiaro come gli esperimenti di scattering di questo tipo (con  $q^2 < 0$ , cioè “spacelike”) o esperimenti di annichilazione  $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$  (con  $q^2 > 4M^2$ , cioè “timelike”) possono misurare  $F(q^2)$  e quindi sono una sonda sulla struttura del pione. Spiegare questa struttura è, come già accennato, una sfida difficile per qualsiasi teoria.

Consideriamo adesso la corrente associata ad un fermione. per l’elettrone, considerato puntiforme, abbiamo visto che la corrente si scrive  $j_\mu(e^-) = \bar{u}(k_2)\gamma_\mu u(k_1)$ . Cosa possiamo dire per un oggetto puntiforme come ad esempio il protone? Dobbiamo costruire in questo caso, in analogia a quanto fatto per il pione, l’oggetto più generale della forma  $\bar{U}(k_2)\Gamma_\mu u(k_1)$ . La matrice  $\gamma_\mu$  è una generica matrice 4x4, quindi è necessario scrivere una base nello spazio delle matrici 4x4. E’ possibile dimostrare che le 16 matrici della tabella 2 sono effettivamente una base ortonormale (vedi [?]), per cui è possibile scrivere ogni bilineare nella forma  $\bar{u}_2 M u_1 = \sum_\alpha c_\alpha \bar{u}_2 \Gamma_\alpha u_1$ . In tabella sono riportate anche le proprietà sotto parità del bilineare. Ad esempio,  $\bar{u}_2 \gamma_\mu u_1 \xrightarrow{P} g_{\mu\mu} \bar{u}_2 \gamma_\mu u_1$  significa che la componente temporale rimane invariata ( $g_{00} = 1$ ) e quelle spaziali cambiano segno ( $g_{ii} = -1$ ); questo è il comportamento sotto parità di un vettore. Così il campo elettromagnetico  $A_\mu$  è un vettore, e così pure, ovviamente, la corrente scalare  $j_S^\mu = (p_1 + p_2)^\mu$ . Anche la corrente fermionica  $j_F^\mu = \bar{u}(k_2)\gamma_\mu u(k_1)$  è un vettore, di modo che l’interazione elettromagnetica  $j_\mu A^\mu$  sotto parità va in se stessa in quanto le componenti spaziali  $A_i, j_i$  cambiano entrambe segno (formalmente  $j_\mu A^\mu \xrightarrow{P} g_{\mu\mu} g^{\mu\mu} j_\mu A^\mu = j_\mu A^\mu$ ). Si dice che la QED (quantum electrodynamics) è invariante sotto parità.

Ritornando alla forma più generale della corrente di un protone, abbiamo a disposizione come nel caso del  $\pi$  i vettori  $k_1, k_2$  e l’invariante  $q^2 = (k_2 - k_1)^2$ . In più, possiamo scrivere un bilineare utilizzando tutte le matrici della tabella 2. Alcuni termini sono però esclusi, e lo sono in particolare tutti quelli che contengono  $\gamma_5$ . Ad esempio, se scrivo  $j_5^\mu = \bar{u}(k_2)\gamma_\mu\gamma_5 u(k_1)$ , l’accoppiamento col campo elettromagnetico  $j_5^\mu A_\mu$  non è invariante sotto parità in quanto  $j_5^\mu$  è uno pseudovettore, cioè le componenti spaziali *non* cambiano segno sotto parità. D’altra parte l’invarianza sotto parità è ben verificata sperimentalmente per la QED. In definitiva, la forma più generale per la corrente del protone, utilizzando  $q = k_2 - k_1$  e  $P = k_2 + k_1$  al posto di  $k_1$  e  $k_2$  è

$$J_\mu = \bar{U}(k_2)\Gamma_\mu U(k_1) = \bar{U}(k_2) \{Aq^\mu + BP^\mu + C\gamma^\mu + Di\sigma^{\mu\nu}q_\nu + Ei\sigma^{\mu\nu}P_\nu\} U(k_1) \quad (149)$$

con  $A, B, \dots, E$  funzioni di  $q^2$ . Una prima semplificazione di questa espressione si ottiene utilizzando le identità di Gordon, che nel caso in esame si scrivono:

$$\bar{U}(k_2) \{i\sigma_{\mu\nu}q^\nu - 2M\gamma_\mu + P_\mu\} U(k_1) = 0 \quad ; \quad \bar{U}(k_2) \{i\sigma_{\mu\nu}P^\nu + q_\mu\} U(k_1) = 0 \quad (150)$$

**Esercizio** Utilizzando l’equazione di Dirac  $kU(k) = MU(k)$ , dimostrare le identità di Gordon (150)

Posso quindi eliminare 2 dei 5 fattori di forma nella (149); per convenzione si usa la forma:

$$\bar{U}(k_2)\Gamma_\mu U(k_1) = \bar{U}(k_2) \{Aq^\mu + B\gamma^\mu + Ci\sigma^{\mu\nu}q_\nu\} U(k_1) \quad (151)$$

Infine, la conservazione della corrente  $q_\mu J^\mu = 0$  implica  $q^2 A = 0$  (**Esercizio**: dimostrare questo passaggio!) cioè  $A = 0$  da cui l’espressione finale:

$$J_\mu = \bar{U}(k_2) \{F_1(q^2)\gamma_\mu + F_2(q^2)i\sigma^{\mu\nu}q_\nu\} U(k_1) \quad (152)$$

Nel prossimo paragrafo cerchiamo di capire qual’è il significato fisico di questa espressione.

## 11.2 Limite non relativistico della corrente: il momento magnetico dell’elettrone

Per dare un significato fisico alla (152) consideriamo dapprima un la elettrone in campo magnetico. Un elettrone in un campo elettromagnetico è soggetto alla Forza di Lorentz  $\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$ , dove  $e$  è la carica dell’elettrone con segno, e  $\mathbf{v}$  la sua velocità. Questa forza si deriva dalla Hamiltoniana:

$$H = \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2m} + eA_0 \quad (153)$$

Difatti le equazioni di Hamilton  $\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$  si scrivono\*:

$$\begin{cases} \dot{p}_i = (p_j - eA_j)e\partial_i A_j - e\partial_i A_0 \\ \dot{x}_i = \frac{p_i - eA_i}{m} \end{cases} \Rightarrow m \ddot{x}_i = e(-\dot{A}_i + v_j \partial_i A_j - \partial_i A_0) = e(-\partial_t A_i - \partial_i A_0 + v_j \partial_i A_j - v_j \partial_j A_i) \quad (154)$$

Ricordandosi che  $E_i = -\partial_i A_0 - \partial_t A_i, B_i = \epsilon_{ijk} \partial_j A_k$  e utilizzando  $\epsilon_{kij}\epsilon_{kmn} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}$ , si ottiene che l’ultima espressione è proprio  $e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})_i$ .

\*ricordarsi che lungo le traiettore  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$  per il campo  $A_i(t, \mathbf{x}(t))$  si ha  $\dot{A}_i = \partial_t A_i + \dot{x}_j \partial_j A_i$

Nel limite nonrelativistico, il sistema viene descritto dall'hamiltoniana (153). Consideriamo il caso di un campo esterno  $A_\mu$  indipendente dal tempo e mettiamo in gauge di Lorentz,  $\partial_\mu A^\mu = \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$  per cui  $[\mathbf{A}, \mathbf{p}] = 0$  e la (153) si scrive:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V \quad ; \quad V = e \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}}{m} + eA_0 \quad \left( + \frac{e^2}{2m} \mathbf{A}^2 \right) \quad (155)$$

In realtà però noi sappiamo che l'elettrone relativistico è correttamente descritto dall'equazione di Dirac, e, dal punto di vista perturbativo, da un'interazione di tipo  $j_\mu A^\mu$ . Il significato fisico di questa espressione è però poco chiaro. Per dare una interpretazione fisica proviamo a considerare un esperimento di scattering di un elettrone da potenziale al primo ordine della teoria delle perturbazioni. Da un lato, possiamo fare un trattamento nonrelativistico tramite il potenziale definito in (155) (escludendo il termine  $e^2 \mathbf{A}^2$  che è di ordine superiore in  $e$ ). Dall'altro, possiamo confrontare quanto ottenuto con l'espressione relativistica ottenuta dall'ampiezza  $\mathcal{A} \sim A_\mu j^\mu$ ; per far questo occorre fare una espansione anche nel parametro  $\frac{q}{m}$  che dice quanto la cinematica si discosta dal limite nonrelativistico.

Per fare il limite nonrelativistico della corrente, e quindi delle soluzioni dell'equazione di Dirac, conviene utilizzare piuttosto che la rappresentazione (3) una rappresentazione in cui il ruolo di  $\gamma_0$  e  $\gamma_5$  sono scambiati:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (156)$$

Le soluzioni dell'equazione di Dirac  $(\not{p} - m)u = 0$  in questa rappresentazione sono (**Esercizio:** dimostrarlo):

$$u = \begin{pmatrix} \alpha \\ \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{p_0 + m} \alpha \end{pmatrix} \quad (157)$$

Questa rappresentazione è quindi migliore nel limite nonrelativistico  $\frac{v}{c} = \frac{|\mathbf{p}|}{p_0} \rightarrow 0$  in quanto sono separate le componenti "piccole di ordine  $\frac{v}{c}$ " (in basso nella (157)) e quelle "grandi" di ordine 1 (in basso nella (157)). Nella rappresentazione (3) invece, le componenti sono dello stesso ordine nel limite nonrelativistico (vedi la ??). Dalla (157) si ottiene  $u^\dagger u = \frac{2p_0}{p_0 + m} \approx 1$  nel limite nonrelativistico; analogamente  $\bar{u}u = 1$ .

Consideriamo ora un esperimento di scattering da potenziale esterno di un elettrone, con impulso iniziale  $p_1$  e finale  $p_2$ , definendo  $q = p_2 - p_1$ . Lo scattering in teoria delle perturbazioni nonrelativistica viene descritto da un'ampiezza:

$$\mathcal{A} = -2\pi\delta(E_2 - E_1)i \int \langle f | V | i \rangle = -2\pi\delta(E_2 - E_1)i \int V(\mathbf{x})e^{i(\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1) \cdot \mathbf{x}} = -2\pi i \delta(q_0) \tilde{V}(\mathbf{q}) \quad (158)$$

dove ho indicato con la tilde la trasformata di Fourier. Nella teoria delle perturbazioni relativistica invece, l'ampiezza è:

$$\mathcal{A} = \int A_\mu(\mathbf{x})j^\mu(x) = \int A_\mu(\mathbf{x})e^{iqx}j^\mu(0) = -2\pi i \delta(q_0) \tilde{A}^\mu(\mathbf{q})j_\mu(0) \quad (159)$$

Per mettere a confronto queste due espressioni occorre fare il limite nonrelativistico della corrente elettronica  $j_\mu(0) = \bar{u}(p_2)\gamma_\mu u(p_1)$ ; conviene utilizzare l'identità di Gordon (150) ( $q = p_2 - p_1, P = p_2 + p_1$ ):

$$e\bar{u}(p_2)\gamma_\mu u(p_1) = \frac{e}{2m}\bar{u}(p_2) \{i\sigma_{\mu\nu}q^\nu + P_\mu\} u(p_1) \quad (160)$$

Il termine in  $P_\mu$  è il più semplice da interpretare, essendo identico a quello di una particella scalare:

$$e\bar{u}(p_2)\frac{(p_1 + p_2)^\mu}{2m}u(p_1) \approx e\frac{p_1^\mu}{m}\bar{u}(p_1)u(p_1) = e\frac{p_1^\mu}{m} = (e, e\frac{\mathbf{p}}{m}) \quad (161)$$

avendo tenuto solo il termine di ordine 0 in  $q$ , cioè avendo posto  $p_1 = p_2$ . Utilizzando questa espressione, l'ampiezza diventa:

$$\mathcal{A} = -2\pi i \delta(q_0) \tilde{A}^\mu(\mathbf{q})j_\mu(0) = -2\pi i \delta(q_0) (e\tilde{A}_0 + e\frac{\mathbf{p} \cdot \tilde{\mathbf{A}}}{m}) \quad (162)$$

ed è facile identificare in questa espressione il potenziale definito in (155). In particolare, il termine in  $A_0$  è l'interazione Coulombiana di una particella di carica  $e$ . Abbiamo quindi imparato che nel limite  $q = 0$  si ottiene semplicemente l'interazione nonrelativistica di una particella carica in campo elettromagnetico.

Il secondo termine nella (160) identifica, come vedremo, lo spin dell'elettrone, e scompare nel limite  $q \rightarrow 0$ . Lo spin è quindi un effetto relativistico, che scompare nel limite nonrelativistico. Per valutare questo termine, iniziamo col dire che siccome  $A_\mu$  non dipende dal tempo, comunque  $q_0$  è zero (vedi la (159)). Quindi  $\sigma_{\mu\nu}q^\nu = \sigma_{\mu j}q^j$ . Utilizzando le (156) si ottiene:

$$i\sigma_{0j} = -\frac{[\gamma_0, \gamma_j]}{2} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix}, \quad i\sigma_{ij} = -\frac{[\gamma_i, \gamma_j]}{2} = \begin{pmatrix} -i\epsilon_{ijk}\sigma_k & 0 \\ 0 & -i\epsilon_{ijk}\sigma_k \end{pmatrix} \quad (163)$$

Siccome  $\sigma_{\mu\nu}q^\nu$  contiene già una potenza di  $q$ , possiamo valutare  $\bar{u}(k_2)\sigma_{\mu\nu}u(k_1)$  nel limite  $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = 0, E_1 = E_2 = m$ . In questo limite contribuiscono solo le componenti “grandi” di  $u$ , cioè quelle in alto nella (157), e quindi  $\sigma_{0j}$  in particolare non contribuisce. si ottiene:

$$\frac{e}{2m}\bar{u}(p_2)\{i\sigma_{\mu\nu}q^\nu\}u(p_1)\tilde{A}^\mu \approx \frac{e}{2m}\alpha^\dagger(-i\epsilon_{ijk}\sigma_kq_j)\alpha\tilde{A}^i = \alpha^\dagger\left(\frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{B}\right)\alpha \quad (164)$$

dove ho tenuto conto del fatto che, siccome  $B_k = \epsilon_{kji}\partial_j A_i$ , in trasformata di Fourier  $\tilde{B}_k = i\epsilon_{kji}q_j\tilde{A}^i$ . Il termine (164) può essere descritto come un'interazione fra il campo magnetico  $\mathbf{B}$  e il momento magnetico dell'elettrone  $\boldsymbol{\mu}$ :

$$V(x) = -\boldsymbol{\mu}\cdot\mathbf{B} \quad ; \quad \boldsymbol{\mu} = \frac{e}{m}\mathbf{S} \equiv g\frac{e}{2m}\mathbf{S} \quad (165)$$

Il coefficiente  $g$  viene chiamato fattore di Landé, e vale 2 per l'elettrone. Per la fisica classica, per un insieme di cariche con un momento angolare  $\mathbf{L}$  e rapporto fra carica e massa pari a  $\frac{e}{m}$  il fattore di Landé vale  $g = 1$ . Così se descrivo l'elettrone come una distribuzione di cariche arbitrarie in rotazione, anche per l'elettrone dovrebbe valere  $g=1$ . Invece il valore quantistico predetto dall'equazione di Dirac è, come abbiamo visto,  $g = 2$ .

Siamo ora in grado di dare una interpretazione fisica della corrente del protone (152), che assume e grazie alla identità di Gordon la forma:

$$J_\mu = e\bar{U}(p_2)\left\{F_1(q^2)\frac{p_1^\mu + p_2^\mu}{2M} + (F_1(q^2) + 2MF_2(q^2))\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2M}\right\}U(k_1) \quad (166)$$

Il primo termine è, come visto, quello di una particella di carica  $eF_1(0)$ . Siccome sperimentalmente le cariche di elettrone e protone sono uguali, deve essere  $F_1(0) = 1$ . Il secondo termine corrisponde a una particella di momento magnetico  $\frac{e}{2M}(F_1(0) + 2MF_2(0)) \equiv \frac{e}{2M}(1 + k)$ .  $k = 2MF_2(0)$  è detto momento magnetico anomalo, perchè indica di quanto si scosta il valore del momento magnetico da quello predetto dall'equazione di Dirac per un fermione carico puntiforme, che corrisponde a  $k = 0$ . In tab. 1 sono indicati i valori sperimentali di  $k$  per l'elettrone, il protone e il neutrone. E' evidente l'incongruenza con quanto finora detto: se l'elettrone è effettivamente puntiforme e la sua corrente è  $j_\mu = \bar{u}\gamma_\mu u$ , perchè il suo momento magnetico è anomalo, cioè si discosta dal valore  $g = 2$  predetto dall'equazione di Dirac? Il motivo è che l'elettrone è puntiforme per modo di dire; le correzioni radiative inducono un fattore di forma, cioè una dipendenza da  $q^2$ : un esempio è il diagramma di fig. (3).

### 11.3 Scattering elastico elettrone-protone

Abbiamo adesso in mano tutti gli elementi per calcolare la sezione d'urto elastica  $e^-p^+ \rightarrow e^-p^+$  in QED. Tale scattering è detto elastico perchè l'identità delle particelle iniziali ( $e^-, p$ ) è la stessa di quelle finali. Se il protone fosse puntiforme, otterremmo lo stesso risultato che nello scattering elettrone-muone analizzato nel par.??, e cioè la sezione d'urto (??). Se possiamo considerare l'elettrone puntiforme, in quanto le correzioni ad una corrente del tipo  $j_\mu \sim \gamma_\mu$  sono di ordine  $10^{-3}$  (vedi tab. 1), la corrente del protone data in (152) contiene due fattori di forma di cui bisogna tener conto. Il calcolo della sezione d'urto elettrone-protone procede sulle stesse linee di quello della sezione d'urto elettrone-muone, fatta eccezione per la forma diversa della corrente protonica. Per convenzione si riparametrizza la corrente del protone (152) nella forma:

$$J_\mu = \bar{U}(p_2)\left\{F_1(q^2)\gamma_\mu + \frac{kF_2(q^2)}{2M}i\sigma^{\mu\nu}q_\nu\right\}U(p_1) \quad (167)$$

dove  $k$  è il momento magnetico anomalo del protone, di modo che  $F_1$  e  $F_2$  hanno le stesse dimensioni e  $F_2(0) = 1$ . Calcolando il tensore adronico da questa corrente e dopo un procedimento piuttosto laborioso, si ottiene:

$$|\mathcal{A}|^2 = L_{\mu\nu}M^{\mu\nu} \quad M^{\mu\nu} = \frac{W_2(q^2)}{M^2}[p^\mu - \frac{pq}{q^2}q^\mu][p^\nu - \frac{pq}{q^2}q^\nu] + W_1(q^2)(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}) \quad (168)$$

dove  $L_{\mu\nu}$  è l'usuale tensore fermionico (??) e dove  $W_2 = F_1^2 - \frac{k^2q^2}{4M^2}F_2$ ,  $W_1 = -\frac{q^2}{2M^2}(F_1 + kF_2)^2$ . Procedendo nel calcolo della sezione d'urto seguendo i passi finora visti, si ottiene nel sistema del laboratorio:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}\Big|_{lab}^{e^+p\text{ el}} = \frac{\alpha^2}{4E^2\sin^4\frac{\theta}{2}}\frac{E'}{E}\left(\cos^2\frac{\theta}{2}W_2(q^2) + 2\sin^2\frac{\theta}{2}W_1(q^2)\right) \quad (169)$$

dove  $E(E')$  è l'energia dell'elettrone prima (dopo) dello scattering. Il primo termine in questa espressione è identico alla sezione d'urto elettrone - pione (??) per cui si intuisce che  $W_2$  è in qualche modo legato al contributo della

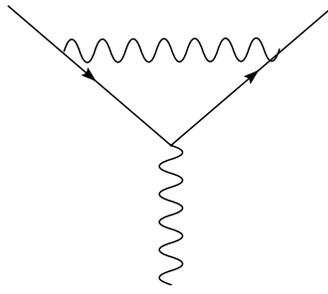


Figura 3: Correzione di vertice per l'elettrone

$e^-$	$1.15965...10^{-3}$
$p^+$	$1.7928...$
$n^0$	$-1.913....$

Tabella 1: Valori del momento magnetico anomalo  $k = 2MF_2(0)$  da [?]

distribuzione di carica del protone alla sezione d'urto.  $W_1$  invece, che è zero nel caso di scattering elettrone-pione, è legato allo spin del protone e quindi alla distribuzione del momento magnetico. A causa del rinculo del protone però questa identificazione non è immediata (tale identificazione è semplice nel caso di scattering da potenziale fisso come abbiamo visto sopra). E' possibile fare una identificazione precisa di distribuzione di momento magnetico e carica solo in un sistema di riferimento preciso, quello di Breit; vedere [?] cap. 8. Nel caso  $W_1 = W_2 = 1$ , cioè in assenza di fattori di forma, si riottiene la sezione d'urto (puntiforme) elettrone muone (??).

#### 11.4 Scattering inelastico elettrone-protone

Lo scattering elastico è possibile solo se l'energia dell'elettrone, o meglio il suo  $q^2$ , sono relativamente bassi, fino a circa 150 MeV. Aldilà di tale energia si apre la soglia di produzione di un pione, e il processo diventa  $ep \rightarrow e\Delta^+ \rightarrow ep\pi^0$ . Questo processo è inelastico per via della presenza del pione nello stato finale. Ad energie ancora maggiori, dell'ordine del GeV e superiori, il protone si spezza perdendo la sua identità e vengono generati nuovi adroni di tutti i tipi \*. La cosa più semplice da misurare sperimentalmente diventa la sezione d'urto *inclusiva*, cioè  $e^-(k)+p(P) \rightarrow e^-(k')+X(P')$  in cui non ci si preoccupa di cosa sia  $X$  e si osserva solo l'elettrone finale. La massa invariante,  $W \equiv P'^2$ , dello stato adronico finale è in questo caso una variabile e non è più fissata ad essere la massa del protone quadro come nel caso dello scattering elastico. Questo significa che  $q^2$  non è più la sola variabile cinematica indipendente. Infatti nel caso elastico la conservazione dell'impulso  $P + k = P' + k'$  e le condizioni di mass shell  $P^2 = P'^2 = M^2, k^2 = k'^2 = 0$  (l'elettrone è senza massa ad alta energia) implicano che  $2qP = q^2$ , e ogni altro invariante che si può formare con  $k, k', P, P'$  è funzione di  $q^2$  (**Esercizio:** dimostrarlo). Ad esempio, con la cinematica dello scattering Compton nel sistema del laboratorio, si ha(**Esercizio:** dimostrarlo):

$$\omega' = \frac{m\omega}{m + \omega(1 - \cos\theta)} \quad q^2 = -4 \frac{m\omega^2}{m + \omega(1 - \cos\theta)} \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (170)$$

il che significa che l'angolo di scattering  $\theta$  determina tutto quanto. Questo non è vero nel DIS (Deep Inelastic Scattering, scattering profondamente inelastico) in quanto la massa invariante adronica  $W = P'^2$  è una variabile e quindi ho due

\*Esistono moltissimi adroni noti, oltre a pioni e nucleoni che sono i più noti; una lista esaustiva si può trovare in [?]

$\Gamma_\alpha$	numero	parità
1	1	1
$\gamma_5$	1	-1
$\gamma_\mu$	4	$g^{\mu\mu}$
$\gamma_\mu\gamma_5$	4	$-g^{\mu\mu}$
$\sigma_{\mu\nu} \equiv i \frac{[\gamma_\mu, \gamma_\nu]}{2}$	6	$g_{\mu\mu}g_{\nu\nu}$

Tabella 2: Base di matrici 4x4. Sono indicati anche il numero di matrici indipendenti e le proprietà sotto trasformazione di parità



Figura 4: Regole di Feynman per stati iniziali e finali fermionici. La freccia fermionica segue il flusso della carica della particella (e non l'impulso!); ad esempio carica - per l'elettrone. La macchia nera indica il diagramma di Feynman.

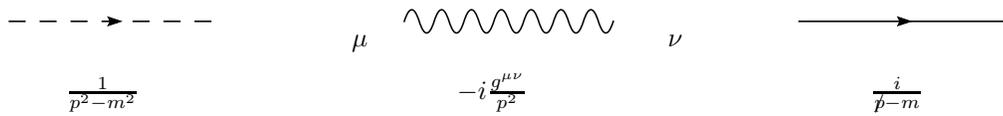


Figura 5: Regole di Feynman per i propagatori scalare, del fotone, fermionico

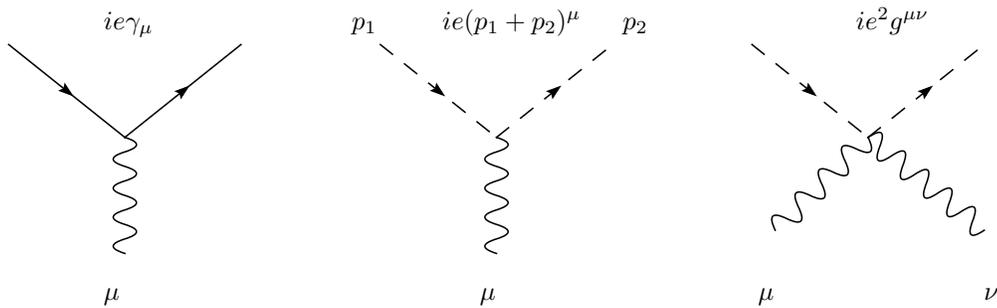


Figura 6: Regole di Feynman per i vertici

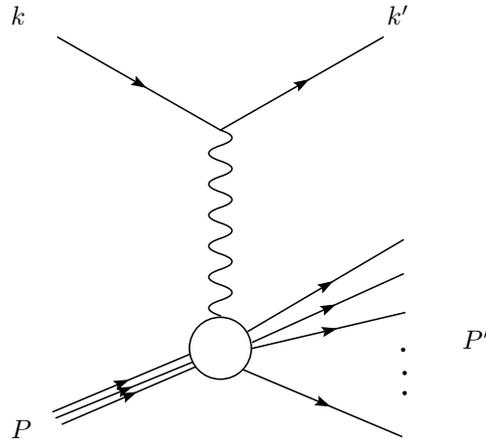


Figura 7: Scattering profondamente anelastico (DIS=Deep Inelastic Scattering)

variabili cinematiche invece che una sola. Questo significa che la sezione d'urto sarà doppio differenziale, cioè una distribuzione in due variabili, mettiamo  $q^2$  e  $W$ , oppure  $\theta$  e  $\omega'$ , dove  $\theta$  è l'angolo di scattering dell'elettrone finale e  $\omega'$  la sua energia. L'espressione per la sezione d'urto è analoga a quella per lo scattering elettrone-muone; la differenza è che non sappiamo dare una espressione precisa per il tensore adronico  $W_{\mu\nu}$ :

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\omega'} = \left(\frac{4\pi\alpha}{q^2}\right)^2 \frac{1}{k \cdot P} 4\pi M L_{\mu\nu} W^{\mu\nu} \frac{d^3k'}{2\omega'(2\pi)^3} \quad (171)$$

Sappiamo dare un'espressione precisa per il tensore leptonic  $L_{\mu\nu}$ :

$$L_{\mu\nu} = \sum_{r,s} j_\mu j_\nu^* = \sum_{r,s} \bar{u}_r(k') \gamma_\mu u_s(k) \bar{u}_s(k) \gamma_\nu u_r(k') = \text{Tr}\{(k' + m) \gamma_\mu (k + m) \gamma_\nu\} = 2[k'_\mu k_\nu + k'_\nu k_\mu + \frac{q^2}{2} g_{\mu\nu}] \quad (172)$$

Del tensore adronico invece sappiamo solo che è una somma sui contributi degli stati finali adronici; tenendo conto dello spazio delle fasi si ha:

$$W^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi M} \delta^4(P + q - P') \sum_x d\text{Lips}_X \langle P | J^\mu(0) | X \rangle \langle X | J^\nu(0) | P \rangle \quad (173)$$

L'invarianza di Lorentz e la parità impongono che il tensore adronico abbia la forma:

$$W^{\mu\nu} = -W_1 g^{\mu\nu} + \frac{W_2}{M^2} P^\mu P^\nu + \frac{W_4}{M^2} q^\mu q^\nu + \frac{W_5}{M^2} (P^\mu q^\nu + q^\mu P^\nu) \quad (174)$$

La conservazione della corrente  $q_\mu W^{\mu\nu} = W^{\mu\nu} q_\nu = 0$  impone le relazioni (**Esercizio**: dimostrarlo):

$$W_5 = -\frac{Pq}{q^2} W_2 \quad W_4 = \left(\frac{Pq}{q^4}\right)^2 W_2 + \frac{M^2}{q^2} W_1 \quad (175)$$

per cui la forma è simile a quella dello scattering elastico (168):

$$W^{\mu\nu} = \frac{W_2(q^2, \nu)}{M^2} [P^\mu - \frac{Pq}{q^2} q^\mu] [P^\nu - \frac{Pq}{q^2} q^\nu] + W_1(q^2, \nu) (-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}) \quad (176)$$

In questo caso però i fattori di forma  $W_1, W_2$  dipendono da due variabili cinematiche e non da una sola. Oltre a  $q^2$ , qui si è scelto la variabile  $\nu \equiv \frac{Pq}{M}$ , che è legata a  $W = P'^2$  dalla conservazione dell'energia:  $P+q = P' \Rightarrow 2Pq = W^2 - M^2 - q^2$ ; nel caso di scattering elastico,  $2Pq = -q^2$ . Nel sistema del laboratorio in cui il protone è inizialmente fermo,  $\nu = \omega - \omega'$  è l'energia persa dall'elettrone.

In definitiva, dalle formule precedenti si ottiene l'espressione per la sezione d'urto profondamente anelastica nel sistema del laboratorio:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\omega'} = \frac{\alpha^2}{4\omega^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left( W_2(q^2, \nu) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1(q^2, \nu) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (177)$$

Poichè si sono scelte le variabili  $q^2, \nu$  per i fattori di forma, è conveniente passare a queste variabili anche per la sezione d'urto, cioè scrivere  $\frac{d^2\sigma}{d\nu dQ^2}$  al posto di  $\frac{d^2\sigma}{d\Omega d\omega}$ . Inoltre convenzionalmente si usa  $Q^2 \equiv -q^2 = 2\omega\omega'(1 - \cos\theta) > 0$  al posto di  $q^2$ . Si ha:

$$\nu = \omega - \omega' \quad Q^2 = 2\omega\omega'(1 - \cos\theta) \quad \Rightarrow \quad dQ^2 d\nu = 2\omega\omega' d\cos\theta d\omega' = \frac{\omega\omega'}{\pi} d\Omega d\omega' \quad (178)$$

per cui:

$$\frac{d^2\sigma}{dQ^2 d\nu} = \frac{\pi\alpha^2}{4\omega^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{\omega\omega'} \left( W_2(Q^2, \nu) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1(Q^2, \nu) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (179)$$

E' istruttivo confrontare questa espressione con quella per scattering elettrone-protone con protone puntiforme (che è identica a quella elettrone-muone) e con quella elettrone-protone elastica cioè con fattore di forma. Le tre sezioni d'urto si possono scrivere nella stessa forma:

$$\frac{d^2\sigma}{dQ^2 d\nu} = \frac{\pi\alpha^2}{4\omega^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{\omega\omega'} \{ \quad (180)$$

dove

$$\{ \}_{e\mu \rightarrow e\mu} = \left( \cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{Q^2}{2m_\mu^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2m_\mu}\right) \quad (181)$$

$$\{ \}_{ep \rightarrow ep} = \left( \cos^2 \frac{\theta}{2} W_2(Q^2) + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} W_1(Q^2) \right) \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M}\right) \quad (182)$$

$$\{ \}_{ep \rightarrow eX} = \left( W_2(Q^2, \nu) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1(Q^2, \nu) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (183)$$

Le  $\delta$  presenti nei primi due casi fissano la variabile  $\nu$  al valore determinato dalla conservazione dell'energia  $P + q = P' \Rightarrow 2Pq + q^2 = 0 \rightarrow \nu = \frac{Pq}{M} = -\frac{q^2}{2M} = \frac{Q^2}{2M}$  e fanno diventare la sezione d'urto un differenziale singolo.

Che cosa ci si aspetta se, andando a valori di  $Q^2$  si scopre che il protone è composto da oggetti puntiformi quasi liberi? In base alle espressioni qui sopra, ci si aspetta che i fattori di forma non dipendano più da *due* variabili indipendenti ( $\nu, Q^2$ ), bensì da *una* sola variabile. Daremo un significato preciso a questa affermazione nel prossimo paragrafo.

## 11.5 Il modello a partoni

Supponiamo che, a valori di  $Q^2 \gg (1\text{GeV})^2$  il protone sia costituito da oggetti puntiformi (quasi) liberi, che chiamiamo partoni. Allora lo scattering inelastico può essere visto come una somma di scattering elastici di oggetti puntiformi, la cui sezione d'urto è data dalla (181). Consideriamo per ora un partone solo, di carica frazionaria  $e_i$  e con impulso  $p \approx xP$ , e quindi massa  $m_i \approx \sqrt{(xP)^2} = xM$ . Confrontando la (181) con la (183) si ottengono per il partone le funzioni di struttura:

$$W_1^i = e_i^2 \frac{Q^2}{4M^2 x^2} \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2Mx}\right) \quad W_2^i = e_i^2 \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2Mx}\right) \quad (184)$$

Nel modello a partoni il partone ha probabilità  $f_i(x)$  di avere frazione di impulso  $x$ . Le distribuzioni  $f_i$  non sono determinate dal modello, ma vanno ricavate dall'esperimento. Per trovare la funzione di struttura del protone occorre sommare su tutti i partoni  $i$ , e integrare la funzione distribuzione, per cui:

$$W_2(\nu, Q^2) = \sum_i \int_0^1 dx f_i(x) e_i^2 \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2Mx}\right) = \sum_i \int_0^1 dx \frac{x}{\nu} f_i(x) e_i^2 \delta\left(x - \frac{Q^2}{2M\nu}\right) = \frac{1}{\nu} \sum_i e_i^2 x_B f_i(x_B) \quad x_B = \frac{Q^2}{2M\nu} \quad (185)$$

e analogamente:

$$W_1(\nu, Q^2) = \frac{1}{M} \sum_i f(x_B) \quad (186)$$

La variabile  $x_B = \frac{Q^2}{2Pq}$  è detta variabile di Bjorken, e nel modello a partoni la conservazione dell'impulso fissa la frazione di impulso  $x$  ad essere uguale a  $x_B$ . Il fatto che le funzioni di struttura dipendano dalla variabile *adimensionale*  $x_B$  è detta proprietà di *scaling* e significa che tali funzioni non variano se scalo contemporaneamente di un fattore  $\beta$  le variabili dimensionate  $Q^2, 2Pq$ . Lo *scaling* significa in generale che una certa variabile scala con le sue dimensioni di massa, cioè se ha dimensioni  $[M]^\alpha$  scala come  $\beta^\alpha$ . Ci aspettiamo quindi che la sezione d'urto, avendo dimensioni

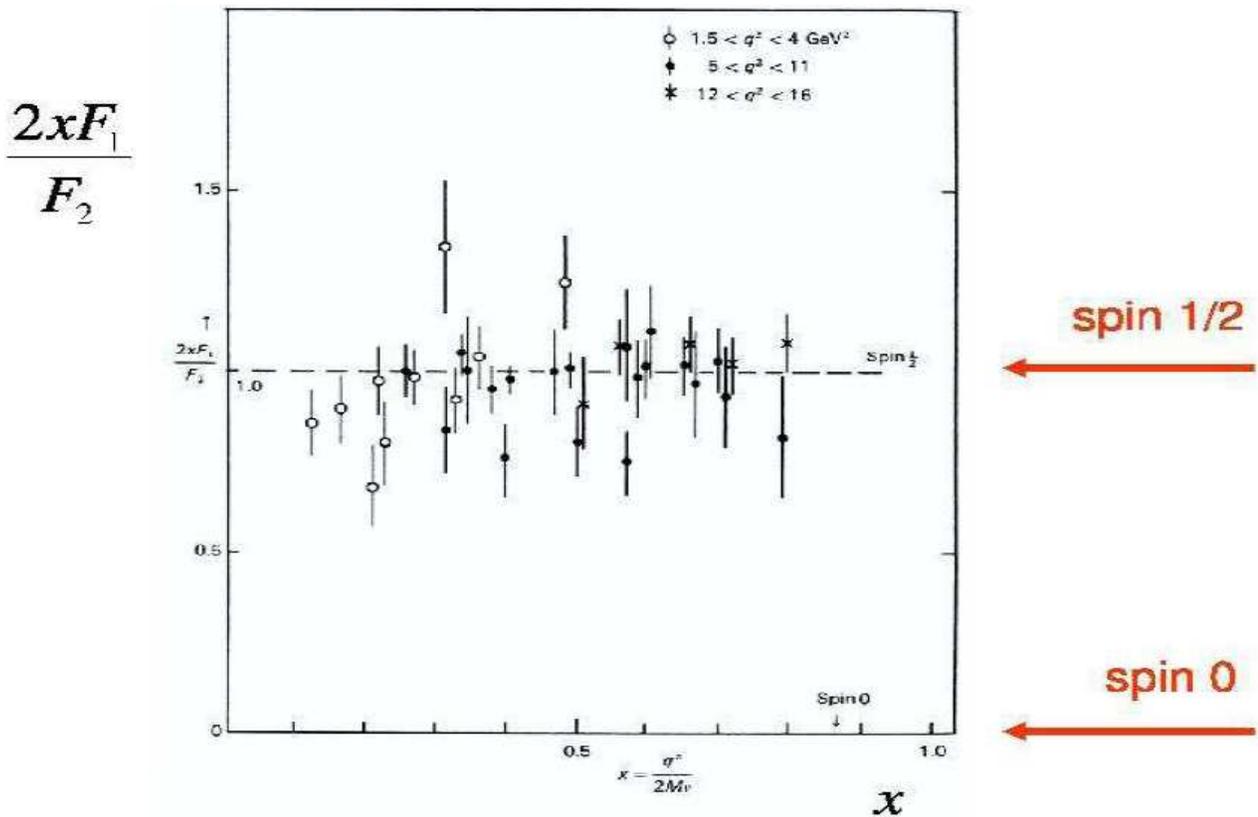


Figura 8: Relazione di Callan-Gross

$[M]^{-2}$ , scali come  $\beta^{-2}$ ; vediamo se è vero. La sezione d'urto, utilizzando le funzioni di struttura del modello a partoni, si scrive:

$$d^2\sigma = \frac{\pi\alpha^2 dQ^2 d\nu}{4\omega^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{\omega\omega'} \sum_i \left\{ \cos^2 \frac{\theta}{2} \frac{1}{\nu} e_i^2 x_B f_i(x_B) + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \frac{1}{M} f_i(x_B) \right\} \quad (187)$$

Un cambiamento di scala significa  $P \rightarrow \beta P, k \rightarrow \beta k, k' \rightarrow \beta k'$  lasciando fissa la massa fisica  $M$ . Per capire come scalano i vari termini in (187) occorre esprimerli in termini di  $P, k, k'$ :

$$\omega = \frac{Pk}{M} \rightarrow \beta^2 \omega \quad \omega' = \frac{Pk'}{M} \rightarrow \beta^2 \omega' \quad \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{q^2 M^2}{(Pk)(Pk')} \rightarrow \beta^{-2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad \nu = \frac{Pq}{M} \rightarrow \beta^2 \nu \quad (188)$$

E' facile vedere a questo punto che  $d^2\sigma \rightarrow \beta^{-2} d^2\sigma$ . Analogamente, per rescaling  $\nu W_2(Q^2, \nu) \equiv F_2$  e  $MW_1(Q^2, \nu) \equiv F_1$  sono invarianti.

Lo scaling è sperimentalmente ben verificato a parte piccole correzioni che sono però ben calcolabili nell'ambito della cromodinamica quantistica (QCD) che è la teoria fondamentale delle interazioni forti.

## 11.6 Il modello a partoni e i quarks

Che cosa sono i partoni che compongono il protone? E' naturale identificarli in prima approssimazione con i quarks, cioè con quegli oggetti che compongono gli adroni secondo un ben definito schema: il modello a quarks (vedi apposita sezione in [?]). In questo modello gli adroni sono costituiti essenzialmente da 3 quarks: u,d,s con definiti numeri quantici di spin, carica, numero barionico e con proprietà definite secondo un'altra simmetria, la simmetria SU(3) di isospin forte. Così ad esempio per un protone, la (185) si scrive:

$$F_2^p(x) = x \left\{ \frac{4}{9} [u^p(x) + \bar{u}^p(x)] + \frac{1}{9} [d^p(x) + \bar{d}^p(x) + s^p(x) + \bar{s}^p(x)] \right\} \quad (189)$$

La vera forza dell'avere introdotto le distribuzioni dei quarks sta nel fatto che queste sono universali, cioè appaiono anche in altri tipi di esperimenti come lo scattering neutrino-protone, il processo di Drell-Yan (vedi più avanti) ecc. Si possono quindi confrontare processi diversi, ad esempio misurando le distribuzioni in un processo e utilizzandole per

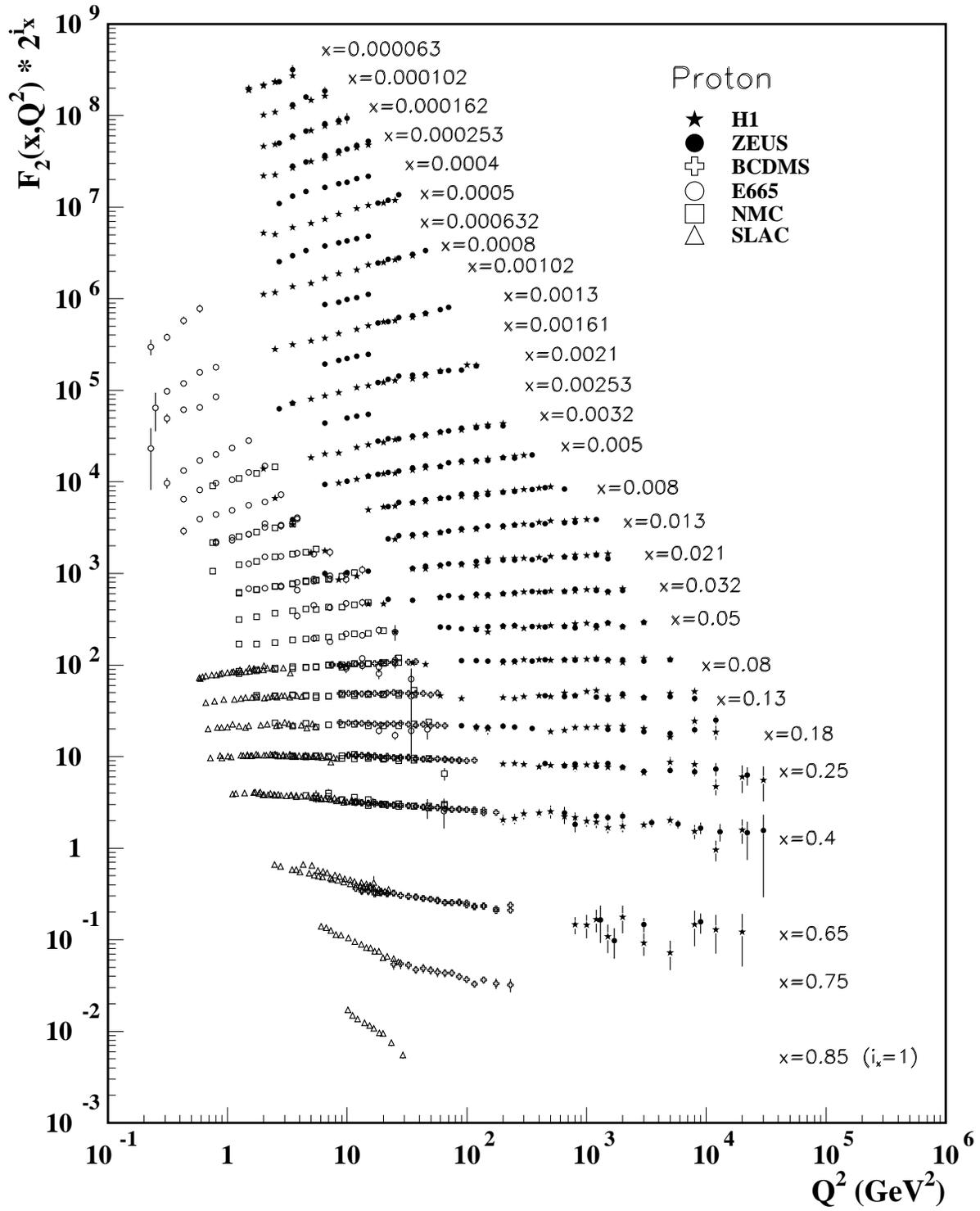


Figura 9: Violazioni di scaling in  $F_2$

fare predizioni in un altro. Inoltre la simmetria di isospin del modello a quark collega le distribuzioni nel neutrone con quelle nel protone:

$$u^p(x) = d^n(x) \equiv u(x) \quad d^p(x) = u^n(x) \equiv d(x) \quad (190)$$

Le distribuzioni dei quarks soddisfano varie *regole di somma*:

- Stranezza del protone =0:

$$\int_0^1 dx [s(x) - \bar{s}(x)] = 0 \quad (191)$$

- Carica totale del protone =1, del neutrone =0

$$\int_0^1 dx \left\{ \frac{2}{3} [u - \bar{u}] - \frac{1}{3} [d - \bar{d}] \right\} = 1 \quad \int_0^1 dx \left\{ \frac{2}{3} [d - \bar{d}] - \frac{1}{3} [u - \bar{u}] \right\} = 0 \quad (192)$$

- Conservazione del momento totale:

$$\int_0^1 dx x [u + \bar{u} + d + \bar{d} + s + \bar{s}] = 1 \quad (193)$$

Quest'ultima regola di somma è pesantemente violata: i quarks portano solo circa la metà del momento del protone, il resto è portato da oggetti neutri. Questo induce a pensare che per il resto il protone sia formato dai gluoni, particelle neutre di spin 1 mediatrici delle interazioni forti.

Per finire, esistono modelli che tentano di dire qualcosa sulle distribuzioni dei quarks. uno dei più noti introduce l'idea di partoni "di valenza" e "del mare". Per esempio nel protone( s sta per "sea"):

$$u = u_v + q_s \quad d = d_v + q_s \quad \bar{u} = \bar{d} = s = \bar{s} = q_s \quad (194)$$

Il numero di distribuzioni indipendenti diventa 3, dalle 6 iniziali, e il modello guadagna quindi in predittività.

## 12 Deep Inelastic Scattering

### 12.1 Cinematica

Il processo é  $e(l) + p(P) \rightarrow e(l') + X(P')$  con, nel sistema del LAB,  $l = \omega(1, 0, 0, 1)$ ,  $l' = \omega'(1, 0, \sin \theta, \cos \theta)$ ,  $P = (M, \mathbf{0})$ . Definisco  $q = l - l'$  con  $q^2 = -2ll' = -4\omega\omega' \sin^2 \frac{\theta}{2} < 0$ . Poichè  $P'^2$  è indeterminato ho 3 invarianti cinematici. Uno è l'energia del processo  $(l+P)^2 \sim 2Pl$ . Gli altri due sono le variabili da cui dipende la sezione d'urto, che posso scegliere ad esempio come  $2Pq$  e  $q^2$ . La sezione d'urto si scrive:

$$d\sigma \sim \frac{\alpha^2 \omega'}{q^4 \omega} d\omega' d\Omega \underbrace{\langle l | J_\mu | l' \rangle \langle l' | J_\nu | l \rangle}_{l_{\mu\nu}} \underbrace{\frac{1}{M} \sum_{P'} \langle P | J_\mu | P' \rangle d\phi_{P'} \langle P' | J_\nu | P \rangle \delta^4(P' - P - q)}_{W_{\mu\nu}} \quad (195)$$

Si ha  $l_{\mu\nu} \sim \text{Tr}\{\not{l}' \gamma_\mu \not{l} \gamma_\nu\} \sim l_\mu l'_\nu + l'_\mu l_\nu - ll' g_{\mu\nu}$  mentre la conservazione della corrente  $q^\mu W_{\mu\nu} = 0$ , l'invarianza di Lorenz e la conservazione della parità impongono la forma

$$W_{\mu\nu}(P, q) = -\left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}\right) W_1(q^2, 2Pq) + \left(p_\mu - \frac{pq}{q^2} q_\mu\right) \left(p_\nu - \frac{pq}{q^2} q_\nu\right) \frac{W_2(q^2, 2Pq)}{M^2} \quad (196)$$

Siccome i termini in  $q_\mu, q_\nu$  di  $W_{\mu\nu}$  non contribuiscono in quanto  $l_{\mu\nu}$  è conservato, è abbastanza semplice calcolare:

$$W_{\mu\nu} l^{\mu\nu} = 2(ll') W_1 + W_2 \left( 2 \frac{(Pl)(Pl')}{M^2} - ll' \right) = 4W_1 \omega \omega' \sin^2 \frac{\theta}{2} + 2W_2 \omega \omega' \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (197a)$$

$$\frac{d\sigma}{d\omega' d\Omega} \sim \frac{\alpha^2}{\omega^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left( 2W_1 \sin^2 \frac{\theta}{2} + W_2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (197b)$$

## 12.2 Scattering elastico

In questo caso (nel limite di grandi energie) si ha  $P^2 = P'^2 = 0$  per cui:

$$W_{\mu\nu} \sim \frac{1}{M} \langle P | J_\mu | P' \rangle d^4 P' \langle P' | J_\nu | P \rangle \delta(P'^2) \delta^4(P' - P - q) = \frac{1}{M} [P_\mu(P+q)_\nu + P_\nu(P+q)_\mu - P(P+q)g_{\mu\nu}] \delta(q^2 + 2Pq) \quad (198)$$

da cui:

$$W_1 = \frac{Pq}{M} \delta(q^2 + 2Pq) = -\frac{q^2}{2M} \delta(q^2 + 2Pq) \quad W_2 = 2M \delta(q^2 + 2Pq) \quad \delta(q^2 + 2Pq) d\omega' \sim \frac{\omega'}{\omega M} \quad (199)$$

e infine:

$$\frac{d\sigma}{\omega} \sim \frac{\alpha^2}{\omega^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left( \frac{\omega'}{\omega} \right) \left[ \cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (200)$$

## 12.3 Scattering elastico con fattore di forma

$$\langle P' | J_\mu | P \rangle = \bar{u}(P') [\gamma_\mu F_1(q^2) + i\sigma_{\mu\nu} \frac{q_\nu}{2M} F_2(q^2)] u(P) \quad (201)$$

## 12.4 Parton model: scaling nella teoria asintoticamente libera

Nel modello a partoni il DIS viene visto come somma incoerente di scattering elastici. Il partone ha una distribuzione in frazione di impulso del protone, cioè una probabilità  $f(x)$  di avere impulso  $p = xP$ . Usando l'espressione (198) per il tensore adronico elastico, si ha:

$$W_{\mu\nu} = \int dx f(x) W_{\mu\nu}^0(P \rightarrow xP, q) = \int dx f(x) [2Mx \frac{P_\mu P_\nu}{M^2} - \frac{Pq}{M} g_{\mu\nu}] \delta(q^2 + 2qPx) = f(x_B) \left[ \frac{Mx_B}{Pq} \frac{P_\mu P_\nu}{M^2} - \frac{g_{\mu\nu}}{2M} \right] \quad (202)$$

avendo omesso di scrivere i termini in  $q_\mu, q_\nu$  che sono fissati dall'invarianza di gauge e avendo introdotto la variabile di Bjorken  $x_B \equiv \frac{-q^2}{2Pq}$ . Si ottiene:

$$W_1 = \frac{f(x_B)}{2M} \quad W_2 = \frac{M}{Pq} x_B f(x_B) \quad \frac{d\sigma}{d\Omega d\omega'} = \frac{\alpha^2}{M\omega^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left[ \frac{f(x_B)}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} + \frac{M^2}{Pq} x_B f(x_B) \cos^2 \frac{\theta}{2} \right] \quad (203)$$

L'affermazione che la sezione d'urto rispetta lo scaling equivale a dire che (lasciando fisse le masse come  $M$ ) le quantità adimensionali non cambiano se riscalo tutti gli invarianti  $Pq \rightarrow \alpha^2 Pq, q^2 \rightarrow \alpha^2 q^2, Pl \rightarrow \alpha^2 Pl$ . Ad esempio quindi la quantità adimensionale  $(Pl)d\sigma$  deve essere invariante. Dalla (203) si ha:

$$(Pl)d\sigma = \alpha^2 \frac{d\omega'}{\omega} \frac{d \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^2 \frac{\theta}{2}} \left[ \frac{f(x_B)}{2} + \frac{M^2 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{Pq \sin^4 \frac{\theta}{2}} x_B f(x_B) \right] \quad (204)$$

Siccome  $\omega = \frac{Pl}{M}, \omega' = \frac{Pl'}{M}, \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{q^2 M^2}{(Pl)(Pl')}$ , sotto rescaling si ha  $\omega \rightarrow \alpha^2 \omega, \omega' \rightarrow \alpha^2 \omega', \sin^2 \frac{\theta}{2} \rightarrow \alpha^{-2} \sin^2 \frac{\theta}{2}, \cos^2 \frac{\theta}{2} \rightarrow \cos^2 \frac{\theta}{2}$  ed è facile vedere che la sezione d'urto rispetta lo scaling.

## 12.5 Altarelli-Parisi 1: fattorizzazione collineare

La prima correzione al risultato del parton model è data dall'emissione di un gluone. Anticipando il risultato finale, si dimostra che le singolarità collineari fattorizzano, dando un contributo  $\propto \log \frac{Q^2}{\mu^2}$  con  $Q^2 = -q^2 > 0$  e  $\mu^2$  un cutoff infrarosso che specifico nel seguito. In concreto, si ha (vedi figura 10):

$$W_{\mu\nu} = \int dx f(x) W_{\mu\nu}^0(xP, q) + \int dy f(y) \alpha_s \log \frac{Q^2}{\mu^2} \int_0^1 dz P(z) W_{\mu\nu}^0(zyP, q) \quad (205)$$

dove la funzione di splitting  $P(z)$  si interpretà come probabilità che il gluone abbia una frazione  $1 - z$  dell'impulso del partone da cui viene emesso. Con un cambio di variabile  $z, y \rightarrow zy = x, y$ , la (205) si riscrive

$$W_{\mu\nu} = \int dx f(x, Q^2) W_{\mu\nu}^0(xP, q) \quad f(x, Q^2) = f(x) + \alpha_s \log \frac{Q^2}{\mu^2} \int_x^1 \frac{dy}{y} P\left(\frac{x}{y}\right) f(y) \quad (206)$$

L'interpretazione è che un quark con frazione di impulso  $y > x$  irradia un gluone e diventa un quark con frazione di impulso  $x$ , con un probabilità  $\sim \log \frac{Q^2}{\mu^2} P\left(\frac{x}{y}\right)$ .

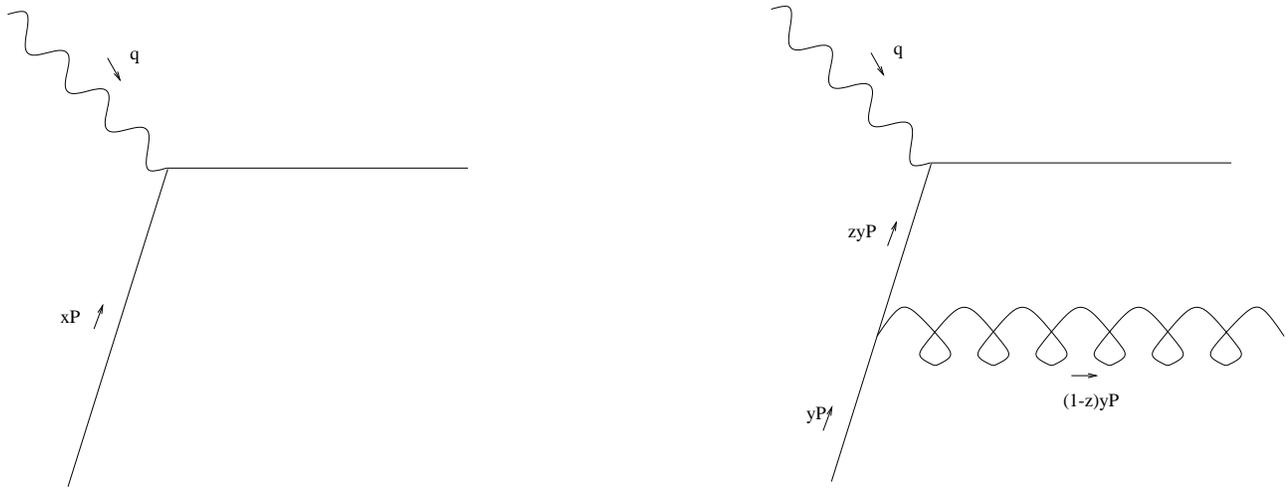


Figura 10: Tree level e prima correzione di QCD nel DIS

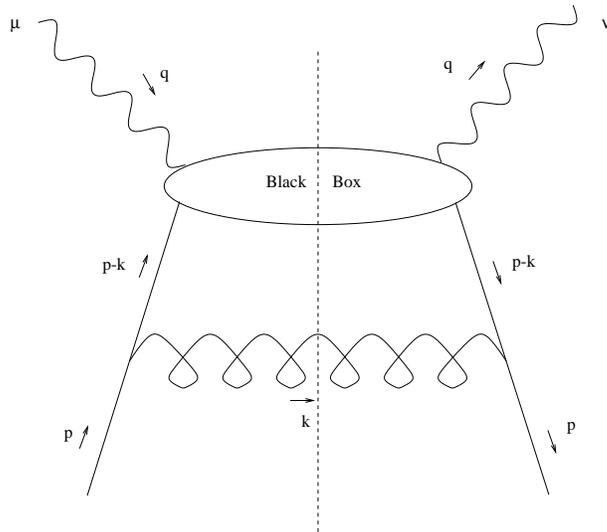


Figura 11: Fattorizzazione collineare

Ragionando un pò più in generale, consideriamo il contributo di un gluone aggiuntivo rispetto al “Black Box” di figura 11, nella regione in cui il gluone è collineare al partone da cui viene emesso. Possiamo scrivere il “Black Box” come

$$W_{\mu\nu}^{BB}(p-k) = \frac{1}{\sqrt{(p-k)^2}} \text{Tr}\{(\not{p}-\not{k})\Gamma_{\mu\nu}(p-k)\} \quad (207)$$

dove  $\Gamma_{\mu\nu}(p-k)$  simboleggia una striscia di matrici di Dirac, e include anche lo spazio delle fasi delle particelle finali nel Black Box. Vogliamo dimostrare che nella regione in cui il gluone è circa collineare al quark da cui viene emesso, il contributo del gluone stesso fattorizza. Cioè, introducendo la cinematica (valida per  $\mathbf{k}_\perp^2 \ll -q^2, 2pq$ )

$$p = E(1, \mathbf{0}, 1) \quad k \sim \left( (1-z)E, \mathbf{k}_\perp, (1-z)E - \frac{\mathbf{k}_\perp^2}{2(1-z)E} \right) \quad kp \sim \frac{\mathbf{k}_\perp^2}{2(1-z)} \quad (208)$$

vogliamo scrivere, tenuto conto che  $p-k \sim zp$ :

$$W_{\mu\nu}(p) \sim \alpha_s \log \frac{Q^2}{\mu^2} \int_0^1 dz P(z) W_{\mu\nu}^{BB}(zp) \quad (209)$$

da cui, riscaldando  $p = yP$  e tenendo conto della distribuzione di probabilità  $f(y)$ , si ottiene immediatamente la (205).

Utilizzando  $\not{a}\not{b} = -\not{b}\not{a} + 2(ab)$  si ottiene:

$$\text{Tr}\{(\not{p}-\not{k})\not{\epsilon}\not{p}\not{\epsilon}(\not{p}-\not{k})\Gamma_{\mu\nu}\} = \text{Tr}\{[k\not{p}\epsilon^2 + 2(p\epsilon)(\not{p}-\not{k})\not{\epsilon}(\not{p}-\not{k})\Gamma_{\mu\nu}\} = \text{Tr}\{[-2\epsilon^2(pk)\not{k} + 4(p\epsilon)^2(\not{p}-\not{k}) + 4(p\epsilon)(pk)\not{\epsilon}]\Gamma_{\mu\nu}\} \quad (210)$$

Prendiamo le polarizzazioni una ( $\epsilon_1$ ) nel piano  $\mathbf{p}, \mathbf{k}$  e l'altra ( $\epsilon_2$ ) ortogonale a questo piano, con  $\epsilon_1^2 = \epsilon_2^2 = -1$ . Si ha  $p\epsilon_2 = 0$  e  $|p\epsilon_1| \approx E\theta$  nella regione collineare. Interessano solo i termini più singolari nella regione collineare, cioè in questo caso quelli che vanno come  $\theta^2$  al numeratore; il termine in  $(p\epsilon)(pk) \propto \theta^3$  nella (210) è quindi trascurabile rispetto ai termini in  $(pk), (p\epsilon)^2$ , entrambi di ordine  $\theta^2$ . Inoltre  $\not{k} = (1-z)\not{p} + O(\theta)$  per cui si ottiene:

$$\text{Tr}\{(\not{p}-\not{k})\not{\epsilon}\not{p}\not{\epsilon}(\not{p}-\not{k})\Gamma_{\mu\nu}\} \approx [-2\epsilon^2(pk)\frac{1-z}{z} + 4(p\epsilon)^2]\text{Tr}\{(\not{p}-\not{k})\Gamma_{\mu\nu}\} \quad (211)$$

a meno di termini di ordine superiore in  $\theta$ , rendendo evidente la fattorizzazione collineare. Sommando sulle polarizzazioni e per quanto visto sopra, si ha:

$$\sum_{i=1,2} [-2\epsilon_i^2(pk)\frac{1-z}{z} + 4(p\epsilon_i)^2] = 2E^2\theta^2\left[\frac{1+z^2}{z}\right] = 2\frac{\mathbf{k}_\perp^2}{(1-z)^2}\left[\frac{1+z^2}{z}\right] \quad (212)$$

$$\frac{d^3\mathbf{k}}{\omega} \frac{1}{(p-k)^4} \sim \frac{1}{E^2} \frac{dz}{1-z} \frac{d\theta^2}{\theta^4} = (1-z)dz \frac{d\mathbf{k}_\perp^2}{\mathbf{k}_\perp^4} \quad (213)$$

dove l'espressione a destra tiene conto dei propagatori fermionici e dello spazio delle fasi del gluone. L'espressione per il tensore adronico è quindi

$$W_{\mu\nu}(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2}} \sum_\epsilon \text{Tr}\{(\not{p}-\not{k})\not{\epsilon}\not{p}\not{\epsilon}(\not{p}-\not{k})\Gamma_{\mu\nu}\} \sim \alpha_s \int \frac{d\mathbf{k}_\perp^2}{\mathbf{k}_\perp^2} \frac{1+z^2}{1-z} dz \frac{1}{z\sqrt{p^2}} \text{Tr}\{(\not{p}-\not{k})\Gamma_{\mu\nu}\} \quad (214)$$

che è esattamente nella forma (209) e definisce la probabilità di splitting  $P(z) = \frac{1+z^2}{1-z}$ . La variabile  $z$  varia fra 0 e 1, in quanto nella regione collineare  $(p-k)^2 \approx k^2 = 0$  e quindi  $z$  ha l'interpretazione di frazione di energia portata via dal quark dopo l'emissione del gluone. Resta l'ultimo passo, un pò delicato, che consiste nel cercare estremo inferiore e superiore per  $\mathbf{k}_\perp$ . Un ragionamento un pò rozzo, ma sostanzialmente corretto, è il seguente: Il logaritmo collineare viene generato nella regione  $\mathbf{k}_{\perp m}^2 \ll \mathbf{k}_\perp^2 \ll \mathbf{k}_{\perp M}^2$ ; ad esempio cambiare  $\mathbf{k}_{\perp m}^2 \rightarrow 5\mathbf{k}_{\perp m}^2, \mathbf{k}_{\perp M}^2 \rightarrow \frac{1}{5}\mathbf{k}_{\perp M}^2$  non cambia l'andamento logaritmico leading. Adesso, per quanto riguarda l'estremo superiore, l'unica scala presente è  $Q^2 = -q^2$ : infatti nella regione del DIS stiamo facendo il limite  $\frac{Q^2}{M^2} \rightarrow \infty, \frac{2Pq}{M^2} \rightarrow \infty$  con  $M$  fisso e il rapporto  $x_B = \frac{Q^2}{2Pq}$  fisso. Precisare però un pò meglio il limite superiore non è però semplice, inquanto dipende, oltre che da  $Q^2$ , anche dalla frazione di impulso del protone iniziale che il quark possiede e dall'altro invariante cinematico indipendente, cioè dell'energia nelcentro di massa del sistema protone-elettrone iniziali,  $2Pl$ . Ad esempio nel sistema del centro di massa del sistema fotone-partone, il  $\mathbf{k}_\perp^2$  massimo è evidentemente il valore della massa invariante, cioè  $(q+yP)^2 = Q^2(\frac{y}{x_B} - 1)$ , Questa quantità è di ordine  $Q^2$ , però va a 0 quando  $y \rightarrow x_B$ . Questo è facilmente comprensibile, perchè l'ultimo quark, cioè quello che si attacca al fotone, ha frazione di impulso fissata dalla onshellness del quark emesso  $(q+xP)^2 = 0$  ad essere  $x = x_B$ . Quindi se  $y = x_B$  non c'è spazio delle fasi per il gluone. Ad ogni modo per trovare il valore preciso dell'estremo superiore bisogna tenere conto che il sistema di riferimento discusso finora non coincide con quello nel

centro di massa di fotone-quark e quindi bisogna tener conto del boost. L'espressione precisa di  $\mathbf{k}_{\perp M}^2$  in funzione di  $q^2, Pl, Pq$  non sono riuscito a trovarla. Per quanto riguarda il limite inferiore, in realtà il propagatore del quark è proporzionale a  $(p-k)^2 = p^2 - 2kp$ . Il limite inferiore per  $(p-k)^2$  si ha quando il gluone è esattamente collineare, e  $2kp = 2\omega(E - |\mathbf{p}|) \approx p^2 \frac{\omega}{E}$ ;  $(p-k)^2 \approx p^2(1 + \frac{\omega}{E}) = p^2 z$ , ed è quindi dell'ordine dell'offshellness del quark  $p^2$ . A sua volta, questa non è 0 perchè il quark è legato all'interno del protone. Difficile dare un valore, ma l'ordine di grandezza è determinato dalla scala delle interazioni forti che legano i quark,  $\Lambda_{QCD}$ .

La probabilità  $P(z)$  così definita è in realtà divergente (singolare IR) quando  $z \rightarrow 1$ . Questo perchè non ho tenuto conto dei virtuali. La procedura corretta è:

- scegliere un regolatore infrarosso (ad esempio, massa del gluone)
- calcolare reali e virtuali col regolatore scelto
- sommare reali e virtuali

E' possibile trovare la distribuzione complessiva senza necessità di fare il calcolo, tenendo conto che i virtuali sono proporzionali a  $\delta(1-z)$ , e che deve essere  $\int_0^1 P(z) = 0$  in quanto il termine di tree level,  $\delta(1-z)$ , ha 1 come integrale e quindi esaurisce l'unitarietà. Chiamando  $\varepsilon$  il regolatore IR (il risultato non dipende da come regolarizzo), avrò:

$$P(z) = \frac{1+z^2}{1-z+\varepsilon} + f(\varepsilon)\delta(1-z) \quad \int_0^1 P(z) = 0 \Rightarrow f(\varepsilon) = \frac{3}{2} - 2 \log \varepsilon + O(\varepsilon) \quad (215)$$

e la distribuzione cercata è quindi:

$$P(z) = \left[ \frac{1+z^2}{1-z+\varepsilon} - 2\delta(1-z) \log \varepsilon \right] + \frac{3}{2}\delta(1-z) \equiv \frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2}\delta(1-z) \quad (216)$$

dove si è definita la distribuzione:

$$\int_0^1 \frac{g(z)}{(1-z)_+} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 g(z) \left[ \frac{1}{1-z+\varepsilon} - \delta(1-z) \log \varepsilon \right] = \int_0^1 \frac{g(z) - g(0)}{1-z} \quad (217)$$

## 12.6 Altarelli-Parisi 2: equazioni di evoluzione

La (206) è la correzione perturbativa a  $f(x)$  al primo ordine in  $\alpha_s$ . Derivando rispetto a  $Q^2$  questa equazione si ottiene:

$$\frac{\partial f(x, Q^2)}{\partial \log Q^2} = \alpha_s \int_x^1 \frac{dy}{y} P\left(\frac{x}{y}\right) f(y, Q^2) + O(\alpha_s^2) \quad (218)$$

avendo tenuto conto che  $f(x) = f(x, Q^2) + O(\alpha_s)$ . L'equazione di ricorrenza (218) è in realtà valida a tutti gli ordini della teoria perturbativa. Dimostrarlo però non è affatto banale e implica un ordinamento, ad esempio in  $\mathbf{k}_{\perp}$ . In una gauge fisica si può argomentare (ma sarà vero?) che i diagrammi dominant sono i "ladder", escludendo quindi tutta una serie di diagrammi: i diagrammi incrociati, i nonabeliani e quelli con diversi tagli di unitarietà. Boh, supponendo che sia vero, è facile vedere che i ladder sono ordinati in  $\mathbf{k}_{\perp}$ . A parte il solito argomento di estrarre la singolarità massima, è facile vedere che il  $\mathbf{k}_{\perp}$  del primo gluone emesso cutoffa quello del secondo, e così via. Infatti il valore minimo di  $-(p_2 - k_2)^2 = -p^2 + 2kp$  si ha quando  $kp = 0$  e vale  $-p^2$ . Per il primo quark,  $-p^2 = \mu^2$  cutoff IR. I quark successivi hanno impulso  $\sim zP - \mathbf{k}_{\perp}$ ;  $(zP - \mathbf{k}_{\perp})^2 = -\mathbf{k}_{\perp}^2$  per cui la singolarità del propagatore del secondo quark è cutoffata dal  $\mathbf{k}_{\perp}$  del primo gluone emesso, e così via. A questo punto si può ragionare in vari modo ma forse il modo più intuitivo di ricavare la (206) è quello di considerare la variazione della funzione di distribuzione  $\Delta f$  indotta da una variazione del cutoff inferiore  $\mu^2$ . A causa dell'ordinamento, tale differenza è dovuta a un gluone con  $\mathbf{k}_{\perp}^2$  compreso fra  $\mu^2 - \Delta\mu^2$  e  $\mu^2$ , che viene emesso con probabilità proporzionale a  $P(z) \frac{d\mathbf{k}_{\perp}^2}{\mathbf{k}_{\perp}^2}$  (vedi figura 12). Inoltre la conservazione dell'impulso forza la relazione  $zy = x_B$  a causa della  $\delta(q^2 + 2zyPq) = \frac{1}{2Pq} \delta(zy - x_B)$ . Si ha quindi:

$$f(x, \mu^2 - \Delta\mu^2) = f(x, \mu^2) + \alpha_s \frac{\Delta\mu^2}{\mu^2} \int_0^1 dz P(z) \int_0^1 f(y, \mu^2) \delta(zy - x) \quad (219)$$

Passando agli infinitesimi, si ricava dunque:

$$\frac{\partial f(x, \frac{Q^2}{\mu^2})}{\partial \log Q^2} = -\frac{\partial f(x, \frac{Q^2}{\mu^2})}{\partial \log \mu^2} = \alpha_s \int_{x_B}^1 \frac{dz}{z} P(z) f\left(\frac{x}{z}, \frac{Q^2}{\mu^2}\right) = \alpha_s \int_{x_B}^1 \frac{dy}{y} P\left(\frac{x}{y}\right) f\left(y, \frac{Q^2}{\mu^2}\right) \quad (220)$$

avendo tenuto conto che siccome  $f$  dipende solo dal rapporto fra  $Q^2$  e  $\mu^2$ , la derivata rispetto a  $Q^2$  e quella rispetto a  $\mu^2$  sono uguali ma con segno opposto. Notare che avrei potuto ragionare tramite la variazione rispetto a  $Q^2$ , invertendo la posizione di gluone e "box" con la funzione  $f$  nella fig. 12. In tal caso però avrei dovuto dimostrare la fattorizzazione collineare in maniera diversa.

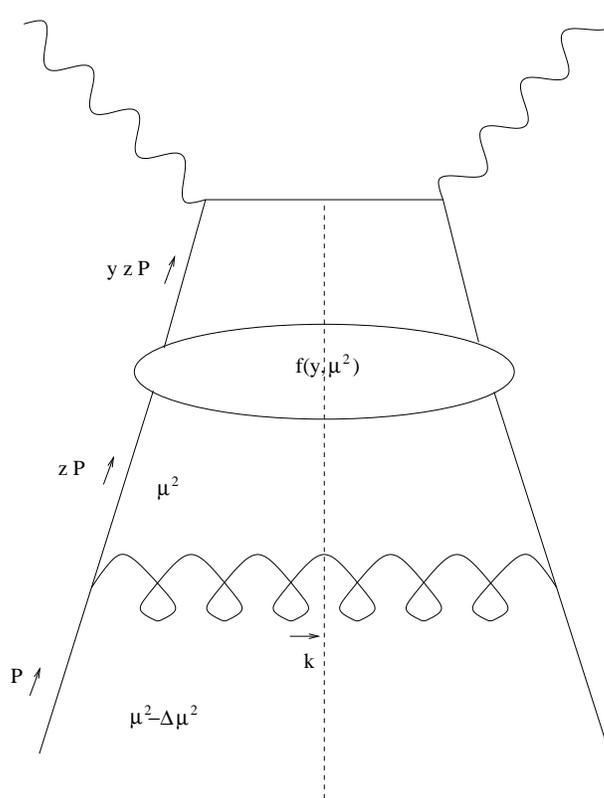


Figura 12: Equazioni di evoluzione di AP

### 13 Altarelli Parisi 3: struttura di colore e mixing gluone-quark

Consideriamo prima il fatto che un gluone, presente nel protone con distribuzione  $f_g$ , può convertirsi in un quark con probabilità  $P_{qg}(z)$ . Il diagramma è esattamente analogo a quello della fig. 12 ma con un gluone iniziale di impulso  $P$  che si converte in un quark con impulso  $zP$  e uno con impulso  $k$ . Con considerazioni analoghe a quelle sopra, si ottiene:

$$\frac{1}{\alpha_s} \frac{\partial f_q(x, \frac{Q^2}{\mu^2})}{\partial \log Q^2} = \int_{x_B}^1 \frac{dz}{z} P_{qq}(z) f_q\left(\frac{x}{z}, \frac{Q^2}{\mu^2}\right) + \int_{x_B}^1 \frac{dz}{z} P_{qg}(z) f_g\left(\frac{x}{z}, \frac{Q^2}{\mu^2}\right) \equiv P_{qq} \otimes f_q + P_{qg} \otimes f_g \quad (221)$$

La funzione di splitting  $P_{qg}$  si ottiene con un calcolo diretto, oppure notando che si può ottenere dalla parte di emissione reale della  $P_{qq}$  (i virtuali non ci sono) con la sostituzione  $z \rightarrow 1 - z$ .

La struttura di colore è piuttosto banale e dà solo dei fattori numerici. Innanzitutto, a causa del confinamento, le probabilità di trovare nel protone un quark rosso, blu o giallo sono uguali; si media quindi sui 3 possibili colori iniziali. La stessa cosa vale per gli 8 gluoni. Dopodichè, la cancellazione fra reali e virtuali avviene anche senza mediare sul colore in quanto

### Riferimenti bibliografici

- [1] S. Durr *et al.*, Science 322:1224-1227,2008 (arXiv:0906.3599v1 [hep-lat]).
- [2] S. Weinberg, "The quantum theory of fields", Cambridge University Press.
- [3] M.E. Peskin, D.V. Schroeder, An Introduction to quantum field theory, Addison-Wesley publishing company.
- [4] M. Kaku, "Quantum Field Theory- A modern introduction", Oxford University Press
- [5] C. Itzykson and J. Zuber, "Quantum Field Theory", McGraw-Hill
- [6] T. Cheng and L. Li, "Gauge Theory of Elementary Particle Physics", Oxford Science Publications
- [7] J. Wess and J. Bagger, "Supersymmetry and Supergravity", Princeton University Press.

[8] S. P. Martin, “A Supersymmetry Primer”, hep-ph/9709356