

Teoria delle Interazioni Forti

Paolo Ciafaloni

A.A. 2017 - 2018

Contents

1	Richiami introduttivi	3
1.1	Notazioni	3
1.2	Trasformazioni di Lorentz	4
1.3	Teoria dei campi classica	6
1.4	Equazioni del moto per scalare, fermione, vettore	7
1.5	Quantizzazione dei campi scalari e fermionici	10
1.6	Propagatori (o funzioni di Green)	11
2	Matrice S, sezioni d'urto, decadimenti	13
2.1	Unitarietà	17
3	Quantum ChromoDynamics	17
3.1	Lagrangiana di QCD	17
3.2	Quantizzazione di QED e QCD	20
3.3	Regole di Feynman	22
3.4	Sezione d'urto per diffusione elastica $ut \rightarrow ut$	24
4	Rinormalizzazione	27
4.1	Integrali divergenti e regolarizzazione	27
4.2	Rinormalizzazione	29
4.3	Beta function della QCD	30
4.4	RGE	32
4.5	Dimensioni anomale	36
5	Divergenze IR: cancellazioni, risommazioni	37
5.1	Correzioni virtuali	37
5.2	Correzioni reali	40
6	Sezione d'urto elettrone-protone	41
6.1	Cinematica	41
6.2	Scattering puntiforme	42
6.3	Fattori di forma	43
6.4	Limite non relativistico della corrente: il momento magnetico dell'elettrone	46
6.5	Scattering elastico elettrone-protone	49
6.6	Scattering inelastico elettrone-protone	50
6.7	Il modello a partoni	54
6.8	Il modello a partoni e i quarks	55
6.9	Altarelli-Parisi 1: fattorizzazione collineare	57
6.10	Altarelli-Parisi 2: equazioni di evoluzione	60

6.11	Altarelli Parisi 3: struttura di colore e mixing gluone-quark	62
6.12	Altarelli Parisi 3: Initial Conditions	63
6.13	Altarelli Parisi 4: momenti	63
7	DIS e OPE	67
7.1	Operator product expansion	67
7.2	Singularità dei campi liberi e Bjorken scaling	69
7.3	DIS e $T[J_\mu J_\nu]$	72
7.4	Calcolo delle dimensioni anomale	74
A	Appendice	76
A.1	Costruzione di tensori di ordine n	76
A.2	Relazioni di dispersione	78

1 Richiami introduttivi

1.1 Notazioni

Per i quadri e trivettori uso le notazioni: \mathbf{p} è un trivettore e $p = (p_0, \mathbf{p}) = (p_0, p_1, p_2, p_3)$ un quadrivettore. Analogamente $x = (x_0, \mathbf{x})$. In linea generale uso le lettere greche $\alpha, \beta, \mu, \nu, \dots$ per gli indici di Lorentz che vanno da 0 a 3: $\mu = 0, 1, 2, 3$. Per gli indici spaziali che vanno da 1 a 3 uso invece i, j, k ; ad esempio $i = 1, 2, 3$. Indico i versori con $\hat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$. Inoltre $g_{\mu\nu} = \text{Diag}(1, -1, -1, -1)^*$. Le matrici di Pauli e di Dirac sono date da:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu} \quad \{\gamma_\mu, \gamma_5\} = 0 \quad (3)$$

$$\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + i\epsilon_{ijk}\sigma_k \quad \gamma_\mu\gamma_\nu = g_{\mu\nu} + \frac{[\gamma_\mu, \gamma_\nu]}{2} \quad (4)$$

Sono qui omesse le matrici identità; ad esempio con $\sigma_i\sigma_j = \delta_{ij} + \dots$ si intende $\sigma_i\sigma_j = I \delta_{ij} + \dots$ dove I è la matrice identità 3×3 . Analogamente, $\gamma_\mu\gamma_\nu = I g_{\mu\nu} + \dots$ dove I è la matrice identità 4×4 . In fisica delle alte energie si usa un sistema di unità di misura in cui $\hbar = c = 1$. In questo modo si evita di portarsi dietro \hbar e c nei calcoli. Massa ed energia, essendo $c = 1$, si misurano

*La notazione $\text{Diag}(a,b,c,\dots)$ indica una matrice diagonale con gli elementi specificati in parentesi sulla diagonale. Il tensore metrico $g_{\mu\nu}$ è quindi una matrice 4×4 diagonale con gli elementi $(1, -1, -1, -1)$ sulla diagonale.

entrambe in unità di energia eV . Per tornare a unità di misura usuali occorrono due costanti fisiche dimensionate, ad esempio:

$$c \approx 3 \cdot 10^8 m/s \quad \hbar c \approx 200 \text{ MeV fm} \quad 1 \text{ fm} = 10^{-15} m \quad (5)$$

Esempi (definiamo le dimensioni di massa $[M]$, lunghezza $[L]$, energia $[E]$ ecc):

- Una velocità $v = 0.3$ corrisponde a $0.3 c \approx 9 \cdot 10^7 m/s$
- Le energie si misurano in eV. Siccome $\hbar c = [E][L] = 1$, le lunghezze si misurano in eV^{-1} , e siccome $c = 1$ il tempo si misura in eV^{-1} .
- Una massa di 1 GeV come quella del protone corrisponde a $\frac{1 \text{ GeV}}{(3 \cdot 10^8 m/s)^2} = \frac{1.6 \cdot 10^{-10} J}{(3 \cdot 10^8 m/s)^2} \approx 1.8 \cdot 10^{-27} kg$

1.2 Trasformazioni di Lorentz

Una trasformazione di Lorentz lungo l'asse delle x è definita da (v è la velocità relativa dei sistemi di riferimento):

$$x' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(x - vt) \quad t' = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(t - vx) \quad y' = y \quad z' = z \quad (6)$$

ed è tale che $t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2$. Più in generale, definito un quadrivettore (x_0, x_1, x_2, x_3) , le trasformazioni di Lorentz sono tutte quelle che lasciano invariante la norma $x^2 \equiv x_\mu x^\mu = x_\mu g^{\mu\nu} x_\nu = x_0^2 - \mathbf{x}^2$. Si definiscono quantità con indici in alto $x^\mu \equiv g^{\mu\nu} x_\nu$ di modo che $x^2 = x_\mu x^\mu$. Da un punto di vista formale, le trasformazioni di Lorentz formano un gruppo (detto anche $SO(3,1)$) che si può rappresentare con matrici Λ reali 4×4 : $x'_\mu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu$. Ad esempio le usuali rotazioni spaziali $\mathbf{x}' = \mathbf{R}\mathbf{x}$ con $\mathbf{R}^t \mathbf{R} = 1$ appartengono ovviamente al gruppo di Lorentz, così come la (6) e le sue generalizzazioni lungo altre direzioni. Un tensore a n indici si trasforma come $T'_{i_1 i_2 \dots i_n} = \Lambda_{i_1}^{j_1} \Lambda_{i_2}^{j_2} \dots \Lambda_{i_n}^{j_n} T_{j_1 j_2 \dots j_n}$. Le matrici Λ devono lasciare invariato il tensore metrico $g_{\mu\nu}$. Infatti:

$$x^2 = x'^2 \Rightarrow x_\alpha g^{\alpha\beta} x_\beta = g^{\mu\nu} \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta x_\alpha x_\beta \quad \forall x \Rightarrow g^{\alpha\beta} = g^{\mu\nu} \Lambda_\mu^\alpha \Lambda_\nu^\beta \quad (7)$$

notare che i quadrivettori con indici in alto trasformano in maniera diversa da quelli con indici in basso. Dalle definizioni sopra è infatti facile vedere che $x_\mu \rightarrow \Lambda_\mu^\nu x_\nu \Rightarrow x^\mu \rightarrow \Lambda^\mu_\nu x^\nu$ con $\Lambda^\mu_\nu = g^{\mu\alpha} g_{\nu\beta} \Lambda_\alpha^\beta$. In concreto, se prendiamo ad esempio la (6) si ha ($\gamma = (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}}$):

$$x_1 \rightarrow \gamma(x_1 - vx_0), x_0 \rightarrow \gamma(x_0 - vx_1) \Rightarrow x^1 \rightarrow \gamma(x^1 + vx^0), x^0 \rightarrow \gamma(x^0 + vx^1) \quad x_0 x^0 + x_1 x^1 \rightarrow x_0 x^0 + x_1 x^1 \quad (8)$$

Allo stato attuale delle conoscenze, le interazioni fondamentali sono invarianti sotto il gruppo di trasformazioni $x'_\mu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu + a_\mu$ con a_μ quadrivettore costante; queste trasformazioni costituiscono il gruppo di Poincaré. Le particelle elementari sono "rappresentazioni irriducibili del gruppo

di Poincaré", costituito da trasformazioni di Lorentz (Λ) e traslazioni (a). In altre parole, esattamente come in Meccanica quantistica, gli autostati sono classificabili come rappresentazioni irriducibili del gruppo di simmetria dell'hamiltoniana: vedi ad esempio il momento angolare per l'atomo di idrogeno. Rimandando a [1] per una descrizione dettagliata delle rappresentazioni, mi limito a dire alcune caratteristiche fondamentali:

- Le particelle sono classificate con un indice continuo p , l'impulso, e con un indice discreto di spin s . L'invarianza per traslazione ha come conseguenza che la dipendenza spaziotemporale per una particella libera è quella di onda piana $\sim e^{-ipx}$.
- L'indice di spin assume valori $s = 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \dots$. Una particella massiva ha, come ci si aspetterebbe, $2s + 1$ gradi di libertà. Tuttavia una particella di massa nulla ha due soli gradi di libertà qualunque sia il valore di $s \geq \frac{1}{2}$, che sono detti elicità.

In questo corso tratteremo solo particelle di spin 0 (scalari), spin $\frac{1}{2}$ (fermioni), spin 1 (bosoni vettori), le cui funzioni d'onda, a meno di una costante di normalizzazione, sono:

$$\text{scalare } e^{-ipk} \quad \text{fermione } u_\alpha(p)e^{-ipx} \alpha = 1, 2 \quad \text{vettore } \epsilon_\mu(p)e^{-ipx} \mu = 0, 1, 2, 3 \quad (9)$$

con le seguenti proprietà sotto trasformazioni di Lorentz:

$$u_\delta \rightarrow M_{\delta\gamma}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})u_\gamma \quad \epsilon_\mu \rightarrow \Lambda_\mu^\nu \epsilon_\nu \quad (10)$$

Le trasformazioni di Lorentz sono descritte dall'operatore $\Lambda = \exp[i(\mathbf{J}_+ \boldsymbol{\theta}_+ + \mathbf{J}_- \boldsymbol{\theta}_-)]$ dove gli operatori \mathbf{J}_\pm soddisfano l'algebra di $SU(2)$ commutando fra loro, e inoltre $\boldsymbol{\theta}_+ = \boldsymbol{\alpha} - i\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\theta}_- = \boldsymbol{\theta}_+^* = \boldsymbol{\alpha} + i\boldsymbol{\beta}$; i parametri $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$, reali, descrivono rispettivamente le rotazioni e i boost. Il gruppo è quindi isomorfo a $SU(2) \otimes SU(2)$ e la rappresentazione fondamentale è descritta da spinori di Weyl a due componenti $\psi_L = (\frac{1}{2}, 0)$ e $\psi_R = (0, \frac{1}{2})$ che trasformano come:

$$\psi_L \rightarrow e^{i\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\boldsymbol{\alpha} + \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\boldsymbol{\beta}}\psi_L \quad \psi_R \rightarrow e^{i\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\boldsymbol{\alpha} - \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\boldsymbol{\beta}}\psi_R \quad (11)$$

Gli spinori che trasformano come sopra sono detti avere "chiralità di tipo left" e "chiralità di tipo right". Si può passare da una rappresentazione all'altra usando il tensore metrico reale antisimmetrico $\varepsilon \equiv i\sigma_2$, $\varepsilon^2 = -1$. Infatti, utilizzando $\sigma_2\sigma_i^*\sigma_2 = -\sigma_i$:

$$\psi_L \rightarrow e^{i\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\boldsymbol{\alpha} + \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\boldsymbol{\beta}}\psi_L \Rightarrow \psi_L^c \equiv i\sigma_2\psi_L^* \rightarrow i\sigma_2 e^{-i\frac{\boldsymbol{\sigma}^*}{2}\boldsymbol{\alpha} + \frac{\boldsymbol{\sigma}^*}{2}\boldsymbol{\beta}}(-i\sigma_2)(i\sigma_2)\psi_L^* = e^{i\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\boldsymbol{\alpha} - \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\boldsymbol{\beta}}\psi_L^c \quad (12)$$

Gli scalari di Lorentz si possono scrivere usando due spinori di tipo left secondo la decomposizione $(\frac{1}{2}, 0) \otimes (\frac{1}{2}, 0) = (0, 0) + (1, 0)$ oppure in maniera analoga con due spinori tipo right. La combinazione giusta è $\psi_L \varepsilon \psi_L, \psi_R \varepsilon \psi_R$. Infatti la relazione fra le matrici di Pauli si può anche scrivere $\sigma_i^t \sigma_2 = -\sigma_2 \sigma_i$ da cui

$$\psi_L^t \sigma_2 \psi_L \rightarrow \psi_L^t e^{i\frac{\boldsymbol{\sigma}^t}{2}\boldsymbol{\alpha} + \frac{\boldsymbol{\sigma}^t}{2}\boldsymbol{\beta}} \sigma_2 e^{i\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\boldsymbol{\alpha} + \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\boldsymbol{\beta}} \psi_L = \psi_L^t \sigma_2 e^{i\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\boldsymbol{\alpha} + \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\boldsymbol{\beta}} e^{i\frac{\boldsymbol{\sigma}^t}{2}\boldsymbol{\alpha} + \frac{\boldsymbol{\sigma}^t}{2}\boldsymbol{\beta}} \psi_L = \psi_L^t \sigma_2 \psi_L \quad (13)$$

Per vedere come trasformano i quadrivettori, ricordiamo che i trivettori spaziali A_a trasformano sotto rotazioni come

$$A'_a \sigma_a = U A_a \sigma_a U^\dagger \quad U = e^{i \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \boldsymbol{\alpha}} \Rightarrow A'_a A'_a = \text{Tr}\{A'_a \sigma_a A'_a \sigma_a\} = \text{Tr}\{U A_a \sigma_a U^\dagger U A_a \sigma_a U^\dagger\} = A_a A_a \quad (14)$$

Si può verificare direttamente con l'algebra delle matrici di Pauli che effettivamente $A'_a = (\mathcal{R}A)_a$ con \mathcal{R} matrice ortogonale che descrive la rotazione di parametri $\boldsymbol{\alpha}$. Siccome $\psi^\dagger \sigma_a A_a \psi$ è invariante se $\psi \rightarrow U\psi$, $\psi^\dagger \sigma_a \psi$ deve trasformarsi come un vettore. D'altra parte questo è implicito nella (14) che si può scrivere

$$U A_a \sigma_a U^\dagger = (\mathcal{R}A)_a \sigma_a = \mathcal{R}_{ab} A_b \sigma_a = A_a (\mathcal{R}^{-1} \sigma)_a \Rightarrow U \sigma_a U^\dagger = (\mathcal{R}^{-1} \sigma)_a \quad (15)$$

avendo usato $\mathcal{R}^t = \mathcal{R}^{-1}$.

Nel caso dei quadrivettori, la metrica complica le cose. Sembra logico estendere la (14) a*:

$$A'^\mu \sigma_\mu = M A^\mu \sigma_\mu M^\dagger \quad \sigma_\mu = (1, \sigma_i) \quad M = \exp[i\boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\sigma}\boldsymbol{\beta}] \quad (16)$$

Però occorre fare attenzione perchè $M^{-1} \neq M^\dagger$ e perchè $\text{Tr}\{\sigma_\mu \sigma_\nu\} \neq g_{\mu\nu}$; occorre definire $\bar{\sigma} = (1, -\sigma_i)$ di modo che $\text{Tr}\{\sigma_\mu \bar{\sigma}_\nu\} = g_{\mu\nu}$. Se $A'^\mu \sigma_\mu = M A^\mu \sigma_\mu M^\dagger$ equivale a $A'^\mu \bar{\sigma}_\mu = M^{-1\dagger} A^\mu \bar{\sigma}_\mu M^{-1}$ siamo a posto in quanto avrei

$$A'_\mu A'^\mu = \text{Tr}\{(A'\sigma)(A'\bar{\sigma})\} = \text{Tr}\{M(A\sigma)M^\dagger M^{\dagger-1}(A\bar{\sigma})M^{-1}\} = \text{Tr}\{(A\sigma)(A\bar{\sigma})\} = A_\mu A^\mu \quad (17)$$

In effetti questo è il caso, in quanto $\sigma_2 \sigma_i^t \sigma_2 \sigma_2 = \sigma_2 \sigma_i^* \sigma_2 \sigma_2 = -\sigma_i$ cioè $\sigma_2 \sigma_\mu^* \sigma_2 = \bar{\sigma}_\mu$ per cui:

$$M(A\sigma)M^\dagger = (A'\sigma) \Rightarrow M^*(A\sigma^*)M^t = (A'\sigma^*) \Rightarrow \sigma_2 M^* \sigma_2 (A\sigma_2 \sigma^* \sigma_2) \sigma_2 M^t \sigma_2 = (A'\sigma_2 \sigma^* \sigma_2) \Rightarrow A'^\mu \bar{\sigma}_\mu = M^{-1\dagger} A^\mu \sigma_\mu M^{-1}$$

Infine, $\psi_L^\dagger (A^\mu \sigma_\mu) \psi_L$ con $\psi_L \rightarrow M\psi_L$ e $\psi_R^\dagger (A^\mu \bar{\sigma}_\mu) \psi_R$ con $\psi_R \rightarrow M^{-1\dagger} \psi_R$ sono invarianti, per cui $\psi_L^\dagger \sigma_\mu \psi_L, \psi_R^\dagger \bar{\sigma}_\mu \psi_R$ trasformano come quadrivettori.

1.3 Teoria dei campi classica

La teoria dei campi si basa sul principio di azione:

$$S = \int d^4x \mathcal{L}(\phi(x), \partial_\mu \phi(x)) \quad \delta S = 0 \quad (18)$$

da cui si ricavano le equazioni del moto:

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} \quad (19)$$

*notare che $\sigma_\mu = \sigma_\mu^\dagger$ per cui $A'^\mu \sigma_\mu = M A^\mu \sigma_\mu M^{-1}$ non andrebbe bene in quanto $M^{-1} \neq M^\dagger$

La corrispondente Hamiltoniana (poco usata in teoria dei campi, visto che \mathcal{L} è invariante di Lorentz ma \mathcal{H} no) si ottiene nel modo usuale, definendo il momento canonico e facendo la trasformazione di Legendre:

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}(x)} \quad \mathcal{H} = \pi(x)\dot{\phi}(x) - \mathcal{L} \quad (20)$$

Il teorema di Noether assicura che ad ogni simmetria continua corrisponde una corrente conservata. Per “simmetria continua” intendo una trasformazione sui campi:

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) + \alpha \Delta \phi(x) \quad \alpha \text{ parametro continuo} \quad (21)$$

che lascia inalterate le equazioni del moto, ovvero l'azione; la Lagrangiana deve essere quindi invariante a meno di una quadri divergenza:

$$\mathcal{L}(x) \rightarrow \mathcal{L}(x) + \alpha \partial_\mu K^\mu; \quad j_\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_\mu \phi} \Delta \phi - K^\mu \quad \Rightarrow \quad \partial_\mu j^\mu = 0 \quad (22)$$

1.4 Equazioni del moto per scalare, fermione, vettore

La Lagrangiana che descrive particelle libere, e le corrispondenti equazioni di moto, sono:

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2 + \bar{\psi}(i\partial - m_f)\psi + F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - M^2 A_\mu A^\mu \quad (23)$$

$$(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi = 0 \quad (i\partial - m_f)\psi = 0 \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} + M^2 A^\nu = 0 \quad (24)$$

dove $F^{\mu\nu} \equiv \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$, $\partial \equiv \partial_\mu \gamma^\mu$ e ψ è una funzione d'onda a 4 componenti.

Consideriamo dapprima un campo scalare. In trasformata di Fourier si ha:

$$\phi(x) = \int d^4 p e^{-ipx} \phi(p); \quad (p^2 - m^2)\phi(p) = 0 \Rightarrow \phi(p) = a(p)\delta(p^2 - m^2) \quad (25)$$

$$\Rightarrow \phi(x) = \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{2p_0} a(\mathbf{p}) e^{-ipx} + c.c. |_{p_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} \quad (26)$$

con l'ultima espressione valida solo per un campo reale $\phi = \phi^*$. Notare che la $\delta(p^2 - m^2)$ che fissa l'impulso “sul mass shell” ha due branche, una per $p_0 = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ e una per $p_0 = -\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$: esistono quindi sia soluzioni “ad energia positiva” del tipo e^{-ipx} che soluzioni “ad energia negativa” del tipo e^{ipx} .

Nel caso di un fermione le soluzioni hanno la forma $\psi(x) \sim e^{-ipx} u(p)$ dove $u(p)$ è un quadrispinore che soddisfa $(\not{p} - m)u(p) = 0$ e $p_0 = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Si preferisce per convenzione scrivere le soluzioni con energia negativa come $\psi(x) = e^{ipx} v(p)$, $(\not{p} + m)v(p) = 0$, $p_0 = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Vediamo per prime le soluzioni ad energia positiva. si ha $\psi(x) = \int d^4 p e^{-ipx} u(p)$ dove $u(p)$ è un quadrispinore che soddisfa $(\not{p} - m)u(p) = 0$. Scrivendo $u(p)$ in termini di due bispinori (o spinori di Weyl) si ottiene:

$$u = \begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix} \quad \begin{cases} (p_0 - \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma})\xi - m\eta = 0 \\ (p_0 + \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma})\eta - m\xi = 0 \end{cases} \quad (27)$$

che ha soluzione:

$$\begin{cases} p_0^2 - \mathbf{p}^2 - m^2 = 0 \\ \xi = \frac{p_0 + \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}}{m}\eta \end{cases} \quad (28)$$

Possiamo verificare la covarianza dell'equazione di Dirac supponendo che η trasformi come ψ_L , $\eta \rightarrow \eta' = M\eta$ con $M = \exp[i\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\sigma}]$ e ξ trasformi come ψ_R , $\xi \rightarrow \xi' = M^{\dagger-1}\xi$. L'equazione di Dirac diventa:

$$M^{\dagger}\xi' = \frac{p_{\mu}\bar{\sigma}^{\mu}}{m}M^{-1}\eta' \Rightarrow \xi' = M^{\dagger-1}\frac{p_{\mu}\bar{\sigma}^{\mu}}{m}M^{-1}\eta' \Rightarrow \xi' = \frac{p_{\mu}\bar{\sigma}^{\mu}}{m}\eta'$$

La (28) ammette due soluzioni per i due possibili spin. Conviene scegliere l'asse di quantizzazione dello spin lungo l'impulso, cioè scegliere la base $\mathbf{S}\hat{\mathbf{p}}\eta_{\pm} = \pm\frac{1}{2}\eta_{\pm}$, $\mathbf{S} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}$. Esplicitamente si ha:

$$\hat{\mathbf{p}} = \begin{pmatrix} \sin\theta \cos\phi \\ \sin\theta \sin\phi \\ \cos\theta \end{pmatrix} \Rightarrow \eta_+ = \frac{1}{\sqrt{2(1-\cos\theta)}} \begin{pmatrix} \sin\theta e^{-i\frac{\phi}{2}} \\ (1-\cos\theta)e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix} \eta_- = \frac{1}{\sqrt{2(1+\cos\theta)}} \begin{pmatrix} -\sin\theta e^{-i\frac{\phi}{2}} \\ (1+\cos\theta)e^{i\frac{\phi}{2}} \end{pmatrix}$$

Per convenzione si normalizza a $u_r^{\dagger}u_s = 2p_0\delta_{rs}$, $\bar{u}_r u_s = 2m\delta_{rs}$. Con questa normalizzazione:

$$u_+ = \begin{pmatrix} \sqrt{p_0 - |\mathbf{p}|}\eta_+ \\ \sqrt{p_0 + |\mathbf{p}|}\eta_+ \end{pmatrix}, \quad u_- = \begin{pmatrix} \sqrt{p_0 + |\mathbf{p}|}\eta_- \\ \sqrt{p_0 - |\mathbf{p}|}\eta_- \end{pmatrix}; \quad u_{\pm} = \begin{pmatrix} \sqrt{p_0 - \boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}}}\eta_{\pm} \\ \sqrt{p_0 + \boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}}}\eta_{\pm} \end{pmatrix}, \quad (29)$$

dove ho tenuto conto che $\mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}\eta_{\pm} = \pm|\mathbf{p}|\eta_{\pm}$ e che $m = \sqrt{p_0 - |\mathbf{p}|}\sqrt{p_0 + |\mathbf{p}|}$. Definisco adesso

$$P_{\pm} = \eta_{\pm}\eta_{\pm}^{\dagger} = \frac{1}{2}(1 \pm \boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}}) \quad P_+u_+ = u_+, P_+u_- = 0 \quad [P_{\pm}, p] = [P_{\pm}, \boldsymbol{\sigma}\hat{\mathbf{p}}] = 0$$

Si ha allora

$$u_+\bar{u}_+ = \begin{pmatrix} m\eta_+\eta_+^{\dagger} & (p_0 - |\mathbf{p}|)\eta_+\eta_+^{\dagger} \\ (p_0 + |\mathbf{p}|)\eta_+\eta_+^{\dagger} & m\eta_+\eta_+^{\dagger} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m & p_0 - \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma} \\ p_0 + \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma} & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_+ & 0 \\ 0 & P_+ \end{pmatrix} = (\not{p}+m)P_+ = P_+(\not{p}+m)$$

Analogamente $u_-\bar{u}_- = (\not{p}+m)P_-$ per cui si ha $\sum_r u_r\bar{u}_r = (\not{p}+m)$. Un caso particolare si ha se $m=0$, $p_0 = \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma}$:

$$\begin{aligned} u_+\bar{u}_+ &= \begin{pmatrix} 0 & p_0 - \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma} \\ p_0 + \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_+ & 0 \\ 0 & P_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_0 + \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & p_0 - \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma} \\ p_0 + \mathbf{p}\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \not{p}P_L = P_R\not{p}; \quad u_-\bar{u}_- = \not{p}P_R = P_L\not{p} \end{aligned}$$

In questo caso gli autostati di elicità coincidono con gli autostati di chiralità:

$$u_+ = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2p_0}\eta_+ \end{pmatrix}, \quad u_- = \begin{pmatrix} \sqrt{2p_0}\eta_- \\ 0 \end{pmatrix}$$

Le soluzioni ad energia negativa sono $\psi(x) = v(p)e^{ipx}$ con $p_0 = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ e quindi $(p+m)v(p) = 0$. Calcoli analoghi a quelli per le $u(p)$ conducono a:

$$v_- = \begin{pmatrix} \sqrt{p_0 - |\mathbf{p}|} \beta_+ \\ -\sqrt{p_0 + |\mathbf{p}|} \beta_+ \end{pmatrix} \quad v_+ = \begin{pmatrix} \sqrt{p_0 + |\mathbf{p}|} \beta_- \\ -\sqrt{p_0 - |\mathbf{p}|} \beta_- \end{pmatrix} \quad \sigma \hat{\mathbf{p}} \beta_{\pm} = \pm \beta_{\pm} \quad \sum_{+,-} v \bar{v} = \not{p} - m \quad (30)$$

Notare che elicità $+$ delle soluzioni a energia negativa corrisponde a spinori di tipo $-$. Questo è dovuto alla nostra scelta delle soluzioni: $u(p)e^{-ipx}$ diventa, per le soluzioni con $E < 0$, $v(p)e^{ipx}$ cioè viene invertito, oltre al segno dell'energia, anche quello del triimpulso. Il che significa che uno stato a elicità $+$ è allineato a $-\mathbf{p}$: $\sigma(-\mathbf{p})\beta = \beta \Rightarrow \sigma \mathbf{p} \beta = -\beta$ cioè elicità $+$ per v corrisponde un bispinore β_- .

Veniamo infine al caso di un bosone vettore. Le equazioni del moto (vedi (24)) si scrivono:

$$\partial_\nu F^{\nu\mu} + M^2 A_\mu = (\square + M^2)A_\mu - \partial_\mu \partial^\nu A_\nu = 0 \quad (31)$$

da cui segue, per l'antisimmetria di $F^{\nu\mu}$, $\partial^\mu A_\mu = 0$ e le soluzioni sono di tipo onda piana:

$$A^\mu(x) = \varepsilon_p^\mu(k) e^{-ikx} + \varepsilon_p^{\mu*}(k) e^{ikx} \quad k^2 = M^2 \quad (32)$$

si ha quindi che $k\varepsilon(k) = 0$ e che $k_0 = \sqrt{M^2 + |\mathbf{k}|^2}$.

Per trovare una base, cioè scrivere esplicitamente le possibili polarizzazioni di un bosone vettore, partiamo dal fatto che una base reale nello spazio a 4 dimensioni è data dai 4 vettori:

$$\varepsilon_0 = (1, \mathbf{0}) \quad \varepsilon_1 = (0, \boldsymbol{\epsilon}_1) \quad \varepsilon_2 = (0, \boldsymbol{\epsilon}_2) \quad \varepsilon_3 = (0, \hat{\mathbf{k}}) \quad \mathbf{k} \boldsymbol{\epsilon}_{1,2} = 0, \boldsymbol{\epsilon}_{1,2}^2 = 1 \quad (33)$$

Infatti ogni quadrivettore si può scrivere come $v^\mu = \sum_{i=0,1,2,3} c_i \varepsilon_i^\mu$ con $c_0 = v_0 = (v\varepsilon_0)$, $c_i = \mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\epsilon}_i = -(v\varepsilon_i)$. Notare il segno $-$ nella metrica, per cui $g^{\mu\nu} v_\nu = v^\mu = (v\varepsilon_0)\varepsilon_0^\mu - \sum_{i=1,2,3} (v\varepsilon_i)\varepsilon_i^\mu = v_\nu (\varepsilon_0^\mu \varepsilon_0^\nu - \varepsilon_i^\mu \varepsilon_i^\nu)$ da cui $\varepsilon_0^\mu \varepsilon_0^\nu - \varepsilon_i^\mu \varepsilon_i^\nu = g^{\mu\nu}$ come si può verificare esplicitamente dalla (33). Le 4 polarizzazioni della (33) vengono chiamate scalare (ε_0), trasverse ($\varepsilon_{1,2}$), longitudinale (ε_3)

Nel caso $M \neq 0$ i vettori $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ soddisfano $k\varepsilon = 0$ ma $\varepsilon_3, \varepsilon_0$ no. Tuttavia è facile trovare una combinazione di questi ultimi che soddisfa $k\varepsilon_L = 0$:

$$k = (k_0, \mathbf{k}); k^2 \equiv M^2 \quad \varepsilon_{1,2} = (0, \boldsymbol{\epsilon}_{1,2}); \mathbf{k} \boldsymbol{\epsilon}_{1,2} = 0; \boldsymbol{\epsilon}_{1,2}^2 = 1 \quad \varepsilon_L = \frac{1}{M} (|\mathbf{k}|, k_0 \hat{\mathbf{k}}) \quad (34)$$

E' facile fare le somme sulle polarizzazioni. Infatti:

$$\sum_{1,2} \varepsilon_p^i \varepsilon_p^j = \delta^{ij} - \frac{k^i k^j}{|\mathbf{k}|^2} \quad \varepsilon_L^i \varepsilon_L^j = \frac{k_0^2}{M^2} \frac{k^i k^j}{|\mathbf{k}|^2} \quad \sum_{1,2} \varepsilon_p^0 \varepsilon_p^0 = 0 \quad \varepsilon_L^0 \varepsilon_L^0 = \frac{|\mathbf{k}|^2}{M^2} \quad (35)$$

da cui, considerando anche le componenti miste $0i$, si ricava:

$$\sum_{T,L} \varepsilon_p^\mu \varepsilon_p^{\nu*} = -g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu k^\nu}{M^2} \quad (36)$$

Il caso di bosone di massa nulla (fotone) è un pò più complicato. La richiesta $k\varepsilon = 0$ non è imposta dalle equazioni del moto, ma conseguenza della scelta di gauge (Lorentz); questo elimina un grado di libertà:

$$\varepsilon_{1,2} = (0, \boldsymbol{\varepsilon}_{1,2}); \mathbf{k}\boldsymbol{\varepsilon}_{1,2} = 0; \boldsymbol{\varepsilon}_{1,2}^2 = 1 \quad \varepsilon_L^\mu = \alpha k^\mu \quad (37)$$

Tuttavia ho ancora la libertà di una variazione di gauge (ristretta) $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \chi$ purchè $\partial^\mu \partial_\mu \chi = 0$ *. Scegliendo $\chi = \exp[-i\alpha kx]$ questo corrisponde per le polarizzazioni a $\varepsilon^\mu \rightarrow \varepsilon^\mu - \alpha k^\mu, k^2 = 0$; in definitiva posso scegliere la gauge in modo da eliminare l'ultima delle (37), che è non fisica. Infine, ricordando che $k = \omega(1, \hat{\mathbf{k}})$ e introdotto un vettore $n = \omega(1, -\hat{\mathbf{k}})$ è facile verificare che:

$$\sum_{1,2} \varepsilon_i^\mu \varepsilon_i^\nu \equiv P_T^{\mu\nu} = \delta^{ij} - \hat{\mathbf{k}}^i \hat{\mathbf{k}}^j = -g^{\mu\nu} + \frac{k^\mu n^\nu + k^\nu n^\mu}{(nk)} \quad (38)$$

1.5 Quantizzazione dei campi scalari e fermionici

I campi, che sono funzioni della coordinata x cioè c-numeri nella teoria dei campi classica, vengono quantizzati come operatori in rappresentazione di interazione nella teoria dei campi. Ad esempio ϕ campo reale scalare:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi}{2} - \frac{m^2 \phi^2}{2} \Rightarrow (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)\phi = 0 \quad (39) \\ \Rightarrow \phi &= \int d^4k \delta(k^2 - m^2) a(\mathbf{k}) e^{-ikx} + c.c. = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2\sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}} a(\mathbf{k}) e^{-ikx} + c.c. \end{aligned}$$

dove a è una funzione scalare di \mathbf{k} . Il campo ϕ diventa un operatore, e la teoria viene quantizzata, imponendo le regole di commutazione canoniche *equal times*:

$$[\phi(\mathbf{x}, t), \pi(\mathbf{x}', t)] = [\phi(\mathbf{x}, t), \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}] = [\phi(\mathbf{x}, t), \dot{\phi}(\mathbf{x}', t)] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \quad (40)$$

Notare che nella (39) la misura di integrazione $\frac{d^3\mathbf{k}}{\omega}$, $\omega = \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}$ è arbitraria perchè posso sempre ridefinire $a(\mathbf{k}) \rightarrow \omega a(\mathbf{k})$ ad esempio. Per analogia con l'oscillatore armonico per il quale l'operatore di posizione $x \propto \frac{a}{\sqrt{\omega}}$ adotterò le seguenti normalizzazioni:

$$\phi(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}} [a(\mathbf{k}) e^{i(\mathbf{k}\mathbf{x} - \omega t)} + h.c.] \Rightarrow [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (41)$$

dove l'ultimo passaggio deriva dall'aver imposto la (40).

Un campo carico è descritto dall'operatore ($dk \equiv \frac{d^3\mathbf{k}}{\sqrt{(2\pi)^3 2\omega}}$):

$$\phi(x) = \int dk [a(\mathbf{k}) e^{-ikx} + b^\dagger(\mathbf{k}) e^{ikx}] \quad [a(\mathbf{k}), a^\dagger(\mathbf{k}')] = [b(\mathbf{k}), b^\dagger(\mathbf{k}')] = \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad [a(\mathbf{k}), b(\mathbf{k}')] = 0 \quad (42)$$

*Una trasformazione di gauge in particolare non cambia i valori di dei campi elettrici e magnetici \mathbf{B}, \mathbf{E} e non cambia quindi la fisica

Da queste, oltre alla commutazione canonica $[\phi(\mathbf{x}, t), \phi^\dagger(\mathbf{x}', t)] = i\delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ si ricava $[\phi(x), \phi(y)] = 0$ e $[\phi(x), \phi^\dagger(y)] = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\omega} \sin k(x-y)$. Quest'ultima espressione è 0 per $(x-y)^2 < 0$ (causalità). Infatti se $x_0 = y_0$ vale 0 perchè l'integrando è dispari per $\mathbf{k} \rightarrow -\mathbf{k}$; per invarianza di Lorentz questo vale per tutti i punti di tipo spazio. Inoltre, definendo $Q = \int d^3\mathbf{x} \mathcal{N}[\phi(x)\dot{\phi}^\dagger(x) - \dot{\phi}(x)\phi^\dagger(x)] = \int d^3\mathbf{k}[a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k}) - b^\dagger(\mathbf{k})b(\mathbf{k})]$ si ottiene $[Q, \phi(x)] = \phi(x)$.

I campi fermionici vengono quantizzati con anticommutatori:

$$\Psi(x) = \int dk [a_{\mathbf{k},r} u_r(k) e^{-ikx} + b_{\mathbf{k},r}^\dagger v_s(k) e^{ikx}] \quad \{a_{\mathbf{k},r}, a_{\mathbf{k}',s}^\dagger(\mathbf{k}')\} = \{b_{\mathbf{k},r}, b_{\mathbf{k}',s}^\dagger(\mathbf{k}')\} = \delta_{\mathbf{k}\mathbf{k}'}^3 \delta_{rs} \quad (43)$$

con tutti gli altri anticommutatori pari a 0. Il formalismo del numero di occupazione funziona anche con gli anticommutatori; ad esempio se $N = \int d^3\mathbf{k} a^\dagger(\mathbf{k})a(\mathbf{k})$ ho $Na_{\mathbf{p}}^\dagger|0\rangle = -\int d^3\mathbf{k} a^\dagger(\mathbf{k})a_{\mathbf{p}}^\dagger a(\mathbf{k})|0\rangle + \int d^3\mathbf{k} \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{p})a^\dagger(\mathbf{k})|0\rangle = a_{\mathbf{p}}^\dagger|0\rangle$ e in generale $N(a_{\mathbf{p}_1}^\dagger)^i (a_{\mathbf{p}_2}^\dagger)^j |0\rangle = (i+j)(a_{\mathbf{p}_1}^\dagger)^i (a_{\mathbf{p}_2}^\dagger)^j |0\rangle$. È essenziale qui il fatto che N è un operatore bosonico: $[a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{p}}] = 0$ se $\mathbf{k} \neq \mathbf{p}$. Si ottiene

$$\{\Psi^\alpha(\mathbf{x}, t), \bar{\Psi}^\beta(\mathbf{0}, t)\} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\omega} [\sum_r u_{\mathbf{k},r} \bar{u}_{\mathbf{k},r} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} - \sum_r v_{\mathbf{k},r} \bar{v}_{\mathbf{k},r} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}] = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\omega} (\omega \gamma_0^{\alpha\beta} e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}) = i\gamma_0^{\alpha\beta} \delta^3(\mathbf{x}) \quad (44)$$

avendo tenuto conto che gli integrali in \mathbf{k} di $m(e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} - e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}})$, $\mathbf{k}\gamma(e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} + e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}})$ sono 0 perchè dispari. Da qui si ricava anche

$$\{\Psi^\alpha(\mathbf{x}, t), \Psi^{\dagger\beta}(\mathbf{y}, t)\} = i\delta^{\alpha\beta} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad \{\Psi^\alpha(x), \Psi^\beta(y)\} = 0 \quad (45)$$

1.6 Propagatori (o funzioni di Green)

In generale le funzioni di Green risolvono le equazioni definite a partire da un operatore differenziale lineare \hat{O} :

$$\hat{O}_x \phi(x) = j(x) \Rightarrow \phi(x) = \int dx' G(x, x') j(x') \quad \hat{O}_x G(x, x') = \delta(x - x') \quad (46)$$

La funzione di Green non è univocamente determinata: posso sempre aggiungere a G una funzione G_0 che soddisfi $\hat{O}_x G_0(x, x') = 0$. Questo corrisponde al fatto che alla soluzione ϕ posso aggiungere una ϕ_0 soluzione dell'equazione omogenea. Per definire univocamente la funzione di Green occorre quindi supplementare l'equazione differenziale con condizioni al contorno. La funzione di Green viene anche detta propagatore, perchè propaga l'effetto della corrente nel punto x' fino alla soluzione ϕ nel punto x .

Vediamo ora le funzioni di Green in meccanica quantistica. Cominciamo con un caso semplice, l'equazione di Schrödinger per la particella libera

$$(i\partial_t + \frac{\partial_x^2}{2m})\Psi(x, t) = 0 \quad \Psi(x, 0) = f(x) \quad (47)$$

Per la trasformata di Fourier $\tilde{\Psi}(k, t) = \int dk e^{-ikx} \Psi(x, t)$, l'equazione si scrive:

$$(i\partial_t - \frac{k^2}{2m})\tilde{\Psi} = 0 \quad ; \quad \tilde{\Psi}(k, 0) = \tilde{f}(k) \quad \Rightarrow \quad \tilde{\Psi}(k, t) = \tilde{f}(k)e^{-i\frac{k^2}{2m}t} \quad (48)$$

Antitrasformando si ottiene:

$$\Psi(x, t) = \int dx' G(x - x', t) \Psi(x', 0) \quad G(x, t) = \int dk e^{ikx} e^{-i\frac{k^2}{2m}t} = \sqrt{\frac{m}{it}} e^{i\frac{mx^2}{2t}} \quad (49)$$

dove ho tenuto conto del fatto che il problema si puo' risolvere con condizione iniziale all'istante t' invece che all'istante 0. Notare che prendendo come condizione iniziale $\delta(x)$, cosicchè $\tilde{\delta}(k) = 1$, si ottiene che la funzione di Green risolve:

$$(i\partial_t + \frac{\partial_x^2}{2m})G(x, t) = 0 \quad G(x, 0) = \delta(x) \quad (50)$$

Se definiamo la funzione di Green ritardata $G^+(x, t) = \theta(t)G(x, t)$, dalla (50) si ottiene che G^+ soddisfa:

$$(i\partial_t + \frac{\partial_x^2}{2m})G^+(x, t) = i\delta(t)G(x, t) + (i\partial_t + \frac{\partial_x^2}{2m})G(x, t) = i\delta(t)\delta(x) \quad (51)$$

con la condizione al contorno $G^+(x, t) = 0$ per $t < 0$. Analogamente $G^-(x, t) = -\theta(-t)G(x, t)$ soddisfa la stessa equazione (51) ma con la condizione $G^-(x, t) = 0$ per $t > 0$. Da quanto fin qui visto, è ovvio che G^+ descrive l'evoluzione in avanti e G^- quella indietro:

$$\Psi(x, t) = \int dy G^+(x-y, t-t') \Psi(x, t') \quad \text{se } t > t' \quad \Psi(x, t) = - \int dy G^-(x-y, t-t') \Psi(x, t') \quad \text{se } t < t' \quad (52)$$

Dal punto di vista più formale dei bra e dei ket, le equazioni sopra si riassumono in:

$$(i\partial_t - H)|\Psi(t)\rangle = 0 \Rightarrow |\Psi(t)\rangle = \theta(t - t')U(t - t')\Psi(t') \equiv G^+(t - t')|\Psi(t')\rangle \quad ; \quad (53)$$

$$(i\partial_t - H)G^+(t) = \delta(t)e^{-iHt} = \delta(t) \quad (54)$$

In particolare, nella rappresentazione delle x :

$$\langle x|\Psi(t)\rangle = \theta(t - t') \int dy \langle x|U(t - t')|y\rangle \langle y|\Psi(t')\rangle \quad ; \quad (55)$$

$$\langle x|U(t)|y\rangle = \int dp \langle x|e^{-iHt}|p\rangle \langle p|y\rangle = \int dp e^{ipx} e^{-i\frac{p^2}{2m}t} \quad (56)$$

La (52) evidenzia un altro motivo per cui la funzione di Green viene detta anche propagatore: essa propaga la funzione d'onda da un tempo t' ad un tempo t .

Se consideriamo la Lagrangiana che descrive l'interazione di uno scalare reale con una corrente esterna:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{1}{2}m^2\phi^2 + j\phi \quad \Rightarrow \quad (\partial_\mu\partial^\mu + m^2)\phi(x) = j(x) \quad (57)$$

la soluzione in trasformata di Fourier $\phi(p) = \int d^4x e^{ipx} \phi(x)$ è data da:

$$\phi(p) = G(p)j(p); \quad G(p) = \frac{1}{p^2 - m^2} \quad (58)$$

L'oggetto $\frac{1}{p^2 - m^2}$, che risolve l'equazione differenziale che descrive il moto, è detto funzione di Green, o propagatore. Nello spazio delle coordinate:

$$\phi(x) = \int d^4x' G(x - x')j(x'); \quad G(x) = \int d^4p e^{-ipx} G(p); \quad (\partial_\mu \partial^\mu + m^2)G(x) = \delta^4(x) \quad (59)$$

quindi la funzione G propaga l'effetto della corrente j nel punto x' al campo ϕ nel punto x . Notare che la funzione di Green è in realtà mal definita in quanto posso sempre aggiungere a G una funzione G_0 tale che $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)G_0 = 0$; a questo corrisponde il fatto che alla ϕ posso aggiungere una soluzione dell'equazione omogenea. Per risolvere l'ambiguità devo definire il comportamento di $G(p)$ vicino al polo $p^2 = m^2$. Nella teoria di campi il propagatore è descritto dalla prescrizione di Feynman: $p^2 - m^2 \rightarrow p^2 - m^2 + i\varepsilon$. Corrispondentemente si ha (vedi [1]):

$$G(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int d^4p \frac{e^{-ipx}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon} = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{2p_0} [\theta(x^0)e^{-ipx} + \theta(-x^0)e^{ipx}] \quad (60)$$

Per maggiori dettagli, vedi [1].

In termini dei campi quantizzati liberi (41), è facile verificare che il propagatore si scrive tramite l'operatore di ordinamento temporale \mathcal{T} :

$$G(x) = \langle \mathcal{T} \{ \phi(x) \phi(0) \} \rangle \equiv \langle (\theta[x_0] \phi(x) \phi(0) + \theta[-x_0] \phi(0) \phi(x)) \rangle \quad (61)$$

2 Matrice S, sezioni d'urto, decadimenti

La matrice S è l'elemento di matrice fra stato finale e stato iniziale, entrambe liberi, dell'operatore di evoluzione da $t_i = -\infty$ a $t_f = +\infty$. La rappresentazione più conveniente per la teoria delle perturbazioni è quella di interazione, nella quale l'Hamiltoniana totale viene spezzata nella somma di quella libera (esattamente risolvibile) e di quella di interazione: $H = H_0 + V$. Gli stati in rappresentazione di interazione sono dati da $\Psi_I = \exp(iH_0 t) \Psi_S$ dove Ψ_S è lo stato in rappresentazione di Schrödinger e gli operatori da $O_I = \exp(iH_0 t) O_S \exp(-iH_0 t)$ ed evolvono quindi con la Hamiltoniana libera: $i\dot{O}_I = [O_I, H_0]$. L'operatore di evoluzione è definito da $\Psi_I(t) = \mathcal{U}_I(t, 0) \Psi_I(0)$. Dalla definizione di Ψ_I si ricava $i\dot{\Psi}_I(t) = H_I(t) \Psi_I(t)$ con $H_I(t) = e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t}$ per cui:

$$i \frac{\partial \mathcal{U}_I(t, 0)}{\partial t} = H_I(t) \mathcal{U}_I(t, 0) \quad \mathcal{U}_I(0, 0) = 1 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{U}_I(t, t') = \mathcal{T} \exp[-i \int_{t'}^t H_I(t'') dt''] \quad (62)$$

$$H_I(t) = e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t}$$

dove \mathcal{T} è l'operatore di ordinamento temporale (tempi grandi per primi) e l'ultima espressione è una generalizzazione a $t' \neq 0$. Si ha:

$$\langle f|U(-\infty, \infty)|i\rangle = \langle f|i\rangle - i \int_{-\infty}^{\infty} dt \langle f|e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t}|i\rangle - \int_{-\infty}^{\infty} dt \int_{-\infty}^t \langle f|dt' e^{iH_0 t} V e^{-iH_0(t-t')} V e^{-iH_0 t'}|i\rangle + \dots \quad (63)$$

dove i puntini indicano ordini superiori in H_I . Per dare un significato all'ultimo integrale, occorre fare la sostituzione $V \rightarrow V e^{-\varepsilon|t|}$ (spegnimento adiabatico) e dopo aver traslato $\tau = t - t'$ si ottiene:

$$- \int_{-\infty}^{\infty} dt e^{i(E_i - E_f)t} \int_0^{\infty} d\tau \langle f|V e^{i(E_f - H_0 + i\varepsilon)\tau} V|i\rangle = -2\pi i \delta(E_f - E_i) \langle f|V \frac{1}{E_f - H_0 + i\varepsilon} V|i\rangle \quad (64)$$

In definitiva, sommando tutti gli ordini, è facile vedere che S soddisfa l'equazione ricorsiva:

$$S = 1 - 2\pi i T \delta(E_f - E_i) \quad T = V + V G_0 T \quad G_0 = \frac{1}{E_f - H_0 + i\varepsilon} \quad (65)$$

In teoria dei campi, le formule sopra valgono ancora, solo che si passa a una densità di Lagrangiana. Nella (63) bisogna fare la sostituzione $V \rightarrow V(\mathbf{x}) = \exp(i\mathbf{p}\mathbf{x}) V(\mathbf{0}) \exp(-i\mathbf{p}\mathbf{x})$; occorre quindi integrare anche su \mathbf{x} . Inoltre normalmente $L_I = -H_I$ per cui:

$$S = U(-\infty, \infty) = T \left\{ \exp \int i L_I(x) d^4x \right\} \quad L_I(x) = e^{iP\mathbf{x}} L_I(0) e^{-iP\mathbf{x}} \quad (66)$$

Siccome siamo in rappresentazione di interazione, L_I è funzione degli operatori di campo in evoluzione *libera*. Un punto importante: attenzione a non confondere gli stati fisici con gli operatori di campo. La Lagrangiana che descrive le interazioni è scritta in termini di operatori di campo, quantizzati con la procedura vista sopra. Gli stati fisici evolvono con l'equazione di Schrödinger, che è covariante relativistica perché l'hamiltoniana $H = \int d^3x \mathcal{H}(x)$, scritta in termini degli operatori di campo, trasforma come la componente temporale di un quadrivettore. Gli stati asintotici prima e dopo uno scattering sono particelle libere e quindi nella rappresentazione di interazione $\phi_I(t) = \exp(iH_0 t) \Phi_S(t)$ non hanno evoluzione temporale. Si ha:

$$\langle \mathbf{p}_1 | \mathbf{p}_2 \rangle = \langle 0 | a_{\mathbf{p}_1} a_{\mathbf{p}_2}^\dagger | 0 \rangle = \delta^3(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \Rightarrow \langle x | a_p^\dagger \rangle = e^{i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} \quad (67)$$

avendo usato le regole di commutazione degli operatori di creazione e distruzione.

La matrice S definita dalla (66) è scritta in termini di una espansione perturbativa nel termine di interazione "piccolo" L_I . Tale espansione permette di calcolare la matrice stessa utilizzando gli operatori di campo liberi.

In sintesi, i risultati fondamentali da [1] o dalle mie dispense di teoria dei campi:

- Regole di Feynman: propagatori, stati iniziali e finali, vertici.

- Le funzioni di Green, scritte in termini di operatori in rappresentazione di Heisenberg cioè che evolvono con la full Hamiltonian, ammettono una espansione perturbativa simile alla matrice S:

$$G(x_1, x_2 \dots x_n) = \langle 0|T\phi_H(x_1)\phi_H(x_2)\dots\phi_H(x_n)|0\rangle = \quad (68)$$

$$\langle 0|T\phi(x_1)\phi(x_2)\dots\phi(x_n)\exp\{i\int d^4x L_I(\phi(x))\}|0\rangle_{\text{con}}$$

dove con sta per connessi, con conseguenti regole perturbative del tutto simili alla matrice S che difatti si può ottenere a partire dalle funzioni di Green tramite regole di riduzione (Itz p.207):

$$\langle p_1 \dots p_n | S | q_1 \dots q_m \rangle = \quad (69)$$

$$\left(\frac{i}{\sqrt{Z}}\right)^{n+m} \int d^4x_1 \dots d^4y_m \exp i\left(\sum_1^n p_i x_i - \sum_1^m q_i y_i\right) (\square_{x_1} + m^2) \dots (\square_{y_m} + m^2) \langle T\phi_H(x_1) \dots \phi_H(y_m) \rangle$$

- Matrice S e funzioni di green sono qui trattate perturbativamente, ma sono definite anche nonperturbativamente

Passiamo ora al calcolo delle quantità fisiche come sezioni d'urto in termini della matrice S. Per far questo, consideriamo un volume V finito e un tempo di interazione $T = t_f - t_i$ finito. La finitezza del volume corrisponde certamente alla finitezza dell'apparato sperimentale, ma è comunque necessaria per poter considerare funzioni d'onda correttamente normalizzate e quindi dare una interpretazione probabilistica. Il passaggio al continuo avviene nel limite di volume e tempo infiniti. Gli stati sono normalizzati a una particella nel volume V:

$$f_p(x) = \langle x | a_p^\dagger | 0 \rangle = \frac{e^{ipx}}{\sqrt{V}} \quad ; \quad \int_V d^3\mathbf{x} f_p^*(x) f_p(x) = 1 \quad \forall x_0 \quad (70)$$

e gli impulsi sono quantizzati nella scatola di volume V e lati L; ogni stato occupa una celletta di volume $\frac{(2\pi)^3}{V}$ nello spazio delle fasi:

$$\mathbf{p}_i^n = \frac{2\pi}{L} n \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad d\phi_{\mathbf{p}} = \frac{V}{(2\pi)^3} d^3\mathbf{p} \quad (71)$$

La matrice S si scrive, in termini di M e tenendo conto della conservazione della energia*:

$$S_{fi} = \delta_{fi} + iT_{fi} = \delta_{fi} + iM_{fi}\delta_{P_f P_i}^4 \quad \delta_{P_f P_i}^4 = \delta_{P_f^0 P_i^0} \delta_{P_f^1 P_i^1} \delta_{P_f^2 P_i^2} \delta_{P_f^3 P_i^3} \quad (72)$$

e la probabilità di transizione per unità di tempo, tenendo conto che $(\delta_{P_f P_i}^4)^2 = \delta_{P_f P_i}^4$:

$$dw_{fi} = \frac{1}{T} |M_{fi}|^2 \delta_{P_f P_i}^4 \Pi_f \frac{V d^3\mathbf{p}_f}{(2\pi)^3} \quad (73)$$

*qui P_f e P_i sono gli impulsi totali finali e iniziali: $P_f = \sum_f p_f$. Il simbolo δ indica la delta di Kronecker

Per passare al continuo, $T \rightarrow \infty$ e $V \rightarrow \infty$ occorre fare le sostituzioni:

$$\delta_{P_f P_i}^4 \rightarrow \frac{(2\pi)^4}{VT} \delta^4(P_f - P_i) \quad (74)$$

$$M_{fi} \rightarrow M_{fi} VT \frac{1}{\sqrt{(\Pi_i 2E_i V)(\Pi_f 2E_f V)}} \quad (75)$$

L'equazione (74) si ricava facilmente tenendo presente che

$$\int_L e^{i(p_n - p_{n'})x} dx = L \delta_{nn'} \quad \text{e} \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(p-p')x} dx = 2\pi \delta(p-p') \quad \Rightarrow \quad \delta_{nn'} \leftrightarrow \frac{2\pi}{L} \delta(p-p') \quad (76)$$

L'equazione (75) contiene due tipi di fattori. Il primo, VT , è dovuto a ragioni dimensionali: in teoria dei campi la Lagrangiana è in realtà una densità di Lagrangiana e così anche \mathcal{M}_{fi} è una densità rispetto al "normale" \mathcal{M}_{fi} di meccanica quantistica. Il secondo tipo di fattore è dovuto al fatto che in teoria dei campi, invece di essere normalizzati a 1, gli stati hanno in genere una normalizzazione covariante:

$$f_p^{teo\ cam}(x) = \sqrt{2E_{\mathbf{p}}} e^{ipx} = \sqrt{2E_{\mathbf{p}} V} f_p^{mecc\ qua}(x) ; \quad \langle f_p(x) | f_{p'}(x) \rangle^{teo\ cam} = 2E_{\mathbf{p}} (2\pi)^3 \delta^3(p-p') \quad (77)$$

Si ottiene così l'espressione finale:

$$dw_{fi} = \frac{V}{(\Pi_i 2E_i V)} |\mathcal{M}_{fi}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \Pi_f \frac{d^3 \mathbf{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f} \quad (78)$$

Vediamo ora due casi importanti.

- Decadimento - una particella nello stato iniziale

$$dw_{1 \rightarrow f} = \frac{1}{2E_1} |\mathcal{M}_{f1}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \Pi_f \frac{d^3 \mathbf{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f} \quad (79)$$

- Sezione d'urto - due particelle nello stato iniziale. Per ottenere la sezione d'urto devo dividere per il flusso v_r/V dove v_r è la velocità relativa delle due particelle nello stato iniziale

$$d\sigma_{12 \rightarrow f} = \frac{1}{2E_1 2E_2 v_r} |\mathcal{M}_{fi}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \Pi_f \frac{d^3 \mathbf{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f} \quad (80)$$

Nel sistema del baricentro si ha

$$v_r = \frac{|\mathbf{p}|^{c.m.}}{E_1} + \frac{|\mathbf{p}|^{c.m.}}{E_2} ; \quad 2E_1 2E_2 v_r = 4|\mathbf{p}|^{c.m.} (E_1 + E_2) = 4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}$$

e quindi:

$$d\sigma_{12 \rightarrow f} = \frac{1}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} |\mathcal{M}_{fi}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \Pi_f \frac{d^3 \mathbf{p}_f}{(2\pi)^3 2E_f} \quad (81)$$

Vediamo ora alcuni casi particolari iniziando con stato finale a due corpi *:

$$d\sigma_{12 \rightarrow 34} = \frac{1}{64\pi^2} \frac{|\mathbf{p}_f^{c.m.}|}{|\mathbf{p}_i^{c.m.}|} \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{s} d\Omega_f = \frac{1}{64\pi} \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{s} \frac{dt}{|\mathbf{p}_i^{c.m.}|^2} \quad d\Gamma_{1 \rightarrow 34} = \frac{1}{32\pi^2} \frac{|\mathbf{p}_f^{c.m.}|}{m_1} \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{m_1} d\Omega_f$$

$$|\mathbf{p}_i^{c.m.}| = \sqrt{s^2 - 2s(m_1^2 + m_2^2) + (m_1^2 - m_2^2)^2} \quad |\mathbf{p}_f^{c.m.}| = \sqrt{s^2 - 2s(m_3^2 + m_4^2) + (m_3^2 - m_4^2)^2}$$

2.1 Unitarietà

La matrice $S \equiv U(-\infty, \infty)$ è un operatore unitario che si suole scrivere $S = 1 + iT$ per separare la parte di scattering vero e proprio definita da T dalla parte di non interazione. L'unitarietà $SS^\dagger = 1$ diventa (indicando $\langle f|T|i \rangle = T_{fi}$):

$$-i(T - T^\dagger) = TT^\dagger \Rightarrow -i(T_{fi} - T_{if}^*) = \sum_n T_{fn} T_{in}^* \Rightarrow 2Im\{T_{ii}\} = \sum_n |T_{in}|^2 \quad (82)$$

La matrice T contiene una delta di conservazione del quadriimpulso: $T_{fi} = (2\pi)^4 \delta^4(P_f - P_i) \mathcal{M}_{fi}$. Inoltre nel caso del continuo con normalizzazione relativistica la somma sugli stati finali diventa una integrazione sullo spazio delle fasi: $1 = \sum_X \int d\Phi_X |X\rangle \langle X|$. Si ottiene quindi:

$$Im\{\mathcal{M}_{ii}\} = \sum_X \int d\Phi_X (2\pi)^4 \delta^4(P_i - P_X) |\mathcal{M}_{Xi}|^2 = 2\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2} \sum_X \sigma(i \rightarrow X) \quad (83)$$

con p_1, p_2 impulsi iniziali. Questa equazione è detta anche 'teorema ottico', che si può enunciare nel seguente modo: La parte immaginaria dell'ampiezza di scattering in avanti (cioè con $i = f$) è proporzionale alla sezione d'urto inclusiva. Vedremo che il teorema ottico gioca un ruolo nella quantizzazione delle teorie di gauge.

3 Quantum ChromoDynamics

3.1 Lagrangiana di QCD

E' bene ricordare un pò di algebra di $SU(N)$. Fra le rappresentazioni del gruppo è particolarmente importante la fondamentale, formata da matrici $N \times N$ $U(\theta) = \exp i\theta^a \tau_a$ dove τ_a sono $N^2 - 1$ matrici hermitiane che soddisfano $[\tau_a, \tau_b] = if_{abc} \tau_c$ con f_{abc} costanti di struttura reali. La normalizzazione delle τ_a , e quindi quella delle f_{abc} , è arbitraria e viene normalmente fissata da $\text{Tr}\{\tau_a \tau_b\} = \frac{1}{2} \delta_{ab}$.

Dalle equazioni sopra si trova $f_{abc} = -2i \text{Tr}\{[\tau_a, \tau_b] \tau_c\} = -2i \text{Tr}\{\tau_a [\tau_b, \tau_c]\} = -2i \text{Tr}\{\tau_b [\tau_c, \tau_a]\}$ avendo usato la ciclicità della traccia. Quindi f_{abc} è antisimmetrico in tutti gli indici. Il Casimiro $\boldsymbol{\tau}^2 = \sum \tau^a \tau^a$ commuta con tutte le τ ed è quindi proporzionale all'identità; la costante di

* $p_i^2 = m_i^2$. Inoltre $p_1 + p_2 = p_3 + p_4$, $t = (p_1 - p_3)^2$, $s = (p_1 + p_2)^2$ per $d\sigma$ e $p_1 = p_3 + p_4$ per $d\Gamma$

proporzionalità si trova facendo la traccia e risulta $\sum \tau^a \tau^a \equiv C_F = \frac{N^2-1}{2N}$. Esiste una Fierz-identity fondamentale, che deriva dal fatto che le $N^2 - 1$ matrici τ_a più l'identità sono una base per le matrici hermitiane NxN con prodotto scalare dato dalla traccia:

$$H = \sum C^a \tau^a + C^0 \Rightarrow C^0 = \frac{\text{Tr}\{H\}}{N}, C^a = 2\text{Tr}\{H\tau^a\} \Rightarrow 2\tau_{\alpha\beta}^a \tau_{\delta\gamma}^a = \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} - \frac{1}{N} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\delta\gamma} \quad (84)$$

Da questa si ricava facilmente:

$$\text{Tr}\{\tau^a \tau^b \tau^a \tau^b\} = \frac{1}{4} (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} - \frac{1}{N} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\delta\gamma}) (\delta_{\beta\alpha} \delta_{\delta\gamma} - \frac{1}{N} \delta_{\beta\delta} \delta_{\gamma\alpha}) = -\frac{1}{4} (\frac{N^2-1}{N}) \quad (85)$$

La rappresentazione aggiunta è definita da $U(\theta)A^a\tau^a U^{-1}(\theta) = A'_a \tau_a$ e a livello infinitesimo $\delta A^a = f_{abc} \theta_b A_c$ da cui segue che $A' = \exp i T_a \theta_a A$ con $T_{bc}^a = i f_{abc}$ generatori del gruppo nella rappresentazione aggiunta. T^a sono quindi N^2-1 matrici $(N^2 - 1) \times (N^2 - 1)$. Per trovare il Casimiro nell'aggiunta si può usare il fatto che $T_{bc}^a T_{cd}^a = f^{abc} f^{adc} = C_A \delta_{bc} \Rightarrow (N^2 - 1) C_A = f^{abc} f^{abc}$; il valore di $f^{abc} f^{abc}$ si può trovare dalle formule precedenti:

$$\underbrace{\text{Tr}\{\tau^a \tau^b \tau^a \tau^b\}}_{-\frac{N^2-1}{4N}} = \underbrace{\text{Tr}\{\tau^b \tau^a \tau^a \tau^b\}}_{\frac{(N^2-1)^2}{4N}} + i f^{abc} \underbrace{\text{Tr}\{\tau^c \tau^a \tau^b\}}_{\frac{i f^{abc}}{4}} \Rightarrow f^{abc} f^{abc} = N(N^2 - 1) \Rightarrow C_A = N \quad (86)$$

A questo punto si possono dare anche le rappresentazioni esplicite "standard":

Fondamentale e aggiunta di SU(2) con $f^{abc} = \varepsilon^{abc}$:

$$\tau_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \tau_3 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (87)$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \quad T_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad T_3 = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (88)$$

Fondamentale di SU(3) con $f_{123} = 1, f_{345} = f_{147} = f_{246} = f_{257} = \frac{1}{2}, f_{367} = f_{156} = -\frac{1}{2}, f_{458} = f_{678} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ (matrici di Gell-Mann):

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \tau_2 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \tau_3 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \tau_4 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \tau_5 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 \end{pmatrix} & \tau_6 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \tau_7 &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} & \tau_8 &= \frac{1}{2\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

con le 8 matrici 8x8 della aggiunta date da $T_{bc}^a = i f^{abc}$. Si verifica esplicitamente che $f_{SU(2)}^{abc} f_{SU(2)}^{abc} = \varepsilon^{abc} \varepsilon^{abc} = 6$ e che $f_{SU(3)}^{abc} f_{SU(3)}^{abc} = 24$ in accordo con la formula generale $f_{SU(N)}^{abc} f_{SU(N)}^{abc} = N(N^2 - 1)$.

La Lagrangiana di QCD è un caso particolare di teoria di Yang Mills, cioè un tipo di teoria con invarianza locale SU(N). Per ottenere una Lagrangiana con invarianza locale, partiamo da una generica Lagrangiana con invarianza globale SU(N):

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) \quad \phi' = U\phi, U = \exp[i\alpha^a T^a] \quad \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \mathcal{L}(\phi', \partial_\mu \phi') \quad (89)$$

Se adesso rendiamo la trasformazione locale, $\alpha^a \rightarrow \alpha^a(x)$, la Lagrangiana non è più in generale invariante. Per renderla invariante localmente introduciamo N campi di gauge vettoriali $A_\mu^a, a = 1 \dots N$:

$$\mathbf{A}_\mu \equiv A_\mu^a T^a \quad U = \exp[i\alpha^a(x) T^a] \quad \mathbf{A}'_\mu = U \mathbf{A}_\mu U^{-1} + \frac{i}{g} (\partial_\mu U) U^{-1} \quad (90)$$

dove g è una costante cui daremo il significato di costante di accoppiamento. Definiamo la derivata covariante:

$$\mathbf{D}_\mu = \partial_\mu - ig \mathbf{A}_\mu \quad (91)$$

che ha, diversamente dalla derivata semplice, una “buona” proprietà di trasformazione sotto gauge, nel senso che

$$\mathbf{D}_\mu \phi \rightarrow U \mathbf{D}_\mu \phi \quad (92)$$

o equivalentemente, dato che $\phi \rightarrow U\phi$, si può scrivere anche $\mathbf{D}_\mu \rightarrow U \mathbf{D}_\mu U^{-1}$. Da quanto detto è facile constatare che la seguente lagrangiana è localmente invariante sotto SU(N):

$$\mathcal{L}_{YM} = \mathcal{L}(\phi, D_\mu \phi) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \quad (93)$$

avendo definito:

$$\mathbf{F}_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}^a T^a = \frac{1}{ig} [\mathbf{D}_\mu, \mathbf{D}_\nu] \Rightarrow F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c, \quad F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \propto \text{Tr}\{\mathbf{F}_{\mu\nu} \mathbf{F}^{\mu\nu}\} \quad (94)$$

La Lagrangiana di QCD è un caso particolare con N=3:

$$\mathcal{L}_{QCD} = \sum_{f=u,d,s,\dots} i\bar{\psi}_f \mathbf{D}_\mu \psi_f - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \quad (95)$$

A questa vanno aggiunti i termini di gauge fixing, di massa dei quarks ed i ghosts. Il termine di gauge fixing è indispensabile per risolvere un'ambiguità nella definizione del propagatore. In effetti se consideriamo un campo vettore accoppiato con una corrente, $\mathcal{L} = -1/4F^2 + jA$, le equazioni del moto:

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu \Rightarrow \partial_\mu \partial^\mu A_\nu - \partial_\mu \partial^\nu A_\mu = j_\nu \quad (96)$$

si scrivono in trasformata di Fourier:

$$(-k^2 g_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu) A^\mu = j_\nu \quad (97)$$

La corrispondente funzione di Green soddisfa, per definizione:

$$A_\mu = G_{\mu\nu} j^\nu \Rightarrow (-k^2 g_{\mu\alpha} + k_\mu k_\alpha) G^{\alpha\nu} = g_\mu^\nu \quad (98)$$

Ma quest'ultima equazione non ha soluzione, come si vede dal fatto che $(-k^2 g_{\mu\alpha} + k_\mu k_\alpha)k^\alpha = 0$, che è collegato all'invarianza di gauge. Per risolvere questa ambiguità si può ad esempio aggiungere alla Lagrangiana un termine $\frac{1}{2\xi}(\partial_\mu A^\mu)^2$ (ξ -gauge). In questo modo le equazioni del moto cambiano e il propagatore soddisfa:

$$\left(-k^2 g_{\mu\alpha} + k_\mu k_\alpha \left(1 - \frac{1}{\xi}\right)\right) G^{\alpha\nu} = g_\mu^\nu \quad \Rightarrow \quad G_{\mu\nu} = \frac{1}{k^2} \left((1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} - g_{\mu\nu} \right) \quad (99)$$

Una delle scelte più comuni è la gauge di Feynman $\xi=1$.

3.2 Quantizzazione di QED e QCD

In questo paragrafo vedremo che nel caso della QCD è necessario, per preservare l'unitarietà della teoria, aggiungere un termine alla lagrangiana di QCD che descrive stati a metrica negativa detti "ghosts". Tale aggiunta non è invece necessaria nel caso abeliano della QED. In effetti, problemi sorgono nella quantizzazione delle teorie di gauge, per le quali la generalizzazione della (40) sarebbe $[A_\mu(\mathbf{x}, t), \pi_\nu(\mathbf{x}', t)] = i g_{\mu\nu} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$. Tuttavia questo è inconsistente con:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + J_\mu A^\mu \Rightarrow \pi_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_i} = \dot{A}_i - \partial_i A_0 \quad \pi_0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}_0} = 0 \quad ; \quad \partial_i \pi_i = -J_0 \quad (100)$$

dove l'ultima equazione è conseguenza delle equazioni del moto. Quindi delle 4 commutazioni canoniche, 1 salta perchè $\pi_0 = 0$ e l'altra salta perchè $\partial_i \pi_i = -J_0$ è una relazione fra gli operatori di A_μ e quelli, che dovrebbero essere indipendenti, dei campi fermionici ad esempio. I gradi di libertà dinamici che posso quantizzare sono quindi in realtà solo 2. Però se procedo così perdo ovviamente l'invarianza manifesta di Lorentz: $\pi_0 = 0$.

Le difficoltà nella quantizzazione sono legate alla invarianza di gauge: data $A_\mu(\mathbf{x}, 0)$ la soluzione non dà una soluzione univoca $A_\mu(\mathbf{x}, t)$ perchè anche $A_\mu(\mathbf{x}, t) + \partial_\mu \Omega(x, t)$ con Ω opportuno è soluzione. Equivalentemente, il propagatore è in realtà un proiettore $D_{\mu\nu} \partial_\nu \Omega = 0$. Una maniera di risolvere è quella di fissare la gauge, eliminando i gradi di libertà spuri e restando solo con quelli fisici che verranno quantizzati. La scelta più semplice è la gauge di Coulomb, $\partial_i A_i = 0$. In questa gauge si ha dunque:

$$\partial_i A_i = 0 \quad ; \quad \partial_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \partial_i A_0} = J_0 \Rightarrow \partial_i \partial^i A_0 = -J_0 \Rightarrow A_0(\mathbf{x}, t) = \int d^3 \mathbf{x}' \frac{J_0(\mathbf{x}', t)}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \quad (101)$$

e A_0 non è più un grado di libertà dinamico della teoria.

Quantizziamo adesso i gradi di libertà dinamici, tenendo conto che soddisfano $A_0 = 0, \partial_i A_i = 0$. Imponiamo le relazioni di commutazione canonica $[a_{p,s}, a_{k,r}^\dagger] = \delta_{sr} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{k})$, ottenendo:

$$[A_i(\mathbf{x}, t), \pi_j(\mathbf{x}', t)] = -i \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{\mathbf{k}^2} \right) \quad (102)$$

dopo aver tenuto conto che la condizioni $A_0 = 0, \partial_i A_i = 0$ si tramutano per le polarizzazioni nel requisito che esse siano trasverse, e quindi ricostituiscono il proiettore trasverso. Le (102) sono compatibili con le equazioni del moto:

$$\mathcal{L} = -\frac{F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}}{4} + J_i A^i - J_0(\nabla^2)^{-1}J_0 \quad \Rightarrow \quad \square A_i = (\delta_{ij} - \frac{\partial_i \partial_j}{\nabla^2})J_j \equiv J_j^T \quad (103)$$

dove è sottinteso che A_0 che compare in F_{0i} è in realtà $-(\nabla^2)^{-1}J_0$. I campi e il propagatore si scrivono:

$$A_\mu^i(x) = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{\omega} \sum_{i=1}^2 [a e^{-ikx} \varepsilon_\mu^i(\mathbf{k}) + h.c.] \quad \int d^4x e^{ikx} \langle \mathcal{T} A_\mu(x) A_\nu(0) \rangle = i \frac{P_{\mu\nu}^T}{k^2} \quad (104)$$

dove le polarizzazioni trasverse soddisfano

$$\varepsilon_i \cdot \varepsilon_j = -\delta_{ij} \quad \sum \varepsilon_\mu^i \varepsilon_\nu^{i*} = P_{\mu\nu}^T \quad P_{ij}^T = \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \quad P_{00}^T = P_{0i}^T = P_{i0}^T = 0 \quad (105)$$

La quantizzazione (sia in QED che in QCD) finisce qui: in gauge di Coulomb come nelle altre gauge fisiche (gauge assiale, gauge di radiazione ecc.) si quantizzano solo i gradi di libertà fisici, e non occorre nessun termine aggiuntivo alla Lagrangiana. Tuttavia, l'espressione per il propagatore in gauge di Coulomb non è covariante, e questo tende in generale a complicare i calcoli, per cui di solito non è questa la scelta che si fa. Si preferisce una gauge covariante, quale ad esempio quella definita dalla (99) per $\xi = 1$ (gauge di Feynman). Dalla (38) si ottiene facilmente la seguente relazione fra i numeratori dei propagatori nelle varie gauge:

$$P_{\mu\nu}^\xi = P_{\mu\nu}^T + \frac{k^\mu n^\nu + k^\nu n^\mu}{(nk)} + (1 - \xi) \frac{k_\mu k_\nu}{k^2} \quad (106)$$

Per verificare l'invarianza di gauge dobbiamo dimostrare che i termini in $k_\mu, k_\nu, k_\mu k_\nu$ nella (106), connessi con polarizzazioni non fisiche, sono irrilevanti oppure possono essere cancellati con opportune interazioni (i ghosts in QCD). Allo stesso tempo, come vedremo, questo garantisce l'unitarietà della teoria.

Regola di Cutkoski $1/(k^2 + i\varepsilon) \rightarrow \pi\delta(k^2)$. Inoltre $d^4k\delta(k^2) = d\Phi_k$.

In QED $e^-(p_1)e^+(p_2) \rightarrow \gamma(k_1)\gamma(k_2)$ l'ampiezza è $\mathcal{A} = A_{\mu\nu}\varepsilon^\mu(k_1)\varepsilon^\nu(k_2)$ con:

$$A_{\mu\nu} = \bar{v}(p_2) \left\{ \gamma_\nu \frac{1}{\not{p}_1 - \not{k}_1} \gamma_\mu + \gamma_\mu \frac{1}{\not{k}_1 - \not{p}_2} \gamma_\nu \right\} \quad (107)$$

da cui si ottiene:

$$k_1^\mu A_{\mu\nu} = \bar{v}(p_2) \left\{ \gamma_\nu \left[-1 + \frac{1}{\not{p}_1 - \not{k}_1} \not{p}_1 \right] + \left[1 + \not{p}_2 \frac{1}{\not{k}_1 - \not{p}_2} \right] \gamma_\nu \right\} u(p_1) = 0 \quad (108)$$

dove l'ultimo passaggio tiene conto delle equazioni del moto $\bar{v}(p_2)\not{p}_2 = \not{p}_1 u(p_1) = 0$. Questa è un'identità di Ward. I termini in k_μ non contribuiscono.

In QCD (gli indici di colore sono omessi):

$$A_{\mu\nu}^{ab} = \bar{v}(p_2) \left\{ \gamma_\nu \frac{1}{p_1 - k_1} \gamma_\mu T^a T^b + \gamma_\mu \frac{1}{k_1 - p_2} \gamma_\nu T^b T^a \right\} \quad (109)$$

$$+ \bar{v}(p_2) \gamma_\alpha T_c u(p_1) f^{abc} \frac{1}{(p_1 + p_2)^2} [g^{\nu\alpha} (-k_2 - p_1 - p_2)^\mu + g^{\mu\nu} (k_2 - k_1)^\alpha + g^{\alpha\mu} (p_1 + p_2 + k_1)^\nu]$$

Quando si moltiplica per k_1^μ tenendo conto di equazioni del moto e della conservazione dell'impulso, il contributo del primo rigo della (109) si cancella con il contributo del primo termine fra parentesi quadre al secondo rigo. Gli ultimi due termini però non si cancellano, e producono:

$$k_1^\mu A_{\mu\nu}^{ab} = \frac{1}{(p_1 p_2)} f^{abc} \bar{v}(p_2) k_1 T_c u(p_1) k_2^\nu \quad (110)$$

Se $k_2^\nu D_\mu \nu(k_2) = 0$ questo termine non contribuisce, ma non è così. Occorre aggiungere i ghosts, scalari anticommutanti in modo da generare un segno -. Col path integral si dimostra che $\mathcal{L}^g = \partial_\mu \bar{c}^a D^\mu c^a$. Nel caso di QED i ghosts, scalari neutri, sono campi liberi e non contribuiscono alle ampiezze. Non così in QCD.

3.3 Regole di Feynman

Il testo di riferimento è [8].

Il normal ordering indicato coi due punti, consiste nell'ordinare i prodotti di campi in modo che tutti gli operatori di distruzione stiano a sinistra e quelli di creazione a destra. Evita il comparire di infiniti. Ad esempio In effetti nel prodotto di due operatori di campo nello stesso punto compaiono operatori come $a_k a_k^\dagger$ che sono mal definiti. Ad esempio:

$$\langle 0 | \phi^2(0) | 0 \rangle = \int \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{E_1} \frac{d^3 \mathbf{k}_2}{E_2} \langle (a_{k_1} + a_{k_1}^\dagger)(a_{k_2} + a_{k_2}^\dagger) \rangle = \int \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{E_1} \frac{d^3 \mathbf{k}_2}{E_2} \langle a_{k_1} a_{k_2}^\dagger \rangle = \int \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{E_1} = \infty \quad (111)$$

Si definisce allora il normal ordering tale che gli operatori tipo a compaiono sempre a destra e quelli tipo a^\dagger a sinistra:

$$\langle 0 | : \phi^2(0) : | 0 \rangle = \int \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{E_1} \frac{d^3 \mathbf{k}_2}{E_2} \langle : (a_{k_1} + a_{k_1}^\dagger)(a_{k_2} + a_{k_2}^\dagger) : \rangle = \quad (112)$$

$$\int \frac{d^3 \mathbf{k}_1}{E_1} \frac{d^3 \mathbf{k}_2}{E_2} \langle a_{k_1} a_{k_2} + a_{k_2}^\dagger a_{k_1} + a_{k_1}^\dagger a_{k_2} + a_{k_1}^\dagger a_{k_2}^\dagger \rangle = 0$$

Consideriamo una teoria scalare con interazione $L_I = \lambda \phi^4$, e uno scattering $p_1 p_2 \rightarrow p_3 p_4$. Il primo termine nella espansione perturbativa della matrice S (66) corrisponde all'assenza di interazione, e non è molto interessante. Consideriamo quindi il secondo termine; l'invarianza per traslazioni implica la delta di conservazione (e questa è una cosa valida a tutti gli ordini):

$$\int d^4 x i \langle f | L_I(x) | i \rangle = i \int d^4 x \langle f | e^{iP x} L_I(0) e^{-iP x} | i \rangle = \quad (113)$$

$$i \int d^4 x \exp[i(P_i - P_f) x] = (2\pi)^4 i \delta^4(P_f - P_i) \langle f | L_I(0) | i \rangle$$

dove P è l'operatore di traslazione temporale e P_i la somma degli impulsi iniziali. A causa del N-order l'unico pezzo diverso da zero* è ($d[k] = d^3\mathbf{k}/(2k_0)$):

$$\langle a_{p_1} a_{p_2} | : \phi^4(0) : | a_{p_3}^\dagger a_{p_4}^\dagger \rangle = \int d[k]_1 d[k]_2 d[k]_3 d[k]_4 \langle a_{p_1} a_{p_2} a_{k_1}^\dagger a_{k_2}^\dagger a_{k_3} a_{k_4} a_{p_3}^\dagger a_{p_4}^\dagger \rangle = \int d^3\mathbf{k}_1 d^3\mathbf{k}_2 d^3\mathbf{k}_3 d^3\mathbf{k}_4 [\delta^3(\mathbf{p}_1 - \mathbf{k}_1) \delta^3(\mathbf{p}_2 - \mathbf{k}_2) + \mathbf{p}_1 \leftrightarrow \mathbf{p}_2] [\delta^3(\mathbf{p}_3 - \mathbf{k}_3) \delta^3(\mathbf{p}_4 - \mathbf{k}_4) + \mathbf{p}_3 \leftrightarrow \mathbf{p}_4] = 4$$

Inoltre ci sono 3! operatori distinti dello stesso tipo, come ad esempio $a_{k_1}^\dagger a_{k_3}^\dagger a_{k_2} a_{k_4}$. In totale il fattore combinatorio è dunque $4 \times 3! = 4!$ e il vertice produce $4!\lambda$:

$$\langle f | i \int d^4x L_I(x) | i \rangle = -i(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \frac{\lambda}{4} \langle f | : \phi^4(0) : | i \rangle = -i(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) 4!\lambda \quad (114)$$

Di solito si include questo fattore nella $L_I = \phi^4/4!$ e il vertice è λ . Domanda: ottengo una teoria diversa, cioè con predizioni diverse? Questo è un primo esempio di regole di Feynman.

Per calcolare gli ordini successivi occorre usare il teorema di Wick:

$$T\{N[A(x_1)B(x_1)\dots]N[A(x_2)B(x_2)\dots]\dots N[A(x_n)B(x_n)\dots]\} = \sum_i N[i \text{ contrazioni, no e.t.}] \quad (115)$$

dove il secondo membro significa che fissato $i = 3$ ad esempio, bisogna sommare su tutte i possibili termini con 3 contrazioni ma senza contrarre a tempi uguali, cioè senza contrarre all'interno di ogni gruppo N-ordinato. Le contrazioni non sono altro che i propagatori. In buona sostanza abbiamo:

$$\overline{\phi(x_1)\phi(x_2)} \equiv \langle T\{\phi(x_1)\phi(x_2)\} \rangle = \Delta(x_1 - x_2) \quad (116)$$

$$\overline{a(p)\phi(x)} \equiv \int \frac{d^3\mathbf{k}}{2k_0} [a(p), a^\dagger(k)] e^{-ikx} = \int d^3\mathbf{k} \delta^3(\mathbf{p} - \mathbf{k}) e^{-ikx} = e^{-ipx} \quad (117)$$

(la seconda definizione l'ho inventata io). Con questa notazione, il fattore combinatorio trovato in precedenza è semplice: ci sono 4! modi di contrarre gli a con ognuno dei 4 ϕ .

I casi più semplici sono facili da verificare:

$$T\{A(x_1)B(x_2)\} = N[A(x_1)B(x_2)] + \langle T\{A(x_1)B(x_2)\} \rangle \quad (118)$$

$$T\{N[A^2(x_1)]B(x_2)\} = N[A^2(x_1)B(x_2)] + 2A(x_1)\langle T\{A(x_1)B(x_2)\} \rangle \quad (119)$$

Consideriamo lo scattering 2 in 2 ma stavolta con $L_I = \phi^3/3$. L'invarianza per traslazioni consente di scrivere $L_I(x)L_I(y) = L_I(x)e^{iPy}L_I(0)e^{-iPy} = e^{iPy}L_I(x-y)L_I(0)e^{-iPy}$, per cui il termine successivo della (66) è

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{3!}\right)^2 \int d^4x d^4y \langle f | T[: \phi^3(x) :: \phi^3(y) :] | i \rangle = i(2\pi)^4 \delta^4(p_f - p_i) \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{3!}\right)^2 \int d^4z \langle f | T[: \phi^3(z) :: \phi^3(0) :] | i \rangle \quad (120)$$

*1 pezzi del tipo $a_k a_k a_k a_k^\dagger$ eccetera danno zero: per avere roba non nulla occorrono due a_k e due a_k^\dagger .

dove ho ribattezzato $z = x - y$.

Per quanto riguarda la combinatoria, devo considerare:

$$\langle a(p_3)a(p_4)\phi(x)\phi(x)\phi(x)\phi(y)\phi(y)\phi(y)a^\dagger(p_2)a^\dagger(p_1)\rangle \quad (121)$$

Il fattore $1/2$ nella (120) viene mangiato dal fatto che ho due termini identici con x e y scambiati di ruolo. Questo fatto è generale: il fattore $1/n!$ nell'espansione della matrice S come esponenziale viene mangiato dalle permutazioni delle label dei vertici. Considero quindi solo i termini in cui gli a vengono contratti con x e gli a^\dagger con y . L'unico termine connesso è quello in cui contraggo uno dei $\phi(x)$ con uno dei $\phi(y)$, gli a con x e gli a^\dagger con y . Posso farlo in $(3!)^2$ modi diversi, e questo mangia $1/(3!)$ nella (120). Ottengo quindi:

$$\begin{aligned} & \lambda \int d^4z \Delta(z) \langle a(p_3)a(p_4) | T[: \phi^2(z) :: \phi^2(0) :] | a^\dagger(p_2)a^\dagger(p_1) \rangle \\ & = \lambda \int d^4z \Delta(z) e^{-i(p_3+p_4)z} = \frac{\lambda}{(p_1 + p_2)^2 - m^2} \end{aligned} \quad (122)$$

Il relativo diagramma di Feynman.....

3.4 Sezione d'urto per diffusione elastica $ut \rightarrow ut$

Gli ingredienti necessari per calcolare la sezione d'urto sono

- Regole di Feynman
- Espressione per lo spazio delle fasi
- Modulo quadro dell'ampiezza

Lo spazio delle fasi per uno stato finale di due particelle si scrive:

$$d\text{Lips} = (2\pi)^4 \delta^4(p_1+p_2-p_3-p_4) \frac{d^3p_3}{2E_3(2\pi)^3} \frac{d^3p_4}{2E_4(2\pi)^3} = \frac{1}{(2\pi)^2} \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) \frac{d^3p_3}{4E_3E_4} \Big|_{\mathbf{p}_4=\mathbf{p}_3-\mathbf{p}_2-\mathbf{p}_1} \quad (123)$$

dove ho eliminato l'integrale in d^3p_4 tenendo conto del fatto che la δ^3 implica la conservazione del triimpulso. Per valutare questa espressione mettiamoci ora nel sistema del centro di massa, nel quale si ha:

$$p_1 = (E_1, \mathbf{p}) \quad p_2 = (E_2, -\mathbf{p}) \quad p_3 = (E_3, \mathbf{p}') \quad p_4 = (E_4, -\mathbf{p}') \quad p_1^2 = p_3^2 = m_1^2 \quad p_2^2 = p_4^2 = m_2^2 \quad (124)$$

la Quantità $E_1 + E_2$ si indica di solito con \sqrt{s} ed è la massa invariante delle 2 particelle iniziali: $s = (p_1 + p_2)^2$. Nel sistema del centro di massa si ha

$$\mathbf{p}_3 = \mathbf{p}', E_3 = \sqrt{|\mathbf{p}'|^2 + m_1^2}, E_4 = \sqrt{|\mathbf{p}'|^2 + m_2^2} \quad d^3p' = |\mathbf{p}'|^2 d|\mathbf{p}'| d\Omega$$

Adesso, ricordandosi che $\delta(f(x)) = 1/f'(x_0)\delta(x - x_0)$ con $f(x_0) = 0$ si ottiene:

$$d^3p' \delta(E_3(|\mathbf{p}'|) + E_4(|\mathbf{p}'|) - \sqrt{s}) = |\mathbf{p}'|^2 d|\mathbf{p}'| d\Omega \frac{1}{\frac{|\mathbf{p}'|}{E_3} + \frac{|\mathbf{p}'|}{E_4}} = |\mathbf{p}'| \frac{E_3 E_4}{E_3 + E_4} d\Omega \Big|_{E_3 + E_4 = \sqrt{s}} = |\mathbf{p}'| \frac{E_3 E_4}{\sqrt{s}} d\Omega \quad (125)$$

Infine, la conservazione del triimpulso è tenuta automaticamente in conto nella (124), mentre la conservazione dell'energia dà:

$$\sqrt{\mathbf{p}^2 + m_1^2} + \sqrt{\mathbf{p}^2 + m_2^2} = \sqrt{\mathbf{p}'^2 + m_1^2} + \sqrt{\mathbf{p}'^2 + m_2^2} \Rightarrow |\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'| \quad (126)$$

Mettendo insieme le (123,125) si ottiene l'espressione dello spazio delle fasi nel sistema del c.m.:

$$d\text{Lips} = \frac{1}{16\pi^2} \frac{|\mathbf{p}|}{\sqrt{s}} d\Omega \quad \mathbf{p} = \text{triimpulso nel c.m.} \quad \sqrt{s} = \text{energia nel c.m.} \quad (127)$$

Infine:

$$d\sigma = \frac{|A_{fi}|^2}{I} d\text{Lips} = \frac{|A_{fi}|^2}{4|\mathbf{p}|\sqrt{s}} \frac{1}{16\pi^2} \frac{|\mathbf{p}|}{\sqrt{s}} d\Omega = \frac{|A_{fi}|^2}{64\pi^2 s} d\Omega \quad (128)$$

Consideriamo adesso la sezione d'urto di scattering elastico $u(k_1) t(p_1) \rightarrow u(k_2) t(p_2)$ con $k_1^2 = k_2^2 = m^2, p_1^2 = p_2^2 = M^2$, che potrebbe essere rilevante per processi misurati a LHC.

Le regole di Feynman rilevanti sono:

Utilizzando le regole di Feynman il calcolo dell'ampiezza per il processo $u^-(k_1; s_1) t^-(p_1, r_1) \rightarrow u^-(k_2; s_2) t^-(p_2, r_2)$ dove k, p indicano gli impulsi e r, s gli spin (elicità) è piuttosto semplice:

$$\mathcal{A}_{s_1 r_1}^{s_2 r_2} = e^2 \bar{u}_{s_2}(k_2) \gamma_\mu u_{s_1}(k_1) \frac{g^{\mu\nu}}{q^2} \bar{u}_{r_2}(p_2) \gamma_\nu u_{r_1}(p_1) \quad (129)$$

Notare che si può usare $g^{\mu\nu}$

Consideriamo la sezione d'urto unpolarised, cioè mediata sugli spin iniziali e sommata su quelli finali:

$$\sum_{r_1, r_2, s_1, s_2} \frac{|\mathcal{A}_{s_1 r_1}^{s_2 r_2}|^2}{4} = \left(\frac{e^2}{q^2}\right)^2 \frac{\text{Tr}\{(k_2 + m)\gamma_\mu(k_1 + m)\gamma_\nu\}}{2} \frac{\text{Tr}\{(p_2 + M)\gamma^\mu(p_1 + M)\gamma_\nu\}}{2} \equiv \left(\frac{e^2}{q^2}\right)^2 L_{\mu\nu} M^{\mu\nu} \quad (130)$$

con $m(M)$ massa del quark up (top). Per calcolare questa traccia utilizziamo le regole per le tracce delle matrici di Dirac:

$$\text{Tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu\} = 4g_{\mu\nu} \quad ; \quad \text{Tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\rho \gamma_\sigma\} = 4(g_{\mu\nu} g_{\rho\sigma} - g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} + g_{\mu\sigma} g_{\nu\rho}) \quad ; \quad \text{Tr}\{\text{n. dispari di matrici } \gamma\} = 0 \quad (131)$$

Esistono poi altre identità utili che riguardano le contrazioni:

$$\begin{aligned} \gamma_\mu \gamma^\mu &= 4 & \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\mu &= -2\gamma^\alpha & \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\mu &= 4g^{\alpha\beta} & \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta \gamma^\mu &= -2\gamma^\delta \gamma^\beta \gamma^\alpha & (132) \\ \gamma_\mu \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta \gamma^\gamma \gamma^\mu &= 2(\gamma^\gamma \gamma^\alpha \gamma^\beta \gamma^\delta + \gamma^\delta \gamma^\beta \gamma^\alpha \gamma^\gamma) & & & & & & & (133) \end{aligned}$$

Vediamo ora come ricavare queste regole. $\text{Tr}\{\gamma_\mu\} = 0$ è ovvio dalla definizione (2) delle matrici γ . Per due matrici abbiamo $\text{Tr}\{\gamma_\mu\gamma_\nu\} = \text{Tr}\left\{\frac{[\gamma_\mu, \gamma_\nu]}{2} + \frac{\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\}}{2}\right\} = \frac{1}{2}\text{Tr}\{2g_{\mu\nu}\} = 4g_{\mu\nu}$, avendo utilizzato $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}I$ (I =matrice identità). Notare che il termine di anticommutatore non contribuisce per via della proprietà di ciclicità della traccia $\text{Tr}\{\gamma_\mu\gamma_\nu\} = \text{Tr}\{\gamma_\nu\gamma_\mu\}$. Per la traccia di 3 matrici conviene utilizzare la matrice γ_5 introdotta in (2) e che soddisfa $\gamma_5^2 = 1, \{\gamma_5, \gamma_\nu\} = 0\}^*$. Allora

$$\text{Tr}\{\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\} = \text{Tr}\{\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_5^2\} = \text{Tr}\{\gamma_5\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_5\} = -\text{Tr}\{\gamma_\mu\gamma_5\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_5\} = -\text{Tr}\{\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_5^2\} = -\text{Tr}\{\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\rho\} \quad (134)$$

e analogamente per un numero dispari qualunque di matrici γ . Infine, resta da valutare la traccia di 4 matrici γ ; usiamo ripetutamente la regola di anticommutazione $\gamma_\mu\gamma_\nu = -\gamma_\nu\gamma_\mu + 2g_{\mu\nu}$ (evidenzio le coppie per le quali uso questa identità):

$$\begin{aligned} \text{Tr}\{\widehat{\gamma_\mu\gamma_\nu}\gamma_\rho\gamma_\sigma\} &= -\text{Tr}\{\gamma_\nu\widehat{\gamma_\mu\gamma_\rho}\gamma_\sigma\} + 2g_{\mu\nu}\text{Tr}\{\gamma_\rho\gamma_\sigma\} = \text{Tr}\{\gamma_\nu\gamma_\rho\widehat{\gamma_\mu\gamma_\sigma}\} - 2g_{\rho\mu}\text{Tr}\{\gamma_\nu\gamma_\sigma\} + 8g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} \\ &= -\text{Tr}\{\gamma_\nu\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\mu\} + 8g_{\mu\nu}g_{\rho\sigma} - 8g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} + 8g_{\mu\sigma}g_{\rho\nu} \end{aligned} \quad (135)$$

da cui il risultato che appare in (131). Le contrazioni (316) sono facili da ricavare da $\{\gamma_\mu, \gamma_\nu\} = 2g_{\mu\nu}$.

Siamo ora in grado di calcolare la traccia relativa al tensore fermionico:

$$\text{Tr}\{\gamma_\mu(k_1 + m)\gamma_\nu(k_2 + m)\} = \text{Tr}\{\gamma_\mu k_1 \gamma_\nu k_2\} + m^2 \text{Tr}\{\gamma_\mu \gamma_\nu\} = 4[k_1^\mu k_2^\nu + k_1^\nu k_2^\mu - g^{\mu\nu}(k_1 k_2)] + 4m^2 g^{\mu\nu} \quad (136)$$

Un'ulteriore semplificazione deriva dal fatto che $q^2 = (k_2 - k_1)^2 = 2m^2 - 2k_1 k_2$ per cui:

$$L^{\mu\nu} = 4[k_1^\mu k_2^\nu + k_1^\nu k_2^\mu + g^{\mu\nu} \frac{q^2}{2}] \quad M^{\mu\nu} = 4[p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu + g^{\mu\nu} \frac{q^2}{2}] \quad (137)$$

A questo punto la conservazione della corrente implica $q_\mu L^{\mu\nu} = L^{\mu\nu} q_\nu = 0$ e sostituendo in $M_{\mu\nu}$ $p_2 = p_1 + q$ abbiamo

$$L_{\mu\nu} M^{\mu\nu} = 2L_{\mu\nu} [4p_1^\mu p_1^\nu + q^2 g^{\mu\nu}] = 8[(k_1 p_1)(k_2 p_2) + (k_1 p_2)(k_2 p_1) + \frac{m^2 + M^2}{2} q^2] \quad (138)$$

La media su colore e spin iniziali produce un fattore $\frac{1}{2^2 N^2}$, mentre il fattore di colore è $\text{Tr}\{\tau^a \tau^b\} \text{Tr}\{\tau^a \tau^b\} = \frac{N}{4}$. L'espressione finale della sezione d'urto risulta:

$$d\sigma = \frac{|A_{fi}|^2}{16\pi s} d\cos\theta = \frac{1}{16N} \frac{1}{16\pi s} \left(\frac{g^4}{(q^2)^2} \right) \left(8[(k_1 p_1)(k_2 p_2) + (k_1 p_2)(k_2 p_1) + \frac{m^2 + M^2}{2} q^2] \right) d\cos\theta \quad (139)$$

Consideriamo adesso per semplicità il caso $m = M = 0$; nel sistema del centro di massa:

$$k_1 = E(1, \hat{k}) \quad p_1 = E(1, -\hat{k}) \quad k_2 = E(1, \hat{k}') \quad p_2 = E(1, -\hat{k}') \quad (p_1 + k_1)^2 = (p_2 + k_2)^2 \equiv s = 4E^2 \quad (140)$$

*la matrice γ_5 è di fondamentale importanza nella descrizione delle interazioni deboli

da cui si ottiene, definendo $\hat{k}\hat{k}' \equiv \cos \theta$:

$$L_{\mu\nu}M^{\mu\nu} = 2s^2 \left(1 + \frac{(1 + \cos \theta)^2}{4} \right) \Rightarrow \frac{d\sigma}{d\cos \theta} = \frac{1}{16N} \frac{2\pi\alpha_s^2}{s} \frac{4 + (1 + \cos \theta)^2}{(1 - \cos \theta)^2} \quad (141)$$

Notare la singolarità coulombiana a $\theta = 0$, per via della quale la sezione d'urto integrata diverge.

Per finire, di solito la sezione d'urto si esprime in funzione delle variabili di Mandelstam s, t, u definite da:

$$s = (k_1 + p_1)^2 \quad t = (k_1 - k_2)^2 = -\frac{s}{2}(1 - \cos \theta) \quad u = (k_1 - p_2)^2 = -\frac{s}{2}(1 + \cos \theta) \quad s + t + u = 0 \quad (142)$$

in termini delle quali:

$$\frac{d\sigma}{d\cos \theta} = \frac{1}{16N} \frac{2\pi\alpha_s^2}{s} \frac{s^2 + u^2}{t^2} \quad (143)$$

Notare che la sezione d'urto dipende dal numero di colori N : dal confronto coi dati sperimentali si hanno informazioni sul numero di colori $N = 3$.

4 Rinormalizzazione

4.1 Integrali divergenti e regolarizzazione

In teoria dei campi agli ordini superiori compaiono integrali divergenti. Ad esempio in ϕ^4 al second'ordine del processo $p_1 p_2 \rightarrow p_3 p_4$:

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{4} \right)^2 \int d^4 x d^4 y \langle f | T[: \phi^4(x) :: \phi^4(y) :] | i \rangle = \quad (144)$$

$$i(2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{4} \right)^2 \int d^4 z \langle f | T[: \phi^4(z) :: \phi^4(0) :] | i \rangle$$

Nel nostro caso, la matrice S connessa è generata solo dai termini con due contrazioni

$$\int d^4 z \langle f | T[: \phi^4(z) :: \phi^4(0) :] | i \rangle \supset \int d^4 z \Delta^2(z) \langle f | : \phi^2(z) \phi^2(0) : | i \rangle \quad (145)$$

$$= \int d^4 z d^4 k_1 d^4 k_2 e^{ip_1 z} e^{ip_2 z} \frac{e^{-ik_1 z}}{k_1^2 + i\varepsilon} \frac{e^{-ik_2 z}}{k_2^2 + i\varepsilon} = (2\pi)^4 \int d^4 k \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \frac{1}{(p_1 + p_2 - k)^2 + i\varepsilon} \quad (146)$$

Questo integrale va come $d^4 k / (k^2)^2$ per grandi k , e quindi diverge logicamente. Nelle teorie rinormalizzabili gli integrali divergenti appaiono come risultati intermedi dei calcoli. Quando esprimo osservabili in termini di osservabili le divergenze si cancellano e le espressioni sono finite. Siccome non è possibile dare significato ad espressioni come $\infty - \infty$, occorre dare un significato all'integrale, cioè occorre regolarizzarlo. Per regolarizzare l'integrale di $1/(k^2 - m^2 + i\varepsilon)^2$ occorre per prima cosa fare una rotazione di Wick osservando che il polo per $k_0 > 0$ sta sotto l'asse reale e quello per $k_0 < 0$ sta sotto. Possiamo quindi cambiare il percorso di integrazione in campo

complesso ruotando di $\pi/2$ e quindi integrando sull'asse immaginario. Cambiando variabile di integrazione posso chiamare $k_0^E = ik_0, k_i^E = k_i$ per cui $d^4k = id^4k^E$ e:

$$\int \frac{d^4k}{(k^2 - m^2)^2} = i \int \frac{d^4k_E}{(k_E^2 + m^2)^2} \quad (147)$$

Esistono vari modi di regolarizzare questo integrale, discuto solo due procedure. La prima è imporre un cutoff sulla variabile di integrazione $k_E < \Lambda$. D'ora in poi ometto il pedice E , intendendo che gli integrali sono sull'euclideo. Si ottiene:

$$\int \frac{d^4k}{(k^2 + m^2)^2} = \pi^2 \int_0^\Lambda \frac{k^2 dk^2}{(k^2 + m^2)^2} = \pi^2 \log\left(\frac{\Lambda^2}{m^2} + 1\right) - \pi^2 \frac{\Lambda^2}{\Lambda^2 + m^2} \quad (148)$$

Nel limite $\Lambda \gg m$ questo integrale si comporta come $\log \frac{\Lambda}{m}$ e la divergenza è regolarizzata. Questo tipo di regolarizzazione ha una interpretazione fisica piuttosto intuitiva; inoltre nella maniera moderna di intendere la rinormalizzazione la scala Λ ha l'interpretazione di 'scala massima alla quale la teoria può essere tritenuta valida'. In effetti, integrare su tutti i valori di k equivale a pretendere di conoscere la fisica a qualsiasi scala di distanza, anche infinitesima. L'esperienza e la storia della fisica ci insegnano invece che qualsiasi teoria ha un range di validità ben preciso, ed è destinata ad essere sostituita da teorie più complete.

Tuttavia questo tipo di regolarizzazione Un modo di regolarizzare questo integrale è cambiare le dimensioni di integrazione, da 4 a d . Ad esempio per $d = 3$ l'integrale converge, ma si pensa d come una variabile continua. Per capire la misura di integrazione in d dimensioni, consideriamo l'integrale gaussiano:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2}\right)^2 = \int dx dy e^{-x^2+y^2} = \pi \int dx^2 e^{-x^2} = \pi \quad (149)$$

Estendiamo in d dimensioni con $d^d k = \Omega_d dk k^{d-1} = \frac{\Omega_d}{2} dk^2 (k^2)^{\frac{d}{2}-1}$:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2}\right)^d = \pi^{\frac{d}{2}} = \frac{\Omega_d}{2} \int dk^2 (k^2)^{\frac{d}{2}-1} e^{-x^2} = \frac{\Omega_d}{2} \Gamma\left(\frac{d}{2}\right) \Rightarrow \Omega_d = 2 \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \quad (150)$$

dove la Gamma di Eulero estende il fattoriale nel senso che per gli interi $\Gamma(n+1) = n!$ com'è facile verificare integrando per parti. L'integrale diventa:

$$\int \frac{d^d k}{(k^2 + m^2)^2} = \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma\left(\frac{d}{2}\right)} \int dk^2 (k^2)^{\frac{d}{2}-1} (k^2 + m^2)^{-2} = (m^2)^{\frac{d}{2}-2} \pi^{\frac{d}{2}} \Gamma\left(2 - \frac{d}{2}\right) \quad (151)$$

Per far convergere l'integrale è sufficiente prendere $d = 4 - 2\epsilon$. La divergenza quando d tende a 4 si manifesta in poli nella variabile ϵ . Ottengo:

$$(m^2)^{-\epsilon} \pi^{2-\epsilon} \Gamma(\epsilon) = \pi^2 \left[\frac{1}{\epsilon} - \log(m^2) - \gamma - \log \pi \right] + \mathcal{O}(\epsilon) \quad (152)$$

dove γ è la costante di Eulero. Paragonando le (152,148) si nota come le parti finite dell'integrali siano diverse e quindi dipendano dalla regolarizzazione. Possiamo però dire che la parte divergente è identica se facciamo l'identificazione $\frac{1}{\epsilon} \leftrightarrow \log \Lambda^2$.

4.2 Rinormalizzazione

L'esigenza di rinormalizzazione non ha nulla a che vedere con la presenza di quantità divergenti; ha a che vedere invece con la relazione tra i parametri che definiscono una teoria (accoppiamenti, masse ecc.) e le misure effettuate per definirla/comprovarla/falsificarla. Ad esempio un elettrone che propaga in un solido interagisce con il reticolo, per cui possiamo definire parametri come 'carica effettiva' e 'massa effettiva' diversi dalla carica e della massa dell'elettrone nel vuoto. In teoria dei campi ci possiamo chiedere: il parametro e_0 che compare nella Lagrangiana corrisponde alla carica fisica e dell'elettrone? La risposta è no. Possiamo definire la carica fisica dell'elettrone come la costante che compare nel vertice di accoppiamento elettrone fotone quando il momento trasferito q^2 tende a zero. In altre parole $\bar{u}(p_2)\Gamma_\mu u(p_1) \sim e\bar{u}(p_2)\gamma_\mu u(p_1)$ per $q^2 = (p_1 - p_2)^2 \rightarrow 0$. Evidentemente e coincide con e_0 a tree level, ma quando andiamo a considerare le correzioni radiative tale uguaglianza non sussiste più perché l'elettrone si 'veste' delle interazioni elettromagnetiche. Poiché le correzioni radiative presentano divergenze, la relazione tra e ed e_0 ci obbliga a considerare anche e_0 come una quantità divergente:

$$e = e_0(\Lambda) + \delta e(\Lambda) \quad (153)$$

In questa equazione la quantità fisica finita e deriva dalla somma del contributo 'bare' derivante dal parametro e_0 divergente della Lagrangiana e del contributo di correzione radiativa δe anch'esso divergente. Se, ridefinendo i parametri 'bare' in termini dei parametri fisici le divergenze si cancellano, si dice che la teoria è rinormalizzabile. In altre parole in una teoria rinormalizzabile esprimendo osservabili in termini di osservabili si ottengono risultati finiti e non ambigui.

Come primo esempio di teoria rinormalizzabile, consideriamo la QED (senza dimostrare la rinormalizzabilità). Indicando con $(\partial A)^2$ il termine $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} (\partial A_0)^2 + \bar{\Psi}_0 \partial \Psi_0 + e_0 \bar{\Psi}_0 A_0 \Psi_0 &= Z_3 (\partial A)^2 + Z_2 \bar{\Psi} \partial \Psi + Z_1 g \bar{\Psi} A \Psi \\ &= (\partial A)^2 + \bar{\Psi} \partial \Psi + e \bar{\Psi} A \Psi + \delta_3 (\partial A)^2 + \delta_2 \bar{\Psi} \partial \Psi + \delta_1 g \bar{\Psi} A \Psi \end{aligned} \quad (154)$$

Le relazioni fra quantità 'bare' (con pedice 0) e 'renormalized' sono date da:

$$A_0 = \sqrt{Z_3} A \quad ; \quad \Psi_0 = \sqrt{Z_2} \Psi \quad ; \quad e_0 = e \frac{Z_1}{\sqrt{Z_3} Z_2} \quad (155)$$

La prima e l'ultima espressione della (154) corrispondono ai due possibili modi di calcolare le quantità fisiche. Se uso la prima espressione, calcolo le quantità fisiche in termini dei parametri 'bare' e poi utilizzo le (155) per scrivere questi ultimi in termini delle quantità fisiche misurate. Se uso l'ultima espressione invece scrivo direttamente le osservabili in termini di quantità fisiche. Il prezzo che pago è l'introduzione di nuove regole di Feynman corrispondenti ai 'controtermini' parametrizzati dalle δ_i . Notare comunque che le due espressioni corrispondono alla *stessa e unica Lagrangiana*, scritta in due modi diversi.

I controtermini non sono univocamente definiti: l'unico requisito è che eliminino le divergenze, cosicché le parti finite sono arbitrarie. Ad esempio, in uno schema "fisico" il residuo al polo del propagatore dei campi rinormalizzati è fissato a 1 mentre e è la carica misurata a $q^2 = 0$. Questo fissa Z_1, Z_2, Z_3 anche per le parti finite. Ma non è questa la scelta usuale: ad esempio in QCD tale opzione è proibita dato che $q^2 = 0$ corrisponde al regime nonperturbativo. Posso richiedere ad esempio che il vertice fermione-fotone sia collegato ad una misura a $q^2 = \mu^2 \neq 0$: $\bar{u}(p_2)\Gamma_\mu u(p_1) \sim e_\mu \bar{u}(p_2)\gamma_\mu u(p_1)$ per $q^2 = (p_1 - p_2)^2 = \mu^2$. Possiamo anticipare la dipendenza di e, e_μ da e_0 :

$$e \sim e_0(1 + b \log \frac{\Lambda^2}{m^2}) \quad e_\mu \sim e_0(1 + b \log \frac{\Lambda^2}{\mu^2}) \quad (156)$$

dove m è la massa dell'elettrone.

La relazione $e_0 = e \frac{Z_1}{\sqrt{Z_3 Z_2}}$ può essere declinata per le diverse particelle elementari: elettrone e muone ad esempio, dando luogo a carica del muone diversa dalla carica dell'elettrone. Tuttavia carica dell'elettrone, del muone e anche del protone sono sperimentalmente ...

$Z_1 = Z_2$ deriva dall'identità di Ward

$$(p_1 - p_2)_\mu \Gamma^\mu(p_1, p_2) = S_F^{-1}(p_1) - S_F^{-1}(p_2) \quad (157)$$

insieme a $\Gamma^\mu = 1/Z_1 \gamma_\mu, S_F^{-1}(p) = 1/Z_2(\not{p} - m)$.

Notare che le identità di Ward consentono di preservare la struttura di gauge, in quanto posso scrivere, usando $Z_1 = Z_2$:

$$Z_3(\partial A)^2 + Z_2 \bar{\Psi} \partial \Psi + Z_1 g \bar{\Psi} A \Psi = Z_3(\partial A)^2 + Z_2 \bar{\Psi} D \Psi \quad ; \quad D = \partial + eA \quad (158)$$

In altre parole, la Lagrangiana rinormalizzata è ancora invariante di gauge.

Le osservabili hanno una dipendenza funzionale da e_μ diversa da quella che hanno da e ; di nuovo osservabili in termini di osservabili sono nonambigue. In teoria delle perturbazioni ho una residua dipendenza dal parametro arbitrario μ , detto punto di rinormalizzazione: ad esempio se faccio calcoli a un loop la dipendenza residua è a due loop.

4.3 Beta function della QCD

Per la QCD possiamo scrivere:

$$\begin{aligned} & (\partial A_0)^2 + g_0 A_0^2 \partial A_0 + g_0^2 A_0^4 + \bar{\Psi}_0 \partial \Psi_0 + g_0 \bar{\Psi}_0 A_0 \Psi_0 = \\ & = Z_3(\partial A)^2 + Z_1^{(3g)} g A^2 \partial A + Z_1^{(4g)} g^2 A^4 + Z_2 \bar{\Psi} \partial \Psi + Z_1 e \bar{\Psi} A \Psi \end{aligned} \quad (159)$$

Introducendo $A_0 = \sqrt{Z_3} A, \Psi_0 = \sqrt{Z_2} \Psi$ ricaviamo le relazioni :

$$g_0 = \sqrt{\frac{Z_1^{(4g)}}{Z_3}} \frac{g}{\sqrt{Z_3}}; \quad g_0 = \frac{Z_1^{(3g)}}{Z_3} \frac{g}{\sqrt{Z_3}}; \quad g_0 = \frac{Z_1}{Z_2} \frac{g}{\sqrt{Z_3}} \quad (160)$$

In questo caso non è necessario $Z_1 = Z_2$ però per definire la relazione fra g e g_0 in maniera non ambigua sono necessarie le identità di Ward:

$$\sqrt{\frac{Z_1^{(4g)}}{Z_3}} = \frac{Z_1^{(3g)}}{Z_3} = \frac{Z_1}{Z_2} \quad (161)$$

Anche in questo caso le identità di Ward sono connesse con l'invarianza di gauge, in quanto utilizzando le (161) possiamo scrivere:

$$\mathcal{L} = Z_3[(\partial A)^2 + g' A^2 \partial A + g'^2 A^4] + Z_2(\bar{\Psi} \partial \Psi + g' A \partial A) \quad \text{con} \quad g' = g \frac{Z_1}{Z_2} \quad (162)$$

Un calcolo esplicito in gauge di Feynman produce:

$$\delta_3 = \frac{g^2}{16\pi^2} \left(\frac{5}{3} C_A - \frac{2}{3} N_f \right) \frac{1}{\varepsilon} + \dots \quad (163)$$

$$\delta_2 = -\frac{g^2}{16\pi^2} C_F \frac{1}{\varepsilon} + \dots \quad (164)$$

$$\delta_1 = -\frac{g^2}{16\pi^2} (C_F + C_A) \frac{1}{\varepsilon} + \dots \quad (165)$$

In queste equazioni i puntini rappresentano termini finiti; essi sono irrilevanti nello schema 'minimal subtraction' che consiste appunto nel definire i controtermini utilizzando solo i termini in $\frac{1}{\varepsilon}$. Inoltre N_f è il numero di flavor (3 nel Modello Standard), mentre C_A e C_F sono i Casimiri nella rappresentazione aggiunta (dei gluoni) e in quella fondamentale (dei quarks). Otteniamo infine (l'approssimazione vale a 1 loop):

$$g = g_0 \frac{Z_2}{Z_1} \sqrt{Z_3} \approx g_0 \left(1 + \delta_2 - \delta_1 + \frac{1}{2} \delta_3 \right) = g_0 \left(1 + \frac{g_0^2}{16\pi^2} \left(\frac{11}{6} N - \frac{1}{3} N_f \right) \frac{1}{\varepsilon} \right) \quad (166)$$

Notare che il segno del termine $\frac{11}{6} N - \frac{1}{3} N_f$ è diverso in QCD e QED....

La (166) non è del tutto corretta, in quanto non tiene conto della dimensionalità della costante di accoppiamento in d dimensioni. Per capire questo punto consideriamo ϕ^4 . Siccome l'azione $\int d^d x \mathcal{L}$ è adimensionale, la Lagrangiana ha dimensione d . Si ha (le parentesi quadre indicano la dimensione):

$$[(\partial\phi)^2] = 2(1 + [\phi]) = d \Rightarrow [\phi] = \frac{d}{2} - 1; \quad [\lambda\phi^4] = [\lambda] + 2d - 4 = d \Rightarrow [\lambda] = 4 - d \quad (167)$$

Stessa cosa succede in QCD, per cui definisco la costante di accoppiamento come $g = \hat{g}\mu^{4-d} = \hat{g}\mu^{2\varepsilon}$ con \hat{g} adimensionale; d'ora in avanti ometto il cappuccio sopra g . Quindi, mentre la costante bare g_0 dimensionata non dipende da μ , quella rinormalizzata adimensionale dipende da μ . La (166) va letta quindi come

$$g = g_0 \mu^{-2\varepsilon} Z_g(\varepsilon). \quad (168)$$

4.4 RGE

Le RGE derivano dal fatto che certe quantità sono indipendenti dallo schema di rinormalizzazione, e in particolare dal punto di sottrazione μ . Queste quantità sono in genere quantità “bare” oppure osservabili fisiche. Un primo esempio è dato dalla costante di accoppiamento $\alpha = \frac{g^2}{4\pi}$. Sommando i contributi tree level e un loop si ha

$$g = g_0(1 + \beta_1 g_0^2 \log \frac{\Lambda}{\mu}) \quad \beta_1 = \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{11N_c - 2N_f}{3} \right) \quad (169)$$

con $N_c = 3$ numero di colori e $N_f = 6$ numero di famiglie chirali. Λ è una scala non fisica utilizzata per regolarizzare gli integrali divergenti; possiamo pensare ad esempio alla regolarizzazione di Pauli-Villars. Adesso promuoviamo l’eq. (169), che è una equazione ad 1 loop, ad un’equazione valida a tutti gli ordini nel seguente modo:

$$g(\mu) = \frac{g_0}{Z(\frac{\Lambda}{\mu}, g_0)} \quad (170)$$

Il significato di questa equazione è che le divergenze UV sono fattorizzate: g è il prodotto del valore a tree level, g_0 , e di una funzione Z che tiene conto a tutti gli ordini della dipendenza da Λ , cioè delle divergenze. La quantità adimensionale Z può dipendere solo da quantità a loro volta adimensionali, come $\frac{\Lambda}{\mu}$ e g_0 . A un loop, confrontando la (169) e la (170) si ottiene $1/Z^{(1)} = 1 + \beta_0 g_0^2 \log \frac{\Lambda}{\mu}$. Se riscriviamo la stessa equazione nel seguente modo:

$$g_0 = g(\mu) Z(\frac{\Lambda}{\mu}, g_0) \quad (171)$$

risulta chiaro, poiché g_0 non dipende da μ , che le dipendenze da μ di $Z(\frac{\Lambda}{\mu}, g_0)$ e di $g(\mu)$ si devono compensare; questo deve avvenire a tutti gli ordini della teoria delle perturbazioni. Derivando rispetto a μ si ottiene:

$$\frac{dg(\mu)}{d \log \mu} = - \frac{\partial \log Z}{\partial \log \mu} g(\mu) \equiv \beta(g(\mu)) \quad (172)$$

Notare che siccome Z dipende dal rapporto Λ/μ , si ha anche $\beta = g(\mu) \frac{\partial \log Z}{\partial \log \Lambda}$. In altre parole, la β -function è connessa con le divergenze UV collegate a loro volta con Λ . Questo significa che per calcolarla è sufficiente calcolare la parte divergente di una classe di diagrammi di Feynman, e non la parte finita del diagramma generalmente più complesso da valutare. La dipendenza da Λ poi si tramuta in una dipendenza da μ tramite la (172).

La β -function ad 1 loop si ottiene dalla (169) derivando rispetto a μ :

$$\frac{dg(\mu)}{d \log \mu} = -\beta_0 g_0^3 = -\beta_0 g^3(\mu) + \mathcal{O}(g^5(\mu)) \quad (173)$$

Questa equazione si risolve facilmente ottenendo:

$$g(\mu) = \frac{g_0}{\sqrt{1 - 2\beta_0 g_0^2 \log \frac{\Lambda}{\mu}}} \Rightarrow \alpha(\mu) = \frac{\alpha_0}{1 - 8\pi\beta_0\alpha_0 \log \frac{\Lambda}{\mu}} \quad (174)$$

È istruttivo notare come la stessa equazione si possa ottenere in una regolarizzazione dimensionale, nella quale vale la (168):

$$\frac{\partial g(\mu)}{\partial \log \mu} \equiv \beta(g) = -2\varepsilon g_0 \mu^{-2\varepsilon} \left(1 + g_0^2 \frac{\beta_1}{2\varepsilon}\right) = -\beta_1 g_0^3 + \mathcal{O}(\varepsilon) = -\beta_1 g^3 \quad (175)$$

avendo tenuto conto che g^3 differisce da g_0^3 per termini di ordini superiore. Confrontando con la (166) otteniamo il valore della funzione β a 1 loop:

$$\beta_0 = \frac{1}{16\pi^2} \left(\frac{11}{3}N - \frac{2}{3}N_f \right) = \frac{9}{16\pi^2} \quad (176)$$

E' importante notare il miglioramento nel passaggio dalla (169) alla (174): quest'ultima è una espressione *risommata*, nel senso che tiene conto di tutti i termini $\alpha^n \log^n$ a tutti gli ordini nell'espansione perturbativa. In effetti la (169) è solo il primo termine dell'espansione perturbativa della (174):

$$\frac{1}{\sqrt{1 - 2\beta_0 g_0^2 \log \frac{\Lambda}{\mu}}} = 1 + \beta_0 g_0^2 \log \frac{\Lambda}{\mu} + \frac{3}{2} \beta_0^2 g_0^4 \log^2 \frac{\Lambda}{\mu} + \dots \quad (177)$$

Più in generale, le RGE connettono il comportamento della teoria a diverse scale di energia (o distanze). Ad esempio, se consideriamo un'osservabile Γ con dimensioni D che dipenda da un'unica scala energetica E di un dato processo fisico, per motivi dimensionali si ha $\Gamma(E) = E^D \Gamma(1)$. L'osservabile a una scala E_2 è dunque connessa con la stessa osservabile a una scala E_1 dalla semplice relazione $\Gamma(E_2) = (E_2/E_1)^D \Gamma(E_1)$. L'osservabile scala quindi con le proprie dimensioni naturali: si parla in questo caso di 'scaling'. Difficilmente però le osservabili seguono questo scaling ingenuo: lo farebbero se la QCD fosse una teoria invariante di scala, e non lo è. In primo luogo ci sono le masse dei quarks che rompono l'invarianza di scaling ($x \rightarrow \lambda x$ ovvero $p \rightarrow \lambda^{-1}p$). Ma oltre a questo, come vedremo il running della costante di accoppiamento introduce una scala di energia, Λ_{QCD} : le correzioni quantistiche rompono l'invarianza per scaling della teoria massless classica.

Vediamo ora come l'invarianza per rinormalizzazione, cioè l'indipendenza dal punto di rinormalizzazione μ , possa dare informazioni sullo scaling delle osservabili. Una generica osservabile dipende dalle masse dei quarks, che indico collettivamente con m , da una scala di energia E^* , oltre che dalla costante di accoppiamento g_μ connessa con il punto di rinormalizzazione μ . Per ragioni dimensionali si ha:

$$\Gamma(E, m, \mu, g_\mu) = E^D \Gamma\left(1, \frac{m}{E}, \frac{\mu}{E}, g_\mu\right) \quad (178)$$

A questo punto si sarebbe tentati, per determinare l'andamento per $E \gg m$, di fare il limite $m/E = 0$. Molte volte però questo non è possibile a causa della presenza di termini $\log \frac{m}{E}$ che

*assumo implicitamente che eventuali altre scale di energia stiano in rapporti fissi con la scala E quando si fa tendere quest'ultima a infinito.

divergono in questo limite. Questi logaritmi sono spesso dovuti alla struttura infrarossa della teoria, piuttosto che a quella ultravioletta, e li tratteremo più avanti. Per il momento assumiamo di definire opportune osservabili, o combinazioni di osservabili, che siano 'infrared safe', cioè non abbiano termini divergenti per $m \rightarrow 0$. Si ha quindi

$$\Gamma(E, m, \mu, g_\mu) \stackrel{E \gg m}{\approx} E^D \Gamma(1, 0, \frac{\mu}{E}, g_\mu) \quad (179)$$

Quindi grandi valori di E sono legati a piccoli valori di μ ; d'altra parte la dipendenza da μ è fissata dalla richiesta che le osservabili fisiche *non dipendono dalla scelta di μ* , come ci apprestiamo a vedere. Nella espressione (179), a causa della dipendenza esplicita da $\frac{\mu}{E}$ sono presenti in generali grandi logaritmi del tipo $\log \frac{\mu}{E}$. Tuttavia, ed è questo il punto cruciale, l'indipendenza dal punto di rinormalizzazione μ consente di scegliere $\mu = E$, azzerando il contributo dei logaritmi:

$$\Gamma(E, m, \mu, g_\mu) \stackrel{E \gg m}{\approx} E^D \Gamma(1, 0, 1, g_E) \quad (180)$$

Questa è l'espressione finale cercata. È importante notare che g_E viene calcolata assumendo un dato valore alla scala μ e poi runnando tramite l'equazione RGE fino alla scala E ; malgrado questo il valore di g_E non dipende dal punto arbitrario μ scelto. Infatti:

$$\frac{1}{g^2(E)} = \frac{1}{g^2(\mu)} + \beta_0 \log \frac{E^2}{\mu^2} \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \mu} \left[\frac{1}{g^2(E)} \right] = -\frac{2}{g^2(\mu)} \frac{\partial g(\mu)}{\partial \log \mu} - 2\beta_0 = 0 \quad (181)$$

avendo tenuto conto del fatto anche $g(\mu)$ soddisfa la RGE. Anche una qualsiasi funzione della sola g_E come $\Gamma(1, 0, 1, g_E)$ soddisfa $\partial \Gamma / \partial \log \mu = 0$.

Un esempio di osservabile 'infrared free' (rispetto alla QCD) è la sezione d'urto *inclusiva* e^+e^- in adroni. Gli stati iniziali non sentono le interazioni forti e non necessitano rinormalizzazione, mentre la somma sugli stati finali assicura l'assenza di divergenze IR. Una strategia sperimentale può essere:

- Serie di misure sperimentali alla scala E_1 per determinare $g(E_1)$. Ad esempio

$$R \equiv \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{adroni})}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-)} = 3 \sum e_q^2 \left(1 + \frac{\alpha_s(E_1)}{\pi} \right) \quad (182)$$

dove E_1 è l'energia nel centro di massa del processo, e_q le cariche dei quark attivi.

- Running di g dalla scala E_1 alla scala E_2
- Espressione che risomma $(g^2 \log \frac{E_2}{E_1})^n$ data da

$$R = 3 \sum e_q^2 \left(1 + \frac{\alpha_s(E_2)}{\pi} \right) = 3 \sum e_q^2 \left(1 + \frac{\alpha_s(E_1)}{1 + \beta_1 \alpha(E_1) \log \frac{E_2}{E_1}} \frac{1}{\pi} \right) \quad (183)$$

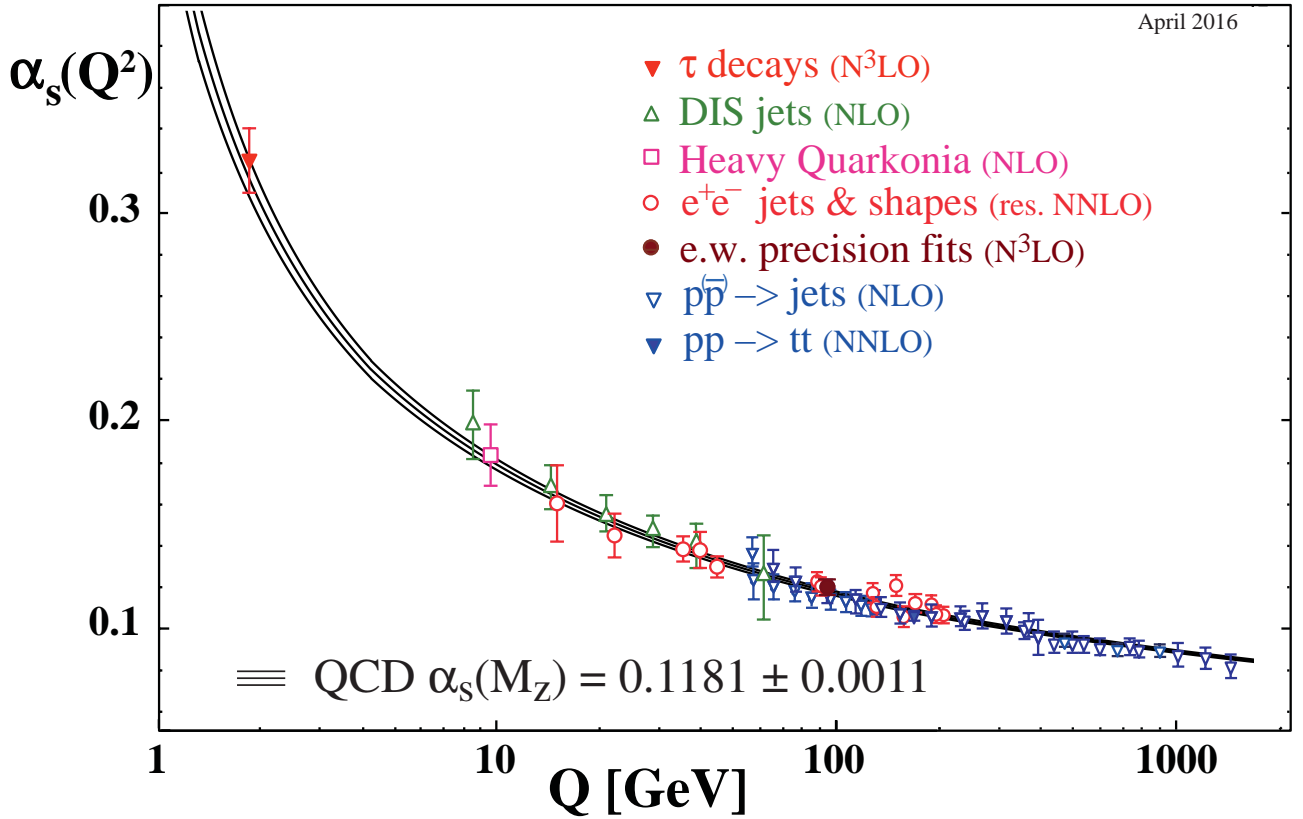


Figure 1: Running di α_s : confronto fra teoria ed esperimento. Da [13]

Tramite la espressione a secondo membro, vengono risommati tutti i termini di ordine $\alpha^n \log^n \frac{E_2}{E_1}$, migliorando l'espansione perturbativa. Scegliendo $E_1 = \Lambda_{QCD}$ come la scala alla quale α tende all'infinito (polo di Landau), otteniamo anche $\alpha(E) = (4\pi\beta_0 \log \frac{E^2}{\Lambda_{QCD}^2})^{-1}$. Sperimentalmente, le misure di α a varie energie portano a concludere che $\Lambda_{QCD} \approx 200$ MeV. La QCD perde così a livello quantistico l'invarianza di scala che possiede classicamente.

Il running della coupling constant risomma, come abbiamo visto, logaritmi del tipo $(\alpha_s L)^n$ con $L = \log(E_1/E_2)$ che sono detti leading log (LL). Nell'espressione perturbativa dell'osservabile sono in generale presenti logaritmi del tipo NLL ($\alpha_s^n L^{n-1}$), NNLL ($\alpha_s^n L^{n-2}$) e così via, per cui la situazione è generalmente complessa e impossibile da descrivere sinteticamente.

Un modo per migliorare la precisione teorica è quello di calcolare gli ordini più elevati nella

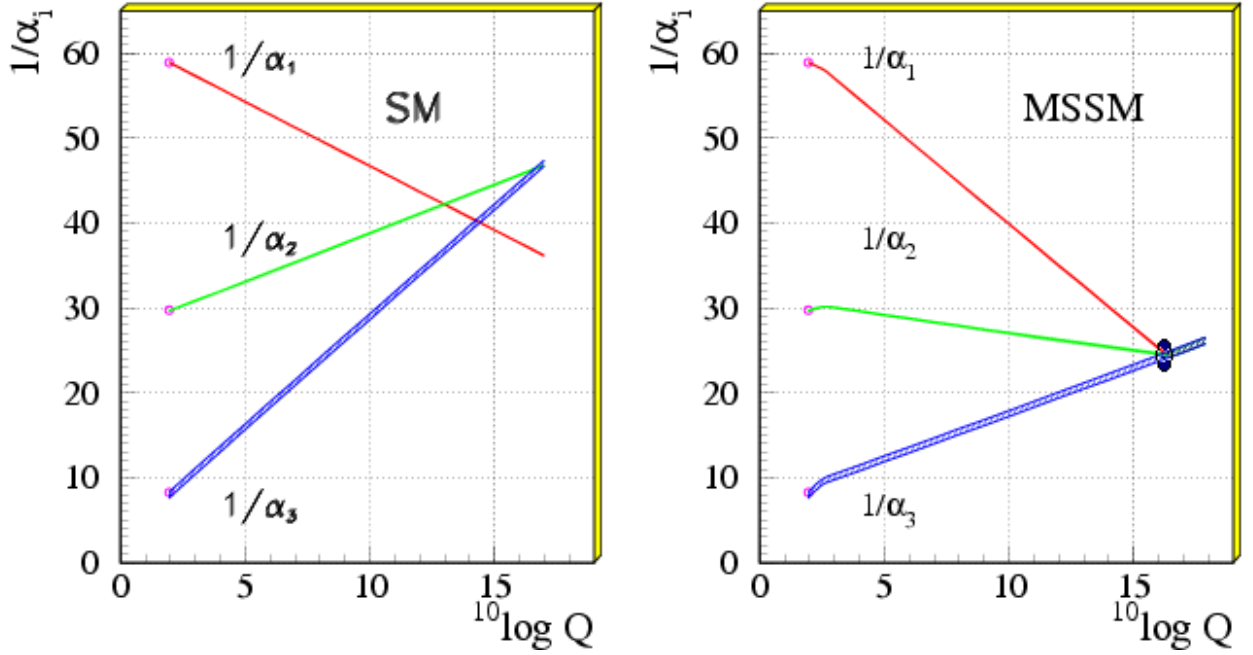


Figure 2: Running delle costanti di accoppiamento nello SM e in MSSM. La soglia MSSM a 2 TeV è ben visibile.

coupling constant:

$$R = 3 \sum e_q^2 \left(1 + \frac{LO}{\pi} \alpha_s(E) + c_2 \left(\frac{NLO}{\pi} \alpha_s(E) \right)^2 + c_3 \left(\frac{NNLO}{\pi} \alpha_s(E) \right)^3 + c_4 \left(\frac{NNLO}{\pi} \alpha_s(E) \right)^4 + ..???) \quad (184)$$

Le costanti c_2, c_3, c_4 sono date in [13] mentre c_5 è ignoto. I termini successivi vengono chiamati LO (leading order), NLO (next-to-leading order) eccetera. Oltre a questo, si può andare ad ordini più elevati nel running di α :

$$2\pi \frac{d\alpha_s}{d \log \mu} = -(b_0 \alpha_s^2 + b_1 \alpha_s^3 + b_2 \alpha_s^4 + \dots) \quad (\mathcal{O}(\alpha_s^5) \text{ ignoto}) \quad (185)$$

che corrisponde a LL, NLL, NNLL ecc.

Nel Modello Standard si ha, per le costanti del gruppo $SU(3) \otimes SU(2) \otimes U(1)$, rispettivamente $b_0 = (-7, -19/6, 41/10)$: le coupling constants di $SU(3)$ e di $SU(2)$ risultano quindi asymptotically free, quella di $U(1)$ no. Non tutte le osservabili però sono connesse esclusivamente con il running coupling constant, come vediamo nel prossimo paragrafo.

4.5 Dimensioni anomale

Ci sono quantità che necessitano rinormalizzazione per essere finite. Sono un esempio i propagatori, e in generale le funzioni di Green, ma anche quantità intermedie che compaiono nei calcoli

come il tensore $W_{\mu\nu}$ che introduco più avanti per analizzare il Deep Inelastic Scattering.

Suppongo ora di considerare quantità sufficientemente inclusive, in modo da non avere divergenze IR; ho solo una scala rilevante, che chiamo E e quindi per $E \gg m$ le quantità adimensionali dipendono solo da $\frac{E}{\mu}$. Considero un'oggetto adimensionale, per cui se Γ ha dimensione D riscalo $\Gamma \rightarrow \Gamma E^{-D}$. Indicata con Γ_0 la quantità bare, divergente ma μ -independent e con Γ_R la quantità rinormalizzata, finita ma μ -dependent, per rinormalizzazione moltiplicativa si ha:

$$\Gamma_0(E, \alpha_0) = Z^{-1}\left(\frac{E}{\mu}, \alpha_0\right) \Gamma_R\left(\frac{E}{\mu}, \alpha(\mu)\right) \Rightarrow \frac{d\Gamma_R\left(\frac{E}{\mu}, \alpha(\mu)\right)}{d \log \mu} = \frac{d \log Z\left(\frac{E}{\mu}, \alpha_0\right)}{d \log \mu} \Gamma_R \equiv \gamma(\alpha(\mu)) \Gamma_R\left(\frac{E}{\mu}, \alpha(\mu)\right) \quad (186)$$

Se $\gamma = 0$, la soluzione è quella che abbiamo visto prima $\Gamma_R\left(\frac{E}{\mu}, \alpha(\mu)\right) = \Gamma_R(1, \alpha(E))$. Occorre aggiungere un fattore esponenziale generato da γ :

$$\Gamma_R\left[\left(\frac{E}{\mu}, \alpha(\mu)\right)\right] = \exp\left[-\int_0^{\log \frac{E}{\mu}} \gamma[\alpha(x)] dx\right] \Gamma_R[1, \alpha(E)] \quad (187)$$

Nel caso di teorie asintoticamente libere come la QCD lo scaling assume una forma particolarmente semplice se ci si mette ad energie asintotiche tali che $\alpha(E) \approx 0$. La Γ_R si può allora scrivere in funzione dell'espressione nella teoria libera, $\Gamma_R^{free} = \Gamma_R(1, \alpha = 0)$:

$$\begin{aligned} \Gamma_R(E, \mu) &= \exp\left[-\int_0^{\log \frac{E}{\mu}} \gamma[\alpha(t)] dt\right] \Gamma_R^{free} \Rightarrow \frac{\Gamma_R(E)}{\Gamma_R(E_0)} = \exp\left[-\int_{\log \frac{E_0}{\mu}}^{\log \frac{E}{\mu}} \gamma(\alpha(t)) dt\right] \quad (188a) \\ &= \exp\left[-\int_{\log \frac{E_0}{\mu}}^{\log \frac{E}{\mu}} d_\Gamma \alpha(t) dt\right] = \exp\left[\int_{\alpha(E_0)}^{\alpha(E)} \frac{d_\Gamma d\alpha}{b \alpha}\right] = \exp\left[\frac{d_\Gamma}{b} \log \frac{\alpha(E)}{\alpha(E_0)}\right] = \left[\frac{\alpha(E)}{\alpha(E_0)}\right]^{\frac{d_\Gamma}{b}} \end{aligned}$$

Dove ho definito, al primo ordine, $\gamma(\alpha) = d_\Gamma \alpha$ e ho tenuto conto che la running coupling constant soddisfa, sempre al primo ordine, $\frac{d\alpha}{dt} = -b\alpha^2$ cioè $\alpha(t) dt = -\frac{1}{b} \frac{d\alpha}{\alpha}$. γ è detta dimensione anomala in quanto segnala lo scostamento dal comportamento naïf $\Gamma \sim E^D$.

5 Divergenze IR: cancellazioni, risommazioni

5.1 Correzioni virtuali

Nella correzione di vertice che definisce la Z_1 compagno, oltre alle divergenze UV, anche divergenze IR. Vediamo come. Massless quarks, ignoriamo la struttura di colore (per ora).

$$i \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \bar{u}(p_1) \gamma_\mu \frac{\not{k} + \not{p}_1}{(p_1 + k)^2} \Gamma_\alpha \frac{\not{k} - \not{p}_2}{(p_2 - k)^2} \gamma_\mu v(p_2) \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} \quad (189)$$

Adesso utilizziamo:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{k^2 + i\varepsilon} = \mathcal{P}\left(\frac{1}{k^2}\right) - i\pi\delta(k^2) \quad (190)$$

e consideriamo solo la δ , visto che per $k^2 = 0$ i due propagatori fermionici sono singolari nel limite IR ($k \rightarrow 0$). Trascuriamo al numeratore i termini lineari in k . Inoltre utilizziamo le regole di anticommutazione delle matrici gamma per scrivere $\not{p}_2 \gamma_\mu = -\gamma_\mu \not{p}_2 + 2p_2^\mu$ e l'equazione di Dirac $\not{p}_2 v(p_2) = 0$ per ottenere $\not{p}_2 \gamma_\mu v(p_2) = 2p_2^\mu v(p_2)$. Analogamente, $\bar{u}(p_1) \gamma_\mu \not{p}_1 = 2p_1^\mu \bar{u}(p_1)$. Otteniamo infine:

$$-4 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \delta(k^2) \frac{p_1 p_2}{(p_1 k)(p_2 k)} \bar{u}(p_1) \Gamma_\alpha v(p_2) = \mathcal{M}_0 \frac{g_s^2}{(2\pi)^4} \left(-4\pi^2 \int \omega d\omega d \cos \theta \frac{p_1 p_2}{(p_1 k)(p_2 k)} \right) \quad (191)$$

dove \mathcal{M}_0 è l'elemento di matrice a tree level, l'angolo θ è quello fra $\mathbf{p}_1 e \mathbf{k}$ e $k = (\omega, \mathbf{k})$. Come si vede, le correzioni IR a 1 loop sono fattorizzate rispetto al tree level. Però l'integrale in (191) si comporta come $d\omega/\omega$ e quindi diverge IR. Inoltre diverge anche per $\theta \approx 0$, regione nella quale si comporta come $d\theta^2/\theta^2$ (divergenza collineare). Per regolarizzare l'integrale introduciamo una massa λ per il fotone. Nel sistema del centro di massa, avendo trascurato la massa dei fermioni, si ha:

$$p_1 = E(1, \hat{\mathbf{p}}_1), k = (\omega, \mathbf{k}), k^2 = \lambda^2 \Rightarrow p_1 k = E(\omega - \sqrt{\omega^2 - \lambda^2} \cos \theta) \stackrel{\theta \sim 0, \omega \gg \lambda}{\approx} \frac{E}{2\omega} (\omega^2 \theta^2 + \lambda^2) \quad (192)$$

mentre $p_1 p_2 \approx 2E^2$ e $p_2 k \approx 2E\omega^*$. Si ha quindi:

$$\int \omega d\omega d \cos \theta \frac{p_1 p_2}{(p_1 k)(p_2 k)} \approx 2 \int \frac{d\omega}{\omega} \frac{d\theta^2}{\theta^2 + \frac{\lambda^2}{\omega^2}} \approx 2 \int_\lambda^E \frac{d\omega}{\omega} \log \frac{\omega^2}{\lambda^2} = \frac{1}{2} \log^2 \frac{E^2}{\lambda^2} \quad (193)$$

Il calcolo è svolto a livello LL, che in questo caso significa doppio logaritmo: si trascurano sistematicamente i termini che danno origine a singoli log e costanti[†]. Dalle (191) e (193) si ottiene l'espressione a 1 loop per elemento di matrice e sezione d'urto:

$$\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_0 \left(1 - \frac{\alpha_s}{4\pi} \log^2 \frac{E^2}{\lambda^2} \right) \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_0 \left(1 - 2 \frac{\alpha_s}{4\pi} \log^2 \frac{E^2}{\lambda^2} \right) \quad (194)$$

L'espressione così ottenuta è palesemente non fisica: intanto dipende da una scala arbitraria λ ; inoltre la σ_1 decresce con l'energia E fino a diventare negativa: questo segnala che l'espressione perturbativa converge male e non ci si può accontentare delle correzioni a primo ordine, che superano il 100% relativo. Riguardo al secondo punto, è possibile risommare le correzioni leading $\mathcal{O}(\alpha^2 \log^{2n})$; la procedura coinvolge due steps:

- Fattorizzazione: l'elemento di matrice risommato è fattorizzato nell'espressione di tree level (quindi priva di divergenze IR) moltiplicata per una funzione che contiene tutte le informazioni IR, e quindi la dipendenza dal cutoff arbitrario λ .

*da aggiungere il contributo della regione altrettanto singolare $\theta \sim \pi$

[†]Il limite superiore su ω è una scala, E , che separa i contributi divergenti IR da quelli finiti e divergenti UV; notare che se prendo $2E$ invece che E ottengo lo stesso risultato a livello doppiolog. Infine, esiste una parametrizzazione, quella di Sudakov, che rende più rigorosamente definito il dominio di integrazione [7].

- Ordinamento: La regione di integrazione che produce le divergenze leading è quella in cui l'ampiezza a $n+1$ loop è ottenuta tramite quella a n loop in cui i gluoni scambiati hanno energie $\omega_i, i = 1 \cdots n > \omega_0$, aggiungendo in tutti i possibili modi il gluone più soffice con energia $\lambda < \omega_0 < \omega_i$.

Per quanto riguarda la fattorizzazione, iterando il procedimento visto a 1 loop, è facile vedere che l'elemento di matrice a due loops (vedi fig. 3) è dato dall'espressione fattorizzata :

$$\mathcal{M}_2 \approx \frac{p_1 p_2}{(p_1 k_1)(p_2 k_1)} \frac{p_1 p_2}{[p_1(k_1 + k_2)][p_2(k_1 + k_2)]} \mathcal{M}_0 \quad (195)$$

Per capire il secondo punto, consideriamo il grafico a 2 loops di figura 3. Ignorando per il momento la struttura collineare e focalizzandoci sulla dipendenza dall'energia dei gluoni, nel numeratore compare la struttura $(p_1 k_1)(p_1(k_1 + k_2)) \sim \omega_1(\omega_1 + \omega_2)$. Valuto lo stesso integrale in 2 variabili ω_1 e ω_2 calcolato dapprima nella regione $\lambda < \omega_1, \omega_2 < E$ con l'ordinamento $\omega_1 < \omega_2$ e poi nella stessa regione ma con ordinamento $\omega_1 > \omega_2$:

$$\int_{\omega_1 < \omega_2} \frac{d\omega_1}{\omega_1} \frac{d\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} = \int_{\lambda}^E \frac{d\omega_1}{\omega_1} \log\left(\frac{\omega_1 + E}{2\omega_1}\right) = \frac{1}{2} \log^2 \frac{E}{\lambda} + \dots \quad (196)$$

$$\int_{\omega_1 > \omega_2} \frac{d\omega_1}{\omega_1} \frac{d\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} = \int_{\lambda}^E \frac{d\omega_1}{\omega_1} \log\left(\frac{2\omega_1}{\lambda + \omega_1}\right) = \frac{1}{2} \log(4) \log \frac{E}{\lambda} + \dots \quad (197)$$

Come si vede, nel primo caso di gerarchia "diretta" $\omega_1 < \omega_2$, la singolarità in λ è doppio logaritmica, mentre nel caso di gerarchia "invertita" $\omega_1 > \omega_2$, la singolarità è solo singolo log: il contributo IR leading viene quindi dalla prima regione di integrazione. Il motivo è facile da intuire: nel secondo caso l'integrale in $d\omega_2$ il denominatore $\omega_1 + \omega_2$ è cutoffato inferiormente da $\omega_1 > \omega_2$ e quindi l'integrale in $d\omega_2$ non produce nessuna singolarità logaritmica. Nel secondo caso invece si ha $\omega_1 + \omega_2 \sim \omega_2$ ed entrambe gli integrali producono una singolarità logaritmica, dando origine al doppio log. In effetti il primo integrale si può valutare direttamente come

$$\int_{\omega_1 < \omega_2} \frac{d\omega_1}{\omega_1} \frac{d\omega_2}{\omega_1 + \omega_2} \approx \int_{\lambda}^E \frac{d\omega_1}{\omega_1} \int_{\omega_1}^E \frac{d\omega_2}{\omega_2} = \frac{1}{2} \log^2 \frac{E}{\lambda} \quad (198)$$

Tutto questo è direttamente collegato con la valutazione del contributo a due loops che contiene al denominatore un termine $(p_1 k_1)(p_1(k_1 + k_2)) \sim \omega_1(\omega_1 + \omega_2)$ (vedi fig. 3).

Poichè l'ordinamento è iterativo, cioè si trovano gluoni sempre più duri andando dall'esterno verso l'interno del diagramma, possiamo calcolare la correzione a n loops. Per far questo teniamo conto anche dell'integrale in θ , che nella regione collineare produce, come si vede dalla (193), un termine $\log \frac{\omega}{\lambda}$:

$$\delta \mathcal{M}_n = \left(-\frac{\alpha_s}{\pi}\right)^n \int_{\lambda < \omega_1 < \dots < \omega_n < E} \frac{d\omega_1}{\omega_1} \frac{d\omega_2}{\omega_2} \dots \frac{d\omega_n}{\omega_n} \log \frac{\omega_1}{\lambda} \dots \log \frac{\omega_n}{\lambda} \mathcal{M}_0 = \frac{1}{n!} \left(-\frac{\alpha_s}{\pi} \log^2 \frac{E}{\lambda}\right)^n \mathcal{M}_0 \quad (199)$$

Si riconosce l'espansione in serie dell'esponenziale, per cui:

$$\mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \exp \left[-\frac{\alpha_s}{\pi} \log^2 \frac{E}{\lambda} \right] \Rightarrow \sigma = \sigma_0 \exp \left[-\frac{2\alpha_s}{\pi} \log^2 \frac{E}{\lambda} \right] \quad (200)$$

In maniera del tutto equivalente, si potrebbe riconoscere che, siccome la dipendenza dal cutoff IR è portata solo dal gluone più esterno, l'elemento di matrice soddisfa una equazione differenziale:

$$\frac{\mathcal{M}}{\partial \log \lambda} = \left(\frac{2\alpha_s}{\pi} \log \lambda \right) \mathcal{M}; \quad \mathcal{M}(\lambda = E) = \mathcal{M}_0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{M} = \mathcal{M}_0 \exp \left[-\frac{\alpha_s}{\pi} \log^2 \frac{E}{\lambda} \right] \quad (201)$$

Questa espressione ha mutato (nel limite $\lambda \rightarrow 0$) un $-\infty$ in uno 0. La dipendenza da un cutoff arbitrario va certamente curata. Notare che l'equivalenza ordinamento $\langle - \rangle$ equazione differenziale è del tutto analoga all'equazione di Schroedinger per l'operatore di evoluzione, la cui soluzione è un oggetto ordinato nella variabile tempo anziché energia.

5.2 Correzioni reali

Definizione dell'osservabile...ai collider si osservano i jet...in QED è la stessa cosa. Le correzioni reali si calcolano usando le stesse approssimazioni che ho usato per i virtuali. Notare che siccome $\delta(k^2)d^4k = d\Phi_k$ con $d\Phi_k$ spazio delle fasi per emissione di un fotone reale, la misura di integrazione è la stessa per reali e virtuali. L'elemento di matrice risulta (R sta per reali):

$$\delta\mathcal{M}_1^R = \bar{u}(p_1)\gamma_\mu \frac{1}{\not{p}_1 + \not{k}} \gamma_\alpha v(p_2) - \bar{u}(p_1)\gamma_\alpha \frac{1}{\not{p}_2 + \not{k}} \gamma_\mu v(p_2) \quad (202)$$

Adesso usiamo l'identità:

$$\frac{1}{(p_1 + k)^2} \bar{u}(p_1)(\not{p}_1 + \not{k}) = \frac{1}{(p_1 + k)^2} \bar{u}(p_1)[2p_1^\mu - \not{p}_1 + \gamma_\mu \not{k}] \approx \frac{p_1^\mu}{p_1 k} \bar{u}(p_1) \quad (203)$$

avendo tenuto conto dell'equazione di Dirac e avendo trascurato un termine in k al numeratore che produrrebbe una singolarità meno forte di quella che vogliamo isolare. Un analogo procedimento sulla leg 2 dà come risultato finale:

$$\delta\mathcal{M}_1^R \approx g_s \mathcal{M}_0 [J \cdot \varepsilon_p^*(k)] \quad J^\mu = \left[\frac{p_1^\mu}{p_1 k} - \frac{p_2^\mu}{p_2 k} \right]$$

dove \mathcal{M}_0 è l'ampiezza a tree level e $\varepsilon_p(k)^\mu$ è la polarizzazione del fotone con polarizzazione p . L'elemento di matrice modulo quadro è proporzionale a $J_\mu D^{\mu\nu} J_\nu$ con $D_{\mu\nu} = \sum_p \varepsilon_\mu^{p*} \varepsilon_\nu^p = -g_{\mu\nu} + k_\mu \dots$. Tuttavia i termini in k_μ, k_ν non contribuiscono per via della conservazione della corrente $k \cdot J(k) = 0$ per cui $|\mathcal{M}|^2 \sim J^\mu J_\mu |\mathcal{M}_0|^2$. L'elemento di matrice modulo quadro è in definitiva:

$$|\mathcal{M}^R|^2 \approx e^2 |\mathcal{M}_0|^2 \left[\frac{2p_1 p_2}{(p_1 k)(p_2 k)} \right]$$

Nella definizione di osservabile...blablabla integriamo fino alla risoluzione sperimentale Δ ottenendo:

$$\sigma_1^R = \sigma_0 \left(1 + 2 \frac{\alpha_s}{4\pi} \log^2 \frac{\Delta^2}{\lambda^2} \right) \quad (204)$$

Sommando virtuali (194) e reali (204) si ottiene:

$$\sigma_1^\Delta = \sigma_0 \left(1 - 2 \frac{\alpha_s}{4\pi} \log^2 \frac{E^2}{\Delta^2} \right) \quad \sigma_{LL}^\Delta = \sigma_0 \exp \left[-2 \frac{\alpha_s}{4\pi} \log^2 \frac{E^2}{\Delta^2} \right] \quad (205)$$

in quanto la risommazione si può fare in maniera analoga, trattando reali e virtuali insieme col diagramma di unitarietà. Discutere i casi $\Delta \rightarrow 0$ e $\Delta \rightarrow E$. Quest'ultimo caso è rilevante per la misura sperimentale di e^+e^- in adroni. Otteniamo così l'andamento dominante ad alta energia. l'IR conta di più dell'UV!

Un'ultima annotazione sulle cancellazioni reali-virtuali. Supponiamo di voler isolare quark e antiquark di un dato colore, mettiamo indice 1 (rosso) e 2 (blu). In questo caso, anche se si somma sulla radiazione di gluoni finali, la cancellazione non avviene. Infatti dai diagrammi di Feynman si può vedere che i reali sono proporzionali a $\sum_a |T_{12}^a|^2 = |T_{12}^1|^2 + |T_{12}^2|^2 = 1/2$ mentre i virtuali sono proporzionali a $\sum_a T_{1k}^a T_{k2}^a = 0!$ Se invece si somma anche sugli indici i, j di quark e antiquark finali, i reali sono proporzionali a $\sum_a |T_{ij}^a|^2 = \sum_a T_{ij}^a T_{ji}^a = 4$. La correzione virtuale a 1 loop, d'altro canto, è proporzionale a $-\sum_a T_{ik}^a T_{kj}^a = -4/3 \delta_{ij}$. L'interferenza di questa con il tree level, proporzionale a δ_{ij} , produce di nuovo un fattore -4. Notare che è più semplice considerare direttamente i moduli quadri (cut di unitarietà). Interessante la connessione con il confinamento (ma fenomeno nonperturbativo). Nel caso elettrodebole invece.... [11]

6 Sezione d'urto elettrone-protone

6.1 Cinematica

Consideriamo una particella di massa nulla (elettrone) che urta contro una particella di massa M (protone) inizialmente a riposo:

$$e^-(k) \quad p(P) \rightarrow e^-(k') \quad p(P'); \quad P = (M, \mathbf{0}), \quad k' = E'(1, \hat{\mathbf{k}}') \quad (206)$$

$$k = E(1, \hat{\mathbf{k}}), \quad P' = (P'_0, \mathbf{P}'); \quad P'^2 = M^2; \quad \cos \theta \equiv \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}}' \quad (207)$$

Si introducono le variabili

$$\nu \equiv E - E' \quad Q^2 = -q^2 = -(k - k')^2 = 2EE'(1 - \cos \theta) \quad (208)$$

legate fra loro dalla conservazione dell'energia $P + q = P'$ di modo che:

$$\nu = \frac{Q^2}{2M} \Rightarrow E' = \frac{ME}{M + E(1 - \cos \theta)} \quad (209)$$

Il fattore di flusso è $I = 4(Pk) = 4ME$, mentre lo spazio delle fasi si scrive

$$d\Phi = \frac{1}{4(2\pi)^2} \delta(M + E - E' - P'_0) \frac{E'}{P'_0} dE' 2\pi d\cos\theta \Big|_{\mathbf{k}=\mathbf{k}'+\mathbf{P}'} = \frac{1}{8\pi} \frac{E'^2}{ME} d\cos\theta \quad (210)$$

avendo tenuto conto del fatto che

$$P'_0 = \sqrt{(\mathbf{k} - \mathbf{k}')^2 + M^2} = \sqrt{E^2 + E'^2 - 2EE' \cos\theta + M^2} \Rightarrow \frac{\partial(E' + P'_0)}{\partial E'} = \frac{ME}{P'_0 E'} \quad (211)$$

La sezione d'urto risulta quindi:

$$d\sigma = \frac{1}{I} |\mathcal{A}|^2 d\Phi = \frac{1}{32\pi} \frac{1}{M^2} \left(\frac{E'}{E}\right)^2 |\mathcal{A}|^2 d\cos\theta \quad (212)$$

6.2 Scattering puntiforme

Consideriamo ora lo scattering dell'elettrone su di una particella carica di spin 0, come il pione. In questo caso si ha:

$$|\mathcal{A}|^2 = \frac{L_{\mu\nu} W^{\mu\nu}}{q^4}; \quad L_{\mu\nu} = [k_\mu k'_\nu + k'_\mu k_\nu - (kk')g_{\mu\nu}] \quad W_{\mu\nu} = (P + P')_\mu (P + P')_\nu \rightarrow 4P_\mu P_\nu \quad (213)$$

dove l'ultimo passaggio è stato possibile grazie alla conservazione della corrente $q_\mu L^{\mu\nu} = L^{\mu\nu} q_\nu = 0$. Si ottiene quindi:

$$|\mathcal{A}|^2 = e^4 \frac{2(Pk)(Pk') - (kk')P^2}{q^4} = \frac{M^2}{4EE'} \frac{1 + \cos\theta}{(1 - \cos\theta)^2} = \frac{M^2}{8EE'} \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (214)$$

da cui, utilizzando la (212), la sezione d'urto:

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta} (e^- \pi \rightarrow e^- \pi) = \frac{e^4}{256\pi} \frac{1}{E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{E'}{E} \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (215)$$

Si può esprimere la sezione d'urto anche in altre variabili, ad esempio Q^2 , ottenendo*:

$$\frac{d\sigma}{dQ^2} = \frac{e^4}{256\pi} \frac{1}{E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{EE'} \cos^2 \frac{\theta}{2} = \frac{e^4}{16\pi} \frac{1}{Q^4} \left(\frac{E'}{E}\right) \cos^2 \frac{\theta}{2} \quad (216)$$

Infine, anche se nel caso presente c'è solo un grado di libertà, è utile per il seguito reintrodurre la variabile $\nu = E - E'$ tramite $1 = d\nu \delta(\nu - \frac{Q^2}{2M})$ ottenendo:

$$\frac{d\sigma(e^- \pi \rightarrow e^- \pi)}{dQ^2 d\nu} = \frac{e^4}{256\pi} \frac{1}{E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{EE'} \cos^2 \frac{\theta}{2} \delta(\nu - \frac{Q^2}{2M}) \quad (217)$$

* $Q^2 = 2EE'(1 - \cos\theta) = 2E^2 M(1 - \cos\theta)/(M + E(1 - \cos\theta))$ da cui $dQ^2/d\cos\theta = (E'/E)^2$

Veniamo ora al protone, che ha spin $1/2$; l'unica differenza rispetto a prima è che:

$$W_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{Tr}\{P\gamma_\mu P'\gamma_\nu\} = 2[P_\mu P'_\nu + P_\nu P'_\mu - g_{\mu\nu}(PP')] \rightarrow 4P_\mu P_\nu + g_{\mu\nu}q^2 \quad (218)$$

dove il fattore $1/2$ tiene conto dello spin del protone e la freccetta è legata alla conservazione della corrente. Il primo termine nell'ultima equazione è identico a quello dello scattering da spin 0, mentre il secondo introduce un termine aggiuntivo per cui la differenza fra ampiezze modulo quadro nel caso spin $1/2$ e spin 0 risulta:

$$\frac{\Delta|\mathcal{A}|^2}{|\mathcal{A}|^2} = \frac{q^2 L_\mu^\mu}{4P_\mu P_\nu L^{\mu\nu}} = -\frac{q^2}{2M^2} \tan^2 \frac{\theta}{2} \quad (219)$$

e dalla (216) si ricava, nel caso di pioni e protone considerati puntiformi:

$$\frac{d\sigma(e^-P \rightarrow e^-P)}{dQ^2} = \frac{d\sigma(e^-P \rightarrow e^-P)}{dQ^2} \left(1 + \frac{\Delta|\mathcal{A}|^2}{|\mathcal{A}|^2}\right) = \frac{e^4}{16\pi} \frac{1}{Q^4} \left(\frac{E'}{E}\right) \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} - \frac{q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2}\right) \quad (220)$$

6.3 Fattori di forma

Consideriamo lo scattering da un potenziale esterno in meccanica quantistica. L'ampiezza è in questo caso, considerando stati finali e iniziali di onda piana:

$$-2\pi i \delta(E_f - E_i) \langle f | V(\mathbf{x}) | i \rangle = -2\pi i \delta(E_f - E_i) \int d^3x V(\mathbf{x}) e^{i(\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_f) \cdot \mathbf{x}} = -2\pi i \delta(E_f - E_i) \tilde{V}(\mathbf{q}) \quad \mathbf{q} = \mathbf{p}_f - \mathbf{p}_i \quad (221)$$

e la sezione d'urto risulta $d\sigma = \text{cost.} |\tilde{V}(\mathbf{q})|^2$, dove la *cost.* tiene conto di flusso iniziale, spazio delle fasi ecc. Nel caso di scattering elettromagnetico da una carica puntiforme, il potenziale soddisfa $\nabla^2 V = \delta^3(\mathbf{x})$ e in trasformata di Fourier $\tilde{V}(\mathbf{q}) = \frac{1}{\mathbf{q}^2}$ da cui la sezione d'urto $d\sigma = \text{cost.} |\frac{1}{\mathbf{q}^2}|^2$. Se invece lo scattering avviene da una carica distribuita con densità $\rho(\mathbf{x})$, il potenziale soddisfa $\nabla^2 V = \rho(\mathbf{x})$ e quindi $d\sigma = \text{cost.} |\tilde{\rho}(\mathbf{q})|^2$. In definitiva, indicando con $d\sigma_{\text{punt}}$ la sezione d'urto senza struttura, cioè puntiforme, nel caso di carica distribuita si ha:

$$d\sigma_\rho = d\sigma_{\text{punt}} |\tilde{\rho}(\mathbf{q})|^2 \quad (222)$$

La funzione $\rho(\mathbf{q})$ è detta fattore di forma, relativa in questo caso al potenziale, proprio perché è legata alla forma del bersaglio: in questo caso, la distribuzione di carica. Un esperimento di scattering può essere quindi una utilissima sonda per capire come è fatto il bersaglio. Il primo esempio fu probabilmente il famoso esperimento di Rutherford: mandando particelle alpha su atomi, alcune di queste tornano indietro a angoli di deflessione elevati, cosa spiegabile solo con un nocciolo molto piccolo di carica $+$. Dal punto di vista matematico, la (222) fa capire che se la carica è distribuita in maniera molto uniforme, la $\tilde{\rho}(\mathbf{q})$ è quasi una delta, cioè

è significativamente diversa da zero solo a piccoli valori del momento trasferito \mathbf{q} , quindi lo scattering avviene quasi tutto in avanti. Se invece la carica è concentrata nell'origine, la $\tilde{\rho}(\mathbf{q})$ è diversa da zero anche a valori elevati di $|\tilde{\rho}(\mathbf{q})|$, che corrispondono a grandi valori dell'angolo di deflessione (backscattering). Quantitativamente, un dato valore di $|\mathbf{q}|$ sonda un valore di $|\mathbf{x}|$ ad esso legato dal principio di indeterminazione di Heisenberg: $|\mathbf{q}||\mathbf{x}| \sim 1$. Notare infine che se normalizziamo la carica a 1, $\int d^3x \rho(\mathbf{x}) = 1$, questo comporta $\tilde{\rho}(0) = 1$.

Che cosa possiamo dire a proposito dello scattering π^+e^- analizzato in precedenza? Se possiamo pensare all'elettrone come puntiforme, altrettanto non si può certamente dire per il pione. Il π^+ è composto da un quark up (u) e da un antiquark down (\bar{d}), ma non possiamo di certo pensare questi due quark come cariche libere e puntiformi. In effetti, oltre all'interazione elettromagnetica, che possiamo pensare trascurabile, i quarks si scambiano gluoni, che mediano le interazioni forti. Queste ultime però, alla scala di massa tipica del pione di circa 200 MeV, sono fortemente non perturbative e non possono essere trattate con la teoria delle perturbazioni. In effetti, la descrizione del pione in termini dei quarks che lo costituiscono e delle interazioni fra loro (in analogia a come si descrive ad esempio un atomo come nucleo+elettroni) è un problema tuttora aperto*. Che cosa possiamo fare dunque? Ritorniamo alla forma della corrente utilizzata nel caso di pioni puntiformi $j_\mu(x) = (p_1 + p_2)_\mu e^{i(p_2 - p_1)x} = j_\mu(0)e^{iqx}$. Al solito la dipendenza da x si combina con altri fattori per dare la delta di conservazione dell'impulso, per cui concentriamoci sulla $j_\mu(0)$. Qual'è la sua forma più generale? Dobbiamo scrivere un oggetto che si trasforma come un quadrivettore e abbiamo a disposizione pochiquadrivettori: p_1, p_2, q legati dalla conservazione dell'energia $p_2 - p_1 = q$ quindi solo 2 oggetti indipendenti. Quindi $j^\mu(0) = Ap_1^\mu + Bp_2^\mu$. A, B non sono necessariamente costanti: possono dipendere dagli invarianti che riesco a costruire, che sono q^2 e $p_1^2 = p_2^2 = M^2$. Tutti gli altri invarianti sono funzioni di questi, ad esempio $p_1 p_2 = M^2 - \frac{q^2}{2}$ e così via. Inoltre M^2 è proprio una costante: interessa qui solo la dipendenza dalle variabili cinematiche come q^2 per cui la forma più generale è $j^\mu(0) = A(q^2)p_1^\mu + B(q^2)p_2^\mu$. Possiamo ancora dire qualcosa, grazie all'invarianza di gauge che ci assicura che la corrente è conservata $\partial_\mu j^\mu(x) = 0$ Che si traduce in $q_\mu j^\mu(0) = 0$:

$$j^\mu(0) = A(q^2)p_1^\mu + B(q^2)p_2^\mu \quad (p_2 - p_1)_\mu j^\mu(0) = (p_1 p_2 - M^2)(A - B) = 0 \Rightarrow A = B \quad (223)$$

La forma più generale della corrente è quindi $j^\mu(0) = F(q^2)(p_1^\mu + p_2^\mu)$. A questo punto è facile seguire gli stessi passaggi che hanno permesso di ricavare la sezione d'urto per pioni puntiformi ottenendo:

$$\frac{d\sigma}{d\cos\theta}(e^-\pi^+ \rightarrow e^-\pi^+) = \frac{d\sigma}{d\cos\theta}(e^-\pi^+ \rightarrow e^-\pi^+) \Big|_{\text{punt}} |F(q^2)|^2 \quad (224)$$

La carica elettrica è definita come la carica misurata quando q^2 tende a zero, per cui deve essere $F(0) = 1$. Questa condizione è analoga a quella vista in precedenza per la normalizzazione della carica nel caso di scattering da potenziale.

*esistono alcune tecniche non perturbative come lagrangiane chirali, QCD su reticolo ma manca una descrizione completa

Infine, è chiaro come gli esperimenti di scattering di questo tipo (con $q^2 < 0$, cioè “spacelike”) o esperimenti di annichilazione $e^+e^- \rightarrow \pi^+\pi^-$ (con $q^2 > 4M^2$, cioè “timelike”) possono misurare $F(q^2)$ e quindi sono una sonda sulla struttura del pione. Spiegare questa struttura è, come già accennato, una sfida difficile per qualsiasi teoria.

Consideriamo adesso la corrente associata ad un fermione. per l’elettrone, considerato puntiforme, abbiamo visto che la corrente si scrive $j_\mu(e^-) = \bar{u}(k_2)\gamma_\mu u(k_1)$. Cosa possiamo dire per un oggetto puntiforme come ad esempio il protone? Dobbiamo costruire in questo caso, in analogia a quanto fatto per il pione, l’oggetto più generale della forma $\bar{U}(k_2)\Gamma_\mu u(k_1)$. La matrice Γ_μ è una generica matrice 4x4, quindi è necessario scrivere una base nello spazio delle matrici 4x4. E’ possibile dimostrare che le 16 matrici della tabella 2 sono effettivamente una base ortonormale (vedi [8]) , per cui è possibile scrivere ogni bilineare nella forma $\bar{u}_2 M u_1 = \sum_\alpha c_\alpha \bar{u}_2 \Gamma_\alpha u_1$. In tabella sono riportate anche le proprietà sotto parità del bilineare. Ad esempio, $\bar{u}_2 \gamma_\mu u_1 \xrightarrow{P} g_{\mu\mu} \bar{u}_2 \gamma_\mu u_1$ significa che la componente temporale rimane invariata ($g_{00} = 1$) e quelle spaziali cambiano segno ($g_{ii} = -1$); questo è il comportamento sotto parità di un vettore. Così il campo elettromagnetico A_μ è un vettore, e così pure, ovviamente, la corrente scalare $j_S^\mu = (p_1 + p_2)^\mu$. Anche la corrente fermionica $j_F^\mu = \bar{u}(k_2)\gamma_\mu u(k_1)$ è un vettore, di modo che l’interazione elettromagnetica $j_\mu A^\mu$ sotto parità va in se stessa in quanto le componenti spaziali A_i, j_i cambiano entrambe segno (formalmente $j_\mu A^\mu \xrightarrow{P} g_{\mu\mu} g^{\mu\mu} j_\mu A^\mu = j_\mu A^\mu$). Si dice che la QED (quantum electrodynamics) è invariante sotto parità.

Ritornando alla forma più generale della corrente di un protone, abbiamo a disposizione come nel caso del π i vettori k_1, k_2 e l’invariante $q^2 = (k_2 - k_1)^2$. In più, possiamo scrivere un bilineare utilizzando tutte le matrici della tabella 2. Alcuni termini sono però esclusi, e lo sono in particolare tutti quelli che contengono γ_5 . Ad esempio, se scrivo $j_5^\mu = \bar{u}(k_2)\gamma_\mu \gamma_5 u(k_1)$, l’accoppiamento col campo elettromagnetico $j_5^\mu A_\mu$ non è invariante sotto parità in quanto j_5^μ è uno pseudovettore, cioè le componenti spaziali *non* cambiano segno sotto parità. D’altra parte l’invarianza sotto parità è ben verificata sperimentalmente per la QED. In definitiva, la forma più generale per la corrente del protone, utilizzando $q = k_2 - k_1$ e $P = k_2 + k_1$ al posto di k_1 e k_2 è

$$J_\mu = \bar{U}(k_2)\Gamma_\mu U(k_1) = \bar{U}(k_2) \{Aq^\mu + BP^\mu + C\gamma^\mu + Di\sigma^{\mu\nu}q_\nu + Ei\sigma^{\mu\nu}P_\nu\} U(k_1) \quad (225)$$

con $A, B, \dots E$ funzioni di q^2 . Una prima semplificazione di questa espressione si ottiene utilizzando le identità di Gordon, che nel caso in esame si scrivono:

$$\bar{U}(k_2) \{i\sigma_{\mu\nu}q^\nu - 2M\gamma_\mu + P_\mu\} U(k_1) = 0 \quad ; \quad \bar{U}(k_2) \{i\sigma_{\mu\nu}P^\nu + q_\mu\} U(k_1) = 0 \quad (226)$$

Esercizio Utilizzando l’equazione di Dirac $\not{k}U(k) = MU(k)$, dimostrare le identità di Gordon (226)

Posso quindi eliminare 2 dei 5 fattori di forma nella (225); per convenzione si usa la forma:

$$\bar{U}(k_2)\Gamma_\mu U(k_1) = \bar{U}(k_2) \{Aq^\mu + B\gamma^\mu + Ci\sigma^{\mu\nu}q_\nu\} U(k_1) \quad (227)$$

Infine, la conservazione della corrente $q_\mu J^\mu = 0$ implica $q^2 A = 0$ (**Esercizio:** dimostrare questo passaggio!) cioè $A = 0$ da cui l'espressione finale:

$$J_\mu = \bar{U}(k_2) \left\{ F_1(q^2) \gamma_\mu + F_2(q^2) i \sigma^{\mu\nu} q_\nu \right\} U(k_1) \quad (228)$$

Nel prossimo paragrafo cerchiamo di capire qual'è il significato fisico di questa espressione.

6.4 Limite non relativistico della corrente: il momento magnetico dell'elettrone

Per dare un significato fisico alla (228) consideriamo dapprima un la elettrone in campo magnetico. Un elettrone in un campo elettromagnetico è soggetto alla Forza di Lorentz $\mathbf{F} = e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})$, dove e è la carica dell'elettrone con segno, e \mathbf{v} la sua velocità. Questa forza si deriva dalla Hamiltoniana:

$$H = \frac{(\mathbf{p} - e\mathbf{A})^2}{2m} + eA_0 \quad (229)$$

Difatti le equazioni di Hamilton $\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$ si scrivono*:

$$\begin{cases} \dot{p}_i = (p_j - eA_j) e \partial_i A_j - e \partial_i A_0 \\ \dot{x}_i = \frac{p_i - eA_i}{m} \end{cases} \Rightarrow m \ddot{x}_i = e(-\dot{A}_i + v_j \partial_i A_j - \partial_i A_0) = e(-\partial_t A_i - \partial_i A_0 + v_j \partial_i A_j - v_j \partial_j A_i) \quad (230)$$

Ricordandosi che $E_i = -\partial_i A_0 - \partial_t A_i, B_i = \epsilon_{ijk} \partial_j A_k$ e utilizzando $\epsilon_{kij} \epsilon_{kmn} = \delta_{im} \delta_{jn} - \delta_{in} \delta_{jm}$, si ottiene che l'ultima espressione è proprio $e(\mathbf{E} + \mathbf{v} \wedge \mathbf{B})_i$.

Nel limite nonrelativistico, il sistema viene descritto dall'hamiltoniana (229). Consideriamo il caso di un campo esterno A_μ indipendente dal tempo e mettiamo in gauge di Lorentz, $\partial_\mu A^\mu = \nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ per cui $[\mathbf{A}, \mathbf{p}] = 0$ e la (229) si scrive:

$$H = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V \quad ; \quad V = e \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}}{m} + eA_0 \quad \left(+ \frac{e^2}{2m} \mathbf{A}^2 \right) \quad (231)$$

In realtà però noi sappiamo che l'elettrone relativistico è correttamente descritto dall'equazione di Dirac, e, dal punto di vista perturbativo, da un interazione di tipo $j_\mu A^\mu$. Il significato fisico di questa espressione è però poco chiaro. Per dare una interpretazione fisica proviamo a considerare un esperimento di scattering di un elettrone da potenziale al primo ordine della teoria delle perturbazioni. Da un lato, possiamo fare un trattamento nonrelativistico tramite il potenziale definito in (231) (escludendo il termine $e^2 \mathbf{A}^2$ che è di ordine superiore in e). Dall'altro, possiamo confrontare quanto ottenuto con l'espressione relativistica ottenuta dall'ampiezza $\mathcal{A} \sim A_\mu j^\mu$; per far questo occorre fare una espansione anche nel parametro $\frac{q}{m}$ che dice quanto la cinematica si discosta dal limite nonrelativistico.

*ricordarsi che lungo le traiettore $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ per il campo $A_i(t, \mathbf{x}(t))$ si ha $\dot{A}_i = \partial_t A_i + \dot{x}_j \partial_j A_i$

Per fare il limite nonrelativistico della corrente, e quindi delle soluzioni dell'equazione di Dirac, conviene utilizzare piuttosto che la rappresentazione (2) una rappresentazione in cui il ruolo di γ_0 e γ_5 sono scambiati:

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_i = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_i \\ -\sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_5 = i\gamma_0\gamma_1\gamma_2\gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (232)$$

Le soluzioni dell'equazione di Dirac $(\not{p} - m)u = 0$ in questa rappresentazione sono (**Esercizio:** dimostrarlo):

$$u = \begin{pmatrix} \alpha \\ \frac{\mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}}{p_0 + m} \alpha \end{pmatrix} \quad (233)$$

Questa rappresentazione è quindi migliore nel limite nonrelativistico $\frac{v}{c} = \frac{|\mathbf{p}|}{p_0} \rightarrow 0$ in quanto sono separate le componenti "piccole di ordine $\frac{v}{c}$ (in basso nella (233)) e quelle "grandi" di ordine 1 (in basso nella (233)). Nella rappresentazione (2) invece, le componenti sono dello stesso ordine nel limite nonrelativistico (vedi la 29). Dalla (233) si ottiene $u^\dagger u = \frac{2p_0}{p_0 + m} \approx 1$ nel limite nonrelativistico; analogamente $\bar{u}u = 1$.

Consideriamo ora un esperimento di scattering da potenziale esterno di un elettrone, con impulso iniziale p_1 e finale p_2 , definendo $q = p_2 - p_1$. Lo scattering in teoria delle perturbazioni nonrelativistica viene descritto da un'ampiezza:

$$\mathcal{A} = -2\pi\delta(E_2 - E_1)i \int \langle f|V|i \rangle = -2\pi\delta(E_2 - E_1)i \int V(\mathbf{x})e^{i(\mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1) \cdot \mathbf{x}} = -2\pi i \delta(q_0) \tilde{V}(\mathbf{q}) \quad (234)$$

dove ho indicato con la tilde la trasformata di Fourier. Nella teoria delle perturbazioni relativistica invece, l'ampiezza è:

$$\mathcal{A} = \int A_\mu(\mathbf{x})j^\mu(x) = \int A_\mu(\mathbf{x})e^{iqx}j^\mu(0) = -2\pi i \delta(q_0) \tilde{A}^\mu(\mathbf{q})j_\mu(0) \quad (235)$$

Per mettere a confronto queste due espressioni occorre fare il limite nonrelativistico della corrente elettronica $j_\mu(0) = \bar{u}(p_2)\gamma_\mu u(p_1)$; conviene utilizzare l'identità di Gordon (226) ($q = p_2 - p_1$, $P = p_2 + p_1$):

$$e\bar{u}(p_2)\gamma_\mu u(p_1) = \frac{e}{2m}\bar{u}(p_2) \{i\sigma_{\mu\nu}q^\nu + P_\mu\} u(p_1) \quad (236)$$

Il termine in P_μ è il più semplice da interpretare, essendo identico a quello di una particella scalare:

$$e\bar{u}(p_2)\frac{(p_1 + p_2)^\mu}{2m}u(p_1) \approx e\frac{p_1^\mu}{m}\bar{u}(p_1)u(p_1) = e\frac{p_1^\mu}{m} = (e, e\frac{\mathbf{p}}{m}) \quad (237)$$

avendo tenuto solo il termine di ordine 0 in q , cioè avendo posto $p_1 = p_2$. Utilizzando questa espressione, l'ampiezza diventa:

$$\mathcal{A} = -2\pi i \delta(q_0) \tilde{A}^\mu(\mathbf{q})j_\mu(0) = -2\pi i \delta(q_0) (e\tilde{A}_0 + e\frac{\mathbf{p} \cdot \tilde{\mathbf{A}}}{m}) \quad (238)$$

ed è facile identificare in questa espressione il potenziale definito in (231). In particolare, il termine in A_0 è l'interazione Coulombiana di una particella di carica e . Abbiamo quindi imparato che nel limite $q = 0$ si ottiene semplicemente l'interazione nonrelativistica di una particella carica in campo elettromagnetico.

Il secondo termine nella (236) identifica, come vedremo, lo spin dell'elettrone, e scompare nel limite $q \rightarrow 0$. Lo spin è quindi un effetto relativistico, che scompare nel limite nonrelativistico. Per valutare questo termine, iniziamo col dire che siccome A_μ non dipende dal tempo, comunque q_0 è zero (vedi la (235)). Quindi $\sigma_{\mu\nu}q^\nu = \sigma_{\mu j}q^j$. Utilizzando le (232) si ottiene:

$$i\sigma_{0j} = -\frac{[\gamma_0, \gamma_j]}{2} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_j \\ \sigma_j & 0 \end{pmatrix} \quad i\sigma_{ij} = -\frac{[\gamma_i, \gamma_j]}{2} = \begin{pmatrix} -i\epsilon_{ijk}\sigma_k & 0 \\ 0 & -i\epsilon_{ijk}\sigma_k \end{pmatrix} \quad (239)$$

Siccome $\sigma_{\mu\nu}q^\nu$ contiene già una potenza di q , possiamo valutare $\bar{u}(k_2)\sigma_{\mu\nu}u(k_1)$ nel limite $\mathbf{p}_1 = \mathbf{p}_2 = 0, E_1 = E_2 = m$. In questo limite contribuiscono solo le componenti "grandi" di u , cioè quelle in alto nella (233), e quindi σ_{0j} in particolare non contribuisce. si ottiene:

$$\frac{e}{2m}\bar{u}(p_2)\{i\sigma_{\mu\nu}q^\nu\}u(p_1)\tilde{A}^\mu \approx \frac{e}{2m}\alpha^\dagger(-i\epsilon_{ijk}\sigma_k q_j)\alpha\tilde{A}^i = \alpha^\dagger\left(\frac{e}{2m}\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{B}\right)\alpha \quad (240)$$

dove ho tenuto conto del fatto che, siccome $B_k = \epsilon_{kji}\partial_j A_i$, in trasformata di Fourier $\tilde{B}_k = i\epsilon_{kji}q_j\tilde{A}^i$. Il termine (240) può essere descritto come un'interazione fra il campo magnetico \mathbf{B} e il momento magnetico dell'elettrone $\boldsymbol{\mu}$:

$$V(x) = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B} \quad ; \quad \boldsymbol{\mu} = \frac{e}{m}\mathbf{S} \equiv g\frac{e}{2m}\mathbf{S} \quad (241)$$

Il coefficiente g viene chiamato fattore di Landé, e vale 2 per l'elettrone. Per la fisica classica, per un insieme di cariche con un momento angolare \mathbf{L} e rapporto fra carica e massa pari a $\frac{e}{m}$ il fattore di Landé vale $g = 1$. Così se descrivo l'elettrone come una distribuzione di cariche arbitrarie in rotazione, anche per l'elettrone dovrebbe valere $g=1$. Invece il valore quantistico predetto dall'equazione di Dirac è, come abbiamo visto, $g = 2$.

Siamo ora in grado di dare una interpretazione fisica della corrente del protone (228), che assume e grazie alla identità di Gordon la forma:

$$J_\mu = e\bar{U}(p_2)\left\{F_1(q^2)\frac{p_1^\mu + p_2^\mu}{2M} + (F_1(q^2) + 2MF_2(q^2))\frac{i\sigma^{\mu\nu}q_\nu}{2M}\right\}U(k_1) \quad (242)$$

Il primo termine è, come visto, quello di una particella di carica $eF_1(0)$. Siccome sperimentalmente le cariche di elettrone e protone sono uguali, deve essere $F_1(0) = 1$. Il secondo termine corrisponde a una particella di momento magnetico $\frac{e}{2M}(F_1(0) + 2MF_2(0)) \equiv \frac{e}{2M}(1 + k)$. $k = 2MF_2(0)$ è detto momento magnetico anomalo, perchè indica di quanto si scosta il valore del momento magnetico da quello predetto dall'equazione di Dirac per un fermione carico puntiforme, che corrisponde a $k = 0$. In tab. 1 sono indicati i valori sperimentali di k per l'elettrone,

il protone e il neutrone. E' evidente l'incongruenza con quanto finora detto: se l'elettrone è effettivamente puntiforme e la sua corrente è $j_\mu = \bar{u}\gamma_\mu u$, perchè il suo momento magnetico è anomalo, cioè si discosta dal valore $g = 2$ predetto dall'equazione di Dirac? Il motivo è che l'elettrone è puntiforme per modo di dire; le correzioni radiative inducono un fattore di forma, cioè una dipendenza da q^2 : un esempio è il diagramma di fig. (4).

6.5 Scattering elastico elettrone-protone

Abbiamo adesso in mano tutti gli elementi per calcolare la sezione d'urto elastica $e^-p^+ \rightarrow e^-p^+$ in QED. Tale scattering è detto elastico perchè l'identità delle particelle iniziali (e^-, p) è la stessa di quelle finali. Se il protone fosse puntiforme, otterremmo lo stesso risultato che nello scattering elettrone-protone con protone puntiforme analizzato nel par.6.2, e cioè la sezione d'urto (220). Se possiamo considerare l'elettrone puntiforme, in quanto le correzioni ad una corrente del tipo $j_\mu \sim \gamma_\mu$ sono di ordine 10^{-3} (vedi tab. 1), la corrente del protone data in (228) contiene due fattori di forma di cui bisogna tener conto. Il calcolo della sezione d'urto elettrone-protone procede sulle stesse linee di quello della sezione d'urto elettrone-muone, fatta eccezione per la forma diversa della corrente protonica. Per convenzione si riparametrizza la corrente del protone (228) nella forma:

$$J_\mu = \bar{U}(p_2) \left\{ F_1(q^2)\gamma_\mu + \frac{kF_2(q^2)}{2M}i\sigma^{\mu\nu}q_\nu \right\} U(p_1) \quad (243)$$

dove k è il momento magnetico anomalo del protone, di modo che F_1 e F_2 hanno le stesse dimensioni e $F_2(0) = 1$. Calcolando il tensore adronico da questa corrente e dopo un procedimento piuttosto laborioso, si ottiene:

$$|\mathcal{A}|^2 = L_{\mu\nu}M^{\mu\nu} \quad M^{\mu\nu} = \frac{W_2(q^2)}{M^2}[P^\mu - \frac{Pq}{q^2}q^\mu][P^\nu - \frac{Pq}{q^2}q^\nu] + W_1(q^2)(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2}) \quad (244)$$

dove $L_{\mu\nu}$ è l'usuale tensore fermionico (218) e dove $W_2 = F_1^2 - \frac{k^2q^2}{4M^2}F_2$, $W_1 = -\frac{q^2}{2M^2}(F_1 + kF_2)^2$. Procedendo nel calcolo della sezione d'urto seguendo i passi finora visti, si ottiene nel sistema del laboratorio:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} \Big|_{lab}^{e^+p \text{ el}} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{E'}{E} \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} W_2(q^2) + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} W_1(q^2) \right) \quad (245)$$

dove $E(E')$ è l'energia dell'elettrone prima (dopo) dello scattering. Il primo termine in questa espressione è identico alla sezione d'urto elettrone - pione (224) per cui si intuisce che W_2 è in qualche modo legato al contributo della distribuzione di carica del protone alla sezione d'urto. W_1 invece, che è zero nel caso di scattering elettrone-pione, è legato allo spin del protone e quindi alla distribuzione del momento magnetico. A causa del rinculo del protone però questa identificazione non è immediata (tale identificazione è semplice nel caso di scattering da potenziale fisso come abbiamo visto sopra). E' possibile fare una identificazione precisa di distribuzione di momento

e^-	$1.15965...10^{-3}$
p^+	$1.7928...$
n^0	$-1.913....$

Table 1: Valori del momento magnetico anomalo $k = 2MF_2(0)$ da [13]

Γ_α	numero	parità
1	1	1
γ_5	1	-1
γ_μ	4	$g^{\mu\mu}$
$\gamma_\mu\gamma_5$	4	$-g^{\mu\mu}$
$\sigma_{\mu\nu} \equiv i\frac{[\gamma_\mu, \gamma_\nu]}{2}$	6	$g_{\mu\mu}g_{\nu\nu}$

Table 2: Base di matrici 4x4. Sono indicati anche il numero di matrici indipendenti e le proprietà sotto trasformazione di parità

magnetico e carica solo in un sistema di riferimento preciso, quello di Breit; vedere [8] cap. 8. Nel caso $W_1 = W_2 = 1$, cioè in assenza di fattori di forma, si riottiene la sezione d'urto elettrone - protone puntiforme (220).

6.6 Scattering inelastico elettrone-protone

Lo scattering elastico è possibile solo se l'energia dell'elettrone, o meglio il suo q^2 , sono relativamente bassi, fino a circa 150 MeV. Aldilà di tale energia si apre la soglia di produzione di un pione, e il processo diventa $ep \rightarrow e\Delta^+ \rightarrow ep\pi^0$. Questo processo è inelastico per via della presenza del pione nello stato finale. Ad energie ancora maggiori, dell'ordine del GeV e superiori, il protone si spezza perdendo la sua identità e vengono generati nuovi adroni di tutti i tipi *. La cosa più semplice da misurare sperimentalmente diventa la sezione d'urto *inclusiva*, cioè $e^-(k) + p(P) \rightarrow e^-(k') + X(P')$ in cui non ci si preoccupa di cosa sia X e si osserva solo l'elettrone finale. La massa invariante, $W \equiv P'^2$, dello stato adronico finale è in questo caso una variabile e non è più fissata ad essere la massa del protone quadro come nel caso dello scattering elastico. Questo significa che q^2 non è più la sola variabile cinematica indipendente. Infatti nel caso elastico la conservazione dell'impulso $P + k = P' + k'$ e le condizioni di mass shell $P^2 = P'^2 = M^2, k^2 = k'^2 = 0$ (l'elettrone è senza massa ad alta energia) implicano che $2qP = q^2$, e ogni altro invariante che si può formare con k, k', P, P' è funzione di q^2 , il che significa che l'angolo di scattering θ (0 il valore di q^2) determina tutto quanto. Questo non è vero nel DIS (Deep Inelastic Scattering, scattering profondamente inelastico) in quanto la massa

*Esistono moltissimi adroni noti, oltre a pioni e nucleoni che sono i più noti; una lista esaustiva si può trovare in [13]

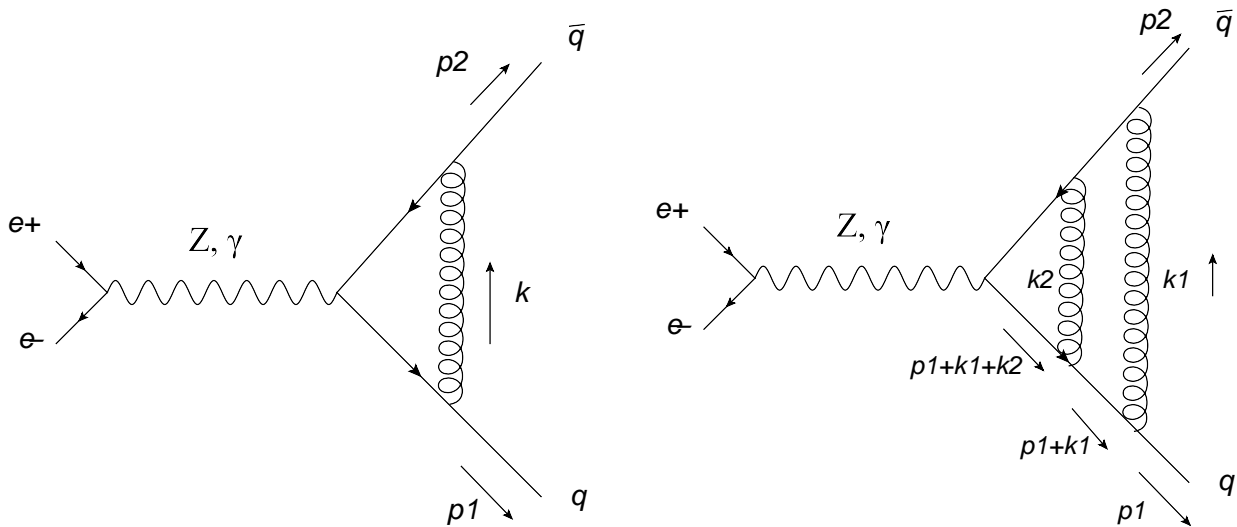


Figure 3: Correzioni di QCD a e^+e^- in adroni

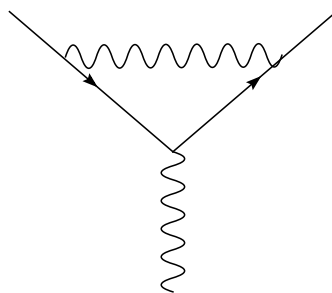


Figure 4: Correzione di vertice per l'elettrone



Figure 5: Regole di Feynman per stati iniziali e finali fermionici. La freccia fermionica segue il flusso della carica della particella (e non l'impulso!); ad esempio carica - per l'elettrone. La macchia nera indica il diagramma di Feynman.

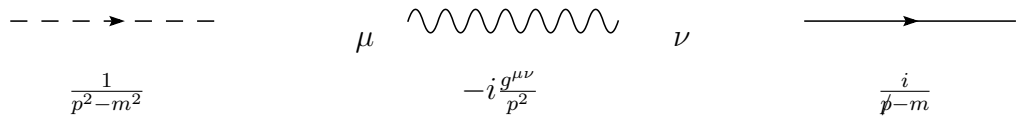


Figure 6: Regole di Feynman per i propagatori scalare, del fotone, fermionico

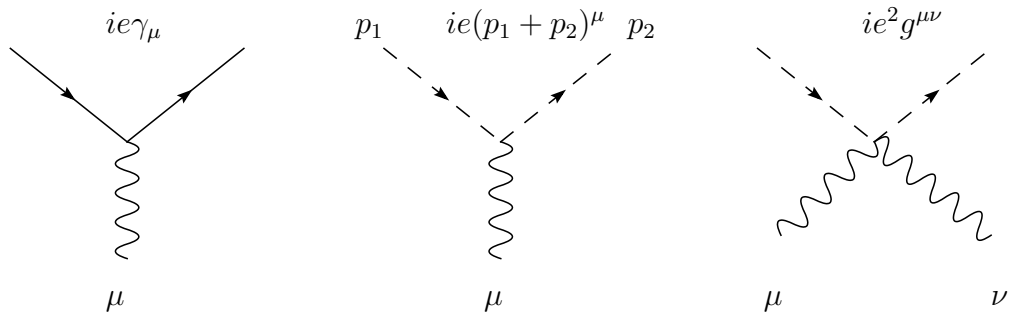


Figure 7: Regole di Feynman per i vertici

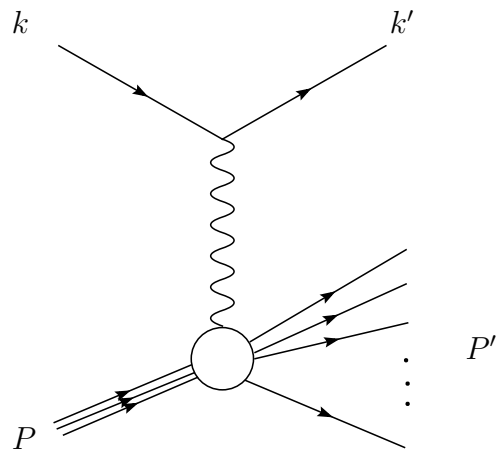


Figure 8: Scattering profondamente anelastico (DIS=Deep Inelastic Scattering)

invariante adronica $W = P'^2$ è una variabile e quindi ho due variabili cinematiche invece che una sola. Questo significa che la sezione d'urto sarà doppio differenziale, cioè una distribuzione in due variabili, mettiamo q^2 e W , oppure θ e ω' , dove θ è l'angolo di scattering dell'elettrone finale e ω' la sua energia. L'espressione per la sezione d'urto è analoga a quella per lo scattering elettrone-muone; la differenza è che non sappiamo dare una espressione precisa per il tensore adronico $W_{\mu\nu}$:

$$d^2\sigma = \left(\frac{4\pi\alpha}{q^2}\right)^2 \frac{1}{k \cdot P} 4\pi M L_{\mu\nu} W^{\mu\nu} \frac{d^3\mathbf{k}'}{2E'(2\pi)^3} \quad (246)$$

Sappiamo dare un'espressione precisa per il tensore leptonic $L_{\mu\nu}$:

$$L_{\mu\nu} = \sum_{r,s} j_\mu j_\nu^* = \sum_{r,s} \bar{u}_r(k') \gamma_\mu u_s(k) \bar{u}_s(k) \gamma_\nu u_r(k') = \text{Tr}\{(k'+m)\gamma_\mu(k+m)\gamma_\nu\} = 2[k'_\mu k_\nu + k'_\nu k_\mu + \frac{q^2}{2} g_{\mu\nu}] \quad (247)$$

Del tensore adronico invece sappiamo solo che è una somma sui contributi degli stati finali adronici; tenendo conto dello spazio delle fasi si ha:

$$W^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi M} \delta^4(P+q-P') \sum_X \langle P | J^\mu(0) | X \rangle d\Phi_X \langle X | J^\nu(0) | P \rangle \quad (248)$$

Di nuovo, notare che nel caso elastico $W^{\mu\nu}$ contiene una delta che vincola l'unico stato finale adronico, il protone, ad essere sul mass shell: $\delta(P'^2 - M^2) = \delta((P+q)^2 - M^2) = \delta(q^2 + 2M(E - E'))$. Questa δ vincola quindi il valore di E' ; la sezione d'urto diventa singolo differenziale anziché doppio. L'invarianza di Lorentz e la parità impongono che il tensore adronico abbia la forma:

$$W^{\mu\nu} = -W_1 g^{\mu\nu} + \frac{W_2}{M^2} P^\mu P^\nu + \frac{W_4}{M^2} q^\mu q^\nu + \frac{W_5}{M^2} (P^\mu q^\nu + q^\mu P^\nu) \quad (249)$$

La conservazione della corrente $q_\mu W^{\mu\nu} = W^{\mu\nu} q_\nu = 0$ impone le relazioni (**Esercizio**: dimostrarlo):

$$W_5 = -\frac{Pq}{q^2} W_2 \quad W_4 = \left(\frac{Pq}{q^4}\right)^2 W_2 + \frac{M^2}{q^2} W_1 \quad (250)$$

per cui la forma è simile a quella dello scattering elastico (244):

$$W^{\mu\nu} = \frac{W_2(q^2, \nu)}{M^2} \left[P^\mu - \frac{Pq}{q^2} q^\mu \right] \left[P^\nu - \frac{Pq}{q^2} q^\nu \right] + W_1(q^2, \nu) \left(-g_{\mu\nu} + \frac{q_\mu q_\nu}{q^2} \right) \quad (251)$$

In questo caso però i fattori di forma W_1, W_2 dipendono da due variabili cinematiche e non da una sola. Oltre a q^2 , qui si è scelto la variabile $\nu \equiv \frac{Pq}{M}$, che è legata a $W = P'^2$ dalla conservazione dell'energia: $P+q=P' \Rightarrow 2Pq = W^2 - M^2 - q^2$; nel caso di scattering elastico, $2Pq = -q^2$. Nel sistema del laboratorio in cui il protone è inizialmente fermo, $\nu = E - E'$ è l'energia persa dall'elettrone.

In definitiva, dalle formule precedenti si ottiene l'espressione per la sezione d'urto profondamente anelastica nel sistema del laboratorio:

$$\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'} = \frac{\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \left(W_2(q^2, \nu) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1(q^2, \nu) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (252)$$

Poichè si sono scelte le variabili q^2, ν per i fattori di forma, è conveniente passare a queste variabili anche per la sezione d'urto, cioè scrivere $\frac{d^2\sigma}{d\nu dQ^2}$ al posto di $\frac{d^2\sigma}{d\Omega dE'}$. Inoltre convenzionalmente si usa $Q^2 \equiv -q^2 = 2EE'(1 - \cos\theta) > 0$ al posto di q^2 . Si ha:

$$\nu = E - E' \quad Q^2 = 2EE'(1 - \cos\theta) \quad \Rightarrow \quad dQ^2 d\nu = 2EE' d\cos\theta dE' = \frac{EE'}{\pi} d\Omega dE' \quad (253)$$

per cui:

$$\frac{d^2\sigma}{dQ^2 d\nu} = \frac{\pi\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{EE'} \left(W_2(Q^2, \nu) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1(Q^2, \nu) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (254)$$

E' istruttivo confrontare questa espressione con quella per scattering elettrone-protone con protone puntiforme (che è identica a quella elettrone-muone) e con quella elettrone-protone elastica cioè con fattore di forma. Le tre sezioni d'urto si possono scrivere nella stessa forma:

$$\frac{d^2\sigma}{dQ^2 d\nu} = \frac{\pi\alpha^2}{4E^2 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \frac{1}{EE'} \{ \quad (255)$$

dove

$$\{ \}_{ep \rightarrow ep}^{punt.} = \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} + \frac{Q^2}{2M^2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M}\right) \quad (256)$$

$$\{ \}_{ep \rightarrow ep}^{el.} = \left(\cos^2 \frac{\theta}{2} W_2(Q^2) + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} W_1(Q^2) \right) \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2M}\right) \quad (257)$$

$$\{ \}_{ep \rightarrow eX}^{inel.} = \left(W_2(Q^2, \nu) \cos^2 \frac{\theta}{2} + 2W_1(Q^2, \nu) \sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \quad (258)$$

Le δ presenti nei primi due casi fissano la variabile ν al valore determinato dalla conservazione dell'energia $P + q = P' \Rightarrow 2Pq + q^2 = 0 \rightarrow \nu = \frac{Pq}{M} = -\frac{q^2}{2M} = \frac{Q^2}{2M}$ e fanno diventare la sezione d'urto un differenziale singolo.

Che cosa ci si aspetta se, andando a valori di Q^2 si scopre che il protone è composto da oggetti puntiformi quasi liberi? In base alle espressioni qui sopra, ci si aspetta che i fattori di forma non dipendano più da *due* variabili indipendenti (ν, Q^2), bensì da *una* sola variabile. Daremo un significato preciso a questa affermazione nel prossimo paragrafo.

6.7 Il modello a partoni

Supponiamo che, a valori di $Q^2 \gg (1\text{GeV})^2$ il protone sia costituito da oggetti puntiformi (quasi) liberi, che chiamiamo partoni. Allora lo scattering inelastico può essere visto come una somma di scattering elastici di oggetti puntiformi, la cui sezione d'urto è data dalla (256). Consideriamo per ora un partone solo, di carica frazionaria e_i e con impulso $p \approx xP$, e quindi massa $m_i \approx \sqrt{(xP)^2} = xM$. Confrontando la (256) con la (258) si ottengono per il partone le funzioni di struttura:

$$W_1^i = e_i^2 \frac{Q^2}{4M^2 x^2} \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2Mx}\right) \quad W_2^i = e_i^2 \delta\left(\nu - \frac{Q^2}{2Mx}\right) \quad (259)$$

Nel modello a partoni il partone ha probabilità $f_i(x)$ di avere frazione di impulso x . Le distribuzioni f_i non sono determinate dal modello, ma vanno ricavate dall'esperimento. Per trovare la funzione di struttura del protone occorre sommare su tutti i partoni i , e integrare la funzione distribuzione, per cui:

$$W_2(\nu, Q^2) = \sum_i \int_0^1 dx f_i(x) e_i^2 \delta(\nu - \frac{Q^2}{2Mx}) = \sum_i \int_0^1 dx \frac{x}{\nu} f_i(x) e_i^2 \delta(x - \frac{Q^2}{2M\nu}) = \frac{1}{\nu} \sum_i e_i^2 x_B f_i(x_B) \quad (260)$$

dove $x_B = \frac{Q^2}{2M\nu}$, e analogamente:

$$W_1(\nu, Q^2) = \frac{1}{M} \sum_i f(x_B) \quad (261)$$

La variabile $x_B = \frac{Q^2}{2Pq}$ è detta variabile di Bjorken, e nel modello a partoni la conservazione dell'impulso fissa la frazione di impulso x ad essere uguale a x_B . Il fatto che le funzioni di struttura dipendano dalla variabile *adimensionale* x_B è detta proprietà di *scaling* e significa che tali funzioni non variano se scalo contemporaneamente di un fattore β le variabili dimensionate $Q^2, 2Pq$. Lo *scaling* significa in generale che una certa variabile scala con le sue dimensioni di massa, cioè se ha dimensioni $[M]^\alpha$ scala come β^α . Ci aspettiamo quindi che la sezione d'urto, avendo dimensioni $[M]^{-2}$, scali come β^{-2} ; vediamo se è vero. La sezione d'urto, utilizzando le funzioni di struttura del modello a partoni, si scrive:

$$d^2\sigma = \frac{4\pi\alpha^2 dQ^2 d\nu}{Q^4} \left(\frac{E'}{E}\right) \sum_i \left\{ \cos^2 \frac{\theta}{2} \frac{1}{2\nu} e_i^2 x_B f_i(x_B) + 2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \frac{1}{2M} f_i(x_B) \right\} \quad (262)$$

Un cambiamento di scala significa $P \rightarrow \beta P, k \rightarrow \beta k, k' \rightarrow \beta k'$ lasciando fissa la massa fisica M . Per capire come scalano i vari termini in (262) occorre esprimerli in termini di P, k, k' :

$$E = \frac{Pk}{M} \rightarrow \beta^2 E \quad E' = \frac{Pk'}{M} \rightarrow \beta^2 E' \quad \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{q^2 M^2}{(Pk)(Pk')} \rightarrow \beta^{-2} \sin^2 \frac{\theta}{2} \quad (263)$$

$$\nu = \frac{Pq}{M} \rightarrow \beta^2 \nu \quad Q^2 = -(k - k')^2 \rightarrow \beta^2 Q^2 \quad (264)$$

E' facile vedere a questo punto che $d^2\sigma \rightarrow \beta^{-2} d^2\sigma$. Analogamente, per rescaling $\nu W_2(Q^2, \nu) \equiv F_2$ e $MW_1(Q^2, \nu) \equiv F_q$ sono invarianti.

Lo scaling è sperimentalmente ben verificato a parte piccole correzioni che sono però ben calcolabili nell'ambito della cromodinamica quantistica (QCD) che è la teoria fondamentale delle interazioni forti.

6.8 Il modello a partoni e i quarks

Che cosa sono i partoni che compongono il protone? E' naturale identificarli in prima approssimazione con i quarks, cioè con quegli oggetti che compongono gli adroni secondo un ben definito

schema: il modello a quarks (vedi apposita sezione in [8]). In questo modello gli adroni sono costituiti essenzialmente da 3 quarks: u,d,s con definiti numeri quantici di spin, carica, numero barionico e con proprietà definite secondo un'altra simmetria, la simmetria SU(3) di isospin forte. Così ad esempio per un protone, la (260) si scrive:

$$F_2^p(x) = x \left\{ \frac{4}{9}[u^p(x) + \bar{u}^p(x)] + \frac{1}{9}[d^p(x) + \bar{d}^p(x) + s^p(x) + \bar{s}^p(x)] \right\} \quad (265)$$

La vera forza dell'aver introdotto le distribuzioni dei quarks sta nel fatto che queste sono universali, cioè appaiono anche in altri tipi di esperimenti come lo scattering neutrino-protone, il processo di Drell-Yan (vedi più avanti) ecc. Si possono quindi confrontare processi diversi, ad esempio misurando le distribuzioni in un processo e utilizzandole per fare predizioni in un altro. Inoltre la simmetria di isospin del modello a quark collega le distribuzioni nel neutrone con quelle nel protone:

$$u^p(x) = d^n(x) \equiv u(x) \quad d^p(x) = u^n(x) \equiv d(x) \quad (266)$$

Le distribuzioni dei quarks soddisfano varie *regole di somma*:

- Stranezza del protone =0:

$$\int_0^1 dx [s(x) - \bar{s}(x)] = 0 \quad (267)$$

- Carica totale del protone =1, del neutrone =0

$$\int_0^1 dx \left\{ \frac{2}{3}[u - \bar{u}] - \frac{1}{3}[d - \bar{d}] \right\} = 1 \quad \int_0^1 dx \left\{ \frac{2}{3}[d - \bar{d}] - \frac{1}{3}[u - \bar{u}] \right\} = 0 \quad (268)$$

- Conservazione del momento totale:

$$\int_0^1 dx x [u + \bar{u} + d + \bar{d} + s + \bar{s}] = 1 \quad (269)$$

Quest'ultima regola di somma è pesantemente violata: i quarks portano solo circa la metà del momento del protone, il resto è portato da oggetti neutri. Questo induce a pensare che per il resto il protone sia formato dai gluoni, particelle neutre di spin 1 mediatrici delle interazioni forti.

Per finire, esistono modelli che tentano di dire qualcosa sulle distribuzioni dei quarks. uno dei più noti introduce l'idea di partoni "di valenza" e "del mare". Per esempio nel protone(s sta per "sea"):

$$u = u_v + q_s \quad d = d_v + q_s \quad \bar{u} = \bar{d} = s = \bar{s} = q_s \quad (270)$$

Il numero di distribuzioni indipendenti diventa 3, dalle 6 iniziali, e il modello guadagna quindi in predittività.

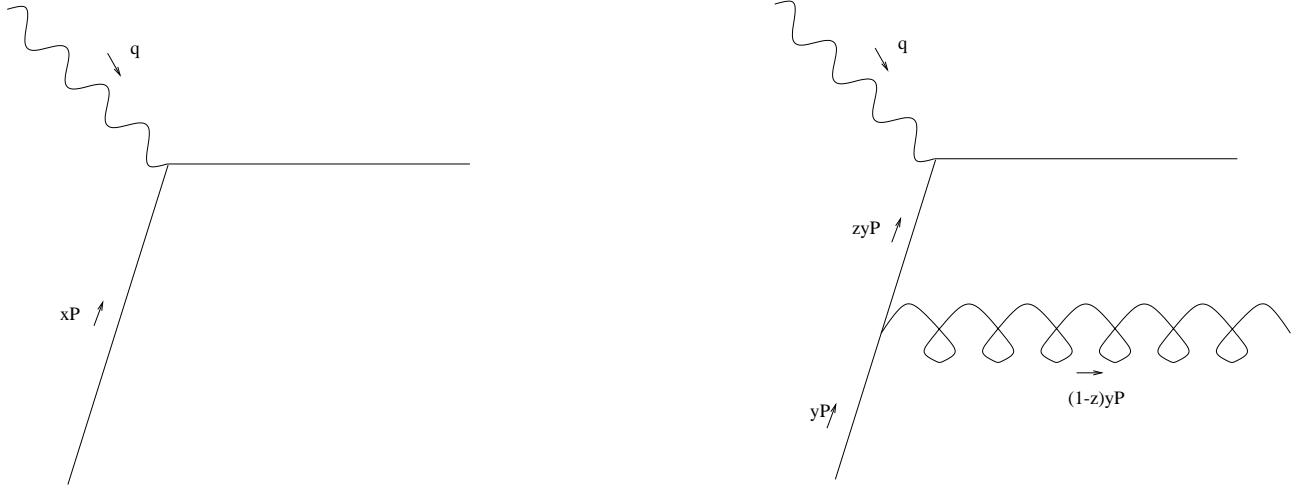


Figure 9: Tree level e prima correzione di QCD nel DIS

6.9 Altarelli-Parisi 1: fattorizzazione collineare

La prima correzione al risultato del parton model* è data dall'emissione di un gluone. Anticipando il risultato finale, si dimostra che le singolarità collineari fattorizzano, dando un contributo $\propto \log \frac{Q^2}{\mu^2}$ con $Q^2 = -q^2 > 0$ e μ^2 un cutoff infrarosso che specifico nel seguito. In concreto, si ha (vedi figura 9):

$$W_{\mu\nu} = \int dx f(x) W_{\mu\nu}^0(xP, q) + \int dy f(y) \alpha_s \log \frac{Q^2}{\mu^2} \int_0^1 dz P(z) W_{\mu\nu}^0(zyP, q) \quad (271)$$

dove la funzione di splitting $P(z)$ si interpretà come probabilità che il gluone abbia una frazione $1 - z$ dell'impulso del partone da cui viene emesso. Con un cambio di variabile $z, y \rightarrow zy = x, y$, la (271) si riscrive

$$W_{\mu\nu} = \int dx f(x, Q^2) W_{\mu\nu}^0(xP, q) \quad f(x, Q^2) = f(x) + \alpha_s \log \frac{Q^2}{\mu^2} \int_x^1 \frac{dy}{y} P\left(\frac{x}{y}\right) f(y) \quad (272)$$

L'interpretazione è che un quark con frazione di impulso $y > x$ irradia un gluone e diventa un quark con frazione di impulso x , con un probabilità $\sim \log \frac{Q^2}{\mu^2} P\left(\frac{x}{y}\right)$.

Ragionando un pò più in generale, consideriamo il contributo di un gluone aggiuntivo rispetto al "Black Box" di figura 10, nella regione in cui il gluone è collineare al partone da cui viene emesso. Possiamo scrivere il "Black Box" come

$$W_{\mu\nu}^{BB}(p - k) = \frac{1}{\sqrt{(p - k)^2}} \text{Tr}\{(p - k)\Gamma_{\mu\nu}(p - k)\} \quad (273)$$

dove $\Gamma_{\mu\nu}(p - k)$ simboleggia una striscia di matrici di Dirac, e include anche lo spazio delle fasi delle particelle finali nel Black Box. Il fattore $1/\sqrt{(p - k)^2}$ corrisponde al fattore $1/M$ nella

*Derivazione originale in [10]

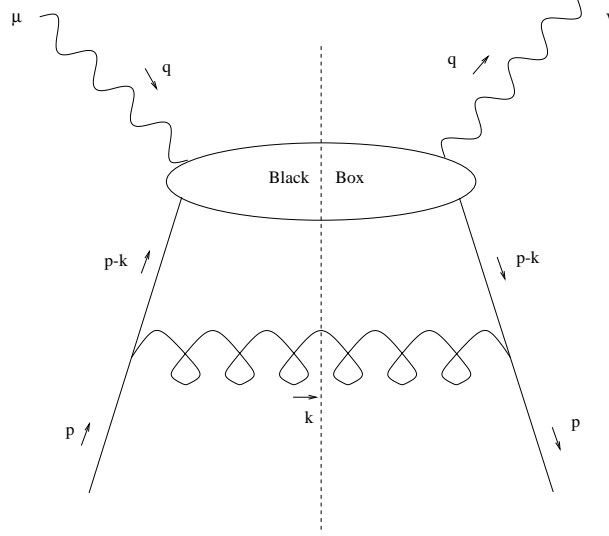


Figure 10: Fattorizzazione collineare

(248). Vogliamo dimostrare che nella regione in cui il gluone è circa collineare al quark da cui viene emesso, il contributo del gluone stesso fattorizza. Cioè, introducendo la cinematica (valida per $\mathbf{k}_\perp^2 \ll -q^2, 2pq$)

$$p = E(1, \mathbf{0}, 1) \quad k \sim \left((1-z)E, \mathbf{k}_\perp, (1-z)E - \frac{\mathbf{k}_\perp^2}{2(1-z)E} \right) \quad kp \sim \frac{\mathbf{k}_\perp^2}{2(1-z)} \quad (274)$$

vogliamo scrivere, tenuto conto che $p - k \sim zp$:

$$W_{\mu\nu}(p) \sim \alpha_s \log \frac{Q^2}{\mu^2} \int_0^1 dz P(z) W_{\mu\nu}^{BB}(zp) \quad (275)$$

da cui, riscaldando $p = yP$ e tenendo conto della distribuzione di probabilità $f(y)$, si ottiene immediatamente la (271).

Utilizzando $ab = -ba + 2(ab)$ si ottiene:

$$\text{Tr}\{(p-k)\not{\epsilon}p\not{\epsilon}(p-k)\Gamma_{\mu\nu}\} = \text{Tr}\{[k\not{p}\epsilon^2 + 2(p\not{\epsilon})(p-k)\not{\epsilon}]\Gamma_{\mu\nu}\} \quad (276)$$

$$= \text{Tr}\{[-2\epsilon^2(pk)\not{k} + 4(p\not{\epsilon})^2(p-k) + 4(p\not{\epsilon})(pk)\not{\epsilon}]\Gamma_{\mu\nu}\} \quad (277)$$

Prendiamo le polarizzazioni una (ϵ_1) nel piano \mathbf{p}, \mathbf{k} e l'altra (ϵ_2) ortogonale a questo piano, con $\epsilon_1^2 = \epsilon_2^2 = -1$. Si ha $p\epsilon_2 = 0$ e $|p\epsilon_1| \approx E\theta$ nella regione collineare. Interessano solo i termini più singolari nella regione collineare, cioè in questo caso quelli che vanno come θ^2 al numeratore; il termine in $(p\not{\epsilon})(pk) \propto \theta^3$ nella (276) è quindi trascurabile rispetto ai termini in $(pk), (p\not{\epsilon})^2$, entrambi di ordine θ^2 . Inoltre $k = (1-z)p + O(\theta)$ per cui si ottiene:

$$\text{Tr}\{(p-k)\not{\epsilon}p\not{\epsilon}(p-k)\Gamma_{\mu\nu}\} \approx [-2\epsilon^2(pk)\frac{1-z}{z} + 4(p\not{\epsilon})^2]\text{Tr}\{(p-k)\Gamma_{\mu\nu}\} \quad (278)$$

a meno di termini di ordine superiore in θ , rendendo evidente la fattorizzazione collineare. Sommando sulle polarizzazioni e per quanto visto sopra, si ha:

$$\sum_{i=1,2} [-2\varepsilon_i^2(pk) \frac{1-z}{z} + 4(p\varepsilon_i)^2] = 2E^2\theta^2 [\frac{1+z^2}{z}] = 2 \frac{\mathbf{k}_\perp^2}{(1-z)^2} [\frac{1+z^2}{z}] \quad (279)$$

$$\frac{d^3\mathbf{k}}{E} \frac{1}{(p-k)^4} \sim \frac{1}{E^2} \frac{dz}{1-z} \frac{d\theta^2}{\theta^4} = (1-z) dz \frac{d\mathbf{k}_\perp^2}{\mathbf{k}_\perp^4} \quad (280)$$

dove l'espressione a destra tiene conto dei propagatori fermionici e dello spazio delle fasi del gluone. L'espressione per il tensore adronico è quindi

$$W_{\mu\nu}(p) = \frac{1}{\sqrt{p^2}} \sum_\varepsilon \text{Tr}\{(\not{p}-\not{k})\not{\varepsilon}\not{p}\not{\varepsilon}(\not{p}-\not{k})\Gamma_{\mu\nu}\} \sim \alpha_s \int \frac{d\mathbf{k}_\perp^2}{\mathbf{k}_\perp^2} \frac{1+z^2}{1-z} dz \frac{1}{z\sqrt{p^2}} \text{Tr}\{(\not{p}-\not{k})\Gamma_{\mu\nu}\} \quad (281)$$

che è esattamente nella forma (275) e definisce la probabilità di splitting

$$P(z) = \frac{1+z^2}{1-z}. \quad (282)$$

La variabile z varia fra 0 e 1, in quanto nella regione collineare $(p-k)^2 \approx k^2 = 0$ e quindi z ha l'interpretazione di frazione di energia portata via dal quark dopo l'emissione del gluone. La distribuzione in momento trasverso è del tipo $d\mathbf{k}_\perp^2/\mathbf{k}_\perp^2$ (vedi (281)). Quali sono gli estremi di integrazione? Siccome siamo considerando il comportamento nella regione di scaling $Q^2, \nu \rightarrow \infty$ con $Q^2/\nu, M$ fissi, in realtà l'unica scala fisica UV è Q^2 (oppure $3Q^2$, o $Q^2/3$: il log non cambia). Il limite inferiore invece, più che da una scala fisica, è determinato dal fatto che il calcolo non ha senso nel regime non perturbativo. Chiamo quindi μ il cutoff IR di ordine Λ_{QCD} ; l'integrazione in $d\mathbf{k}_\perp$ produce quindi un $\log(Q^2/\mu^2)$. Questo ragionamento anticipa il fatto che non è possibile calcolare perturbativamente $f(x, Q^2)$, ma solo calcolare la sua variazione con la scala UV Q^2 . Per ottenere la suddetta dipendenza da Q^2 , consideriamo la variazione di $f(x, Q^2)$ Quando il valore di Q^2 aumenta di ΔQ^2 . Poiché

$$f(x, Q^2) = f(x) + \alpha_s \int_{\mu^2}^{Q^2} \frac{d\mathbf{k}_\perp^2}{\mathbf{k}_\perp^2} (P \otimes f)(x) \quad \text{con} \quad (P \otimes f)(x) \equiv \int_0^1 \frac{dz}{z} P\left(\frac{x}{z}\right) f(z) \quad (283)$$

si ha:

$$f(x, Q^2 + \Delta Q^2) \approx f(x, Q^2) + \alpha_s \frac{\Delta Q^2}{Q^2} (P \otimes f)(x) = f(x, Q^2) + \alpha_s (\Delta \log Q^2) (P \otimes f)(x) \quad (284)$$

Passando a ΔQ^2 infinitesimo, si ottiene l'equazione differenziale:

$$\frac{\partial f(x, Q^2)}{\partial \log Q^2} = \alpha_s (P \otimes f)(x) \quad (285)$$

La probabilità $P(z)$ definita dalla (282) è in realtà divergente (singolare IR) quando $z \rightarrow 1$. Questo perchè non ho tenuto conto dei virtuali. La procedura corretta è:

- scegliere un regolatore infrarosso (ad esempio, massa del gluone)
- calcolare reali e virtuali col regolatore scelto
- sommare reali e virtuali

E' possibile trovare la distribuzione complessiva senza necessità di fare il calcolo, tenendo conto che i virtuali sono proporzionali a $\delta(1-z)$, e che deve essere $\int_0^1 P(z) = 0$ in quanto il termine di tree level, $\delta(1-z)$, ha 1 come integrale e quindi esaurisce l'unitarietà; questo punto viene chiarito meglio nel paragrafo 6.13. Chiamando ε il regolatore IR (il risultato non dipende da come regolarizzo), avrò:

$$P(z) = \frac{1+z^2}{1-z+\varepsilon} + f(\varepsilon)\delta(1-z) \quad \int_0^1 P(z) = 0 \Rightarrow f(\varepsilon) = \frac{3}{2} - 2\log\varepsilon + O(\varepsilon) \quad (286)$$

e la distribuzione cercata è quindi:

$$P(z) = \left[\frac{1+z^2}{1-z+\varepsilon} - 2\delta(1-z)\log\varepsilon \right] + \frac{3}{2}\delta(1-z) \equiv \frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2}\delta(1-z) \quad (287)$$

dove si è definita la distribuzione:

$$\int_0^1 \frac{g(z)}{(1-z)_+} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^1 g(z) \left[\frac{1}{1-z+\varepsilon} - \delta(1-z)\log\varepsilon \right] = \int_0^1 \frac{g(z) - g(1)}{1-z} \quad (288)$$

In maniera equivalente (e più semplice):

$$P(z) = \left[\frac{1+z^2}{1-z} \right]_+ ; \quad \int_0^1 \left[\frac{1+z^2}{1-z} \right]_+ g(z) \equiv \int_0^1 \left[\frac{1+z^2}{1-z} \right] [g(z) - g(1)] \quad (289)$$

6.10 Altarelli-Parisi 2: equazioni di evoluzione

La (272) è la correzione perturbativa a $f(x)$ al primo ordine in α_s . Derivando rispetto a Q^2 questa equazione si ottiene:

$$\frac{\partial f(x, Q^2)}{\partial \log Q^2} = \alpha_s \int_x^1 \frac{dy}{y} P\left(\frac{x}{y}\right) f(y, Q^2) + O(\alpha_s^2) \quad (290)$$

avendo tenuto conto che $f(x) = f(x, Q^2) + O(\alpha_s)$. L'equazione di ricorrenza (290) è in realtà valida a tutti gli ordini della teoria perturbativa. Dimostrarlo però non è affatto banale e implica un ordinamento, ad esempio in \mathbf{k}_\perp . In una gauge fisica si può argomentare (ma sarà vero?) che i diagrammi dominant sono i "ladder", escludendo quindi tutta una serie di diagrammi: i diagrammi incrociati, i nonabeliani e quelli con diversi tagli di unitarietà. Boh, supponendo che sia vero, è facile vedere che i ladder sono ordinati in \mathbf{k}_\perp . A parte il solito argomento di estrarre la singolarità massima, è facile vedere che il \mathbf{k}_\perp del primo gluone emesso cutoffa quello

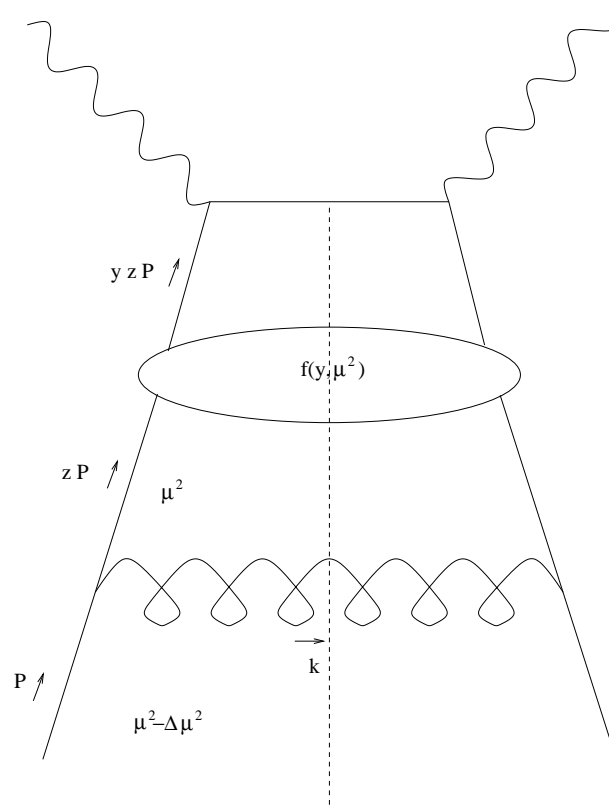


Figure 11: Equazioni di evoluzione di AP

del secondo, e così via. Infatti il valore minimo di $-(p_2 - k_2)^2 = -p^2 + 2kp$ si ha quando $kp = 0$ e vale $-p^2$. Per il primo quark, $-p^2 = \mu^2$ cutoff IR. I quark successivi hanno impulso $\sim zP - \mathbf{k}_\perp$; $(zP - \mathbf{k}_\perp)^2 = -\mathbf{k}_\perp^2$ per cui la singolarità del propagatore del secondo quark è cutoffata dal \mathbf{k}_\perp del primo gluone emesso, e così via. A questo punto si può ragionare in vari modo ma forse il modo più intuitivo di ricavare la (272) è quello di considerare la variazione della funzione di distribuzione Δf indotta da una variazione del cutoff inferiore μ^2 . A causa dell'ordinamento, tale differenza è dovuta a un gluone con \mathbf{k}_\perp^2 compreso fra $\mu^2 - \Delta\mu^2$ e μ^2 , che viene emesso con probabilità proporzionale a $P(z) \frac{d\mathbf{k}_\perp^2}{\mathbf{k}_\perp^2}$ (vedi figura 11). Inoltre la conservazione dell'impulso forza la relazione $zy = x_B$ a causa della $\delta(q^2 + 2zyPq) = \frac{1}{2Pq} \delta(zy - x_B)$. Si ha quindi:

$$f(x, \mu^2 - \Delta\mu^2) = f(x, \mu^2) + \alpha_s \frac{\Delta\mu^2}{\mu^2} \int_0^1 dz P(z) \int_0^1 dy f(y, \mu^2) \delta(zy - x) \quad (291)$$

Passando agli infinitesimi, si ricava dunque:

$$\frac{\partial f(x, \frac{Q^2}{\mu^2})}{\partial \log Q^2} = -\frac{\partial f(x, \frac{Q^2}{\mu^2})}{\partial \log \mu^2} = \alpha_s \int_{x_B}^1 \frac{dz}{z} P(z) f\left(\frac{x}{z}, \frac{Q^2}{\mu^2}\right) = \alpha_s \int_{x_B}^1 \frac{dy}{y} P\left(\frac{x}{y}\right) f\left(y, \frac{Q^2}{\mu^2}\right) \quad (292)$$

avendo tenuto conto che siccome f dipende solo dal rapporto fra Q^2 e μ^2 , la derivata rispetto a Q^2 e quella rispetto a μ^2 sono uguali ma con segno opposto. Notare che avrei potuto ragionare tramite la variazione rispetto a Q^2 , invertendo la posizione di gluone e "box" con la funzione f nella fig. 11. In tal caso però avrei dovuto dimostrare la fattorizzazione collineare in maniera diversa.

6.11 Altarelli Parisi 3: struttura di colore e mixing gluone-quark

Consideriamo prima il fatto che un gluone, presente nel protone con distribuzione f_g , può convertirsi in un quark con probabilità $P_{qg}(z)$. Il diagramma è esattamente analogo a quello della fig. 11 ma con un gluone iniziale di impulso P che si converte in un quark con impulso zP e uno con impulso k . Con considerazioni analoghe a quelle sopra, si ottiene:

$$\frac{1}{\alpha_s} \frac{\partial f_q(x, \frac{Q^2}{\mu^2})}{\partial \log Q^2} = \int_{x_B}^1 \frac{dz}{z} P_{qq}(z) f_q\left(\frac{x}{z}, \frac{Q^2}{\mu^2}\right) + \int_{x_B}^1 \frac{dz}{z} P_{qg}(z) f_g\left(\frac{x}{z}, \frac{Q^2}{\mu^2}\right) \equiv P_{qq} \otimes f_q + P_{qg} \otimes f_g \quad (293)$$

E' uno standard includere i fattori di colore nella definizione delle P . Nel caso di quark che emette un gluone restando un quark, il fattore di colore è $\frac{1}{3} T_{ij}^a T_{ji}^a = \frac{1}{3} \frac{4}{3} \delta_{ii} = 4/3$, dove il fattore $1/3$ tiene conto dei 3 possibili colori iniziali. Nel caso di gluone che si splitta in quark antiquark, il fattore di colore è $\frac{1}{8} T_{ij}^a T_{ji}^a = \frac{1}{8} \frac{4}{3} \delta_{ii} = 1/2$, dove il fattore $1/8$ tiene conto degli 8 possibili gluoni. Le splitting functions:

$$P_{qq}(z) = \frac{4}{3} \left[\frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-z) \right] \quad P_{qg}(z) = \frac{1}{2} [z^2 + (1-z)^2] \quad (294)$$

Inoltre ci sono equazioni analoghe per l'evoluzione della distribuzione del gluone:

$$\frac{1}{\alpha_s} \frac{\partial f_g(x, \frac{Q^2}{\mu^2})}{\partial \log Q^2} = P_{gq} \otimes f_q + P_{gg} \otimes f_g \quad (295)$$

Poiché è coinvolto lo stesso vertice col ruolo di z e $1-z$ scambiati, si ha $P_{gq}(z) = P_{qq}^R(1-z) = 4/3[1 + (1-z)^2]/z$. La P_{gg} riceve contributo sia dai reali che dai virtuali, con il risultato:

$$P_{gg} = 6\left[\frac{1-z}{z} + \frac{z}{(1-z)_+} + z(1-z)\right] + \frac{33-2n_f}{6}\delta(1-z) \quad (296)$$

dove $n_f = 6$ è il numero di flavors. Notare che l'apparente singolarità per $z \rightarrow 0$ è in realtà irrilevante in quanto l'integrale su z ha x_B come cutoff inferiore.

6.12 Altarelli Parisi 3: Initial Conditions

Nella QED il calcolo è completamente perturbativo: $\mu \rightarrow m$ massa dell'elettrone. Le condizioni iniziali sono quindi, a loro volta, perturbative: $f_{ee}(x, m^2) = \delta(1-x)$, $f_{\gamma e}(x, m^2) = 0$. In qcd le initial conditions non sono perturbative e occorre misurarle: si *misura* $f(x, Q_0^2)$ e si *evolve* fino a un valore Q^2 con le evolution equations.

6.13 Altarelli Parisi 4: momenti

Definite le trasformate di Mellin (ovvero momenti di ordine n):

$$f^{(n)}(Q^2) = \int_0^1 dx x^{n-1} f(x, Q^2) \quad P^{(n)}(Q^2) = \int_0^1 dx x^{n-1} P(x) \quad (297)$$

si ha che la trasformata di Mellin di una convoluzione è il prodotto delle trasformate di Mellin; infatti:

$$\int dx dz x^{n-1} \frac{1}{z} P\left(\frac{x}{z}\right) f(z) = \int dy dz y^{n-1} z^{n-1} P(y) f(z) = P^{(n)} f^{(n)} \quad (298)$$

Le equazioni di Altarelli Parisi si riscrivono, nello spazio dei momenti:

$$\frac{df_i^{(n)}(Q^2)}{d \log Q^2} = \alpha_s P_{ij}^{(n)} f_j^{(n)}(Q^2) \quad (299)$$

Analogia: trasformata di Fourier per eq. diff. lineari ordinarie. Abbiamo quindi diagonalizzato le AP, ottenendo equazioni più semplici (ma sono infinite!).

La riscrittura in termini di momenti è connessa con alcune sum rules per le $P(z)$. In concreto, se esiste una carica conservata q , questa non deve dipendere da Q^2 e quindi

$$\frac{\partial}{\partial \log Q^2} \left\{ \sum_i \int dx q_i f_i(x, Q^2) \right\} = \sum_i q_i P_{ij}^{(1)} f_j^{(1)}(Q^2) = 0 \quad (300)$$

Poiché l'uguaglianza deve valere qualsiasi sia $f_j^{(1)}(Q^2)$, ne segue $\sum_i q_i P_{ij}^{(1)} = 0 \forall j$. Consideriamo ad esempio la carica elettrica. Poiché l'evoluzione ad esempio di $2/3 f_u - 2/3 f_{\bar{u}}$ coinvolge solo P_{qq} in quanto i termini proporzionali a P_{qg} si cancellano nella differenza, si ottiene:

$$\int_0^1 dx P_{qq}(x) = \int_0^1 dx [P_{qq}^R(x) + P_{qq}^V(x)] = 0 \quad (301)$$

che è la regola di somma discussa in precedenza. Analoghe considerazioni per la conservazione del momento portano a due ulteriori regole di somma:

$$\int_0^1 dx x [P_{qq}(x) + P_{gg}(x)] = 0; \quad \int_0^1 dx x [2n_f P_{qg}(x) + P_{gg}(x)] = 0 \quad (302)$$

(nell'ultima espressione si conta il numero di stati finali in cui si può trasformare un gluone). Utilizzando le espressioni per le funzioni di splitting è immediato verificare che le regole di somma sono soddisfatte. Viceversa, come abbiamo visto nel caso di P_{qq} , la parte virtuale di P_{gg} si può ottenere dalla parte reale imponendo le regole di somma.

Se consideriamo una distribuzione Non Singlet* come $f = f_u - f_{\bar{u}}$ oppure $f = f_i - f_j, i \neq j$, le soluzioni delle equazioni di Altarelli Parisi si scrivono:

$$\frac{f^{(n)}(Q^2)}{f^{(n)}(Q_0^2)} = e^{\alpha_s P^{(n)} \log \frac{Q^2}{Q_0^2}} = \left(\frac{Q^2}{Q_0^2} \right)^{\alpha_s P^{(n)}} \quad (303)$$

Possiamo tener conto del running di α_s . Definendo $t = \log \frac{Q}{\Lambda_{QCD}}$:

$$\alpha(t) = \frac{1}{bt}; \quad \frac{df^{(n)}(t)}{dt} = \alpha(t) P^{(n)} f^{(n)}(t) = \frac{P^{(n)}}{bt} f^{(n)}(t) \quad (304)$$

Soluzione:

$$d \log f^{(n)} = \frac{P^{(n)}}{b} \frac{dt}{t} \Rightarrow \frac{f^{(n)}(t)}{f^{(n)}(t_0)} = \left(\frac{t}{t_0} \right)^{\frac{P^{(n)}}{b}} = \left[\frac{\alpha(t)}{\alpha(t_0)} \right]^{-\frac{P^{(n)}}{b}} \quad (305)$$

Lo stesso risultato si può derivare (anzi storicamente ottenuto prima di Altarelli e Parisi) utilizzando le equazioni del gruppo di rinormalizzazione applicate alla Operator Product Expansion [15]. Le soluzioni delle equazioni AP sono in effetti formalmente identiche a quelle RGE (186) che producono le soluzioni (305) identiche alle (188a). Le dimensioni anomale dei momenti sono date quindi da (α_s moltiplicato per) i momenti delle funzioni di splitting. Nel prossimo paragrafo vedremo come ottenere le equazioni di AP dal punto di vista UV, cioè come equazioni RGE. Questo è possibile in primis perché le singolarità di tipo infrarosso sono assenti nella fisica (inclusiva) presa in esame. Infine, notare che le equazioni e le relative soluzioni si possono scrivere, nel caso più generale singlet $f = \sum_i (f_{q_i} + f_{\bar{q}_i})$, promovendo le dimensioni anomale a matrici nello spazio degli indici.

*il non singlet si riferisce alle proprietà sotto trasformazioni di gruppo di flavor

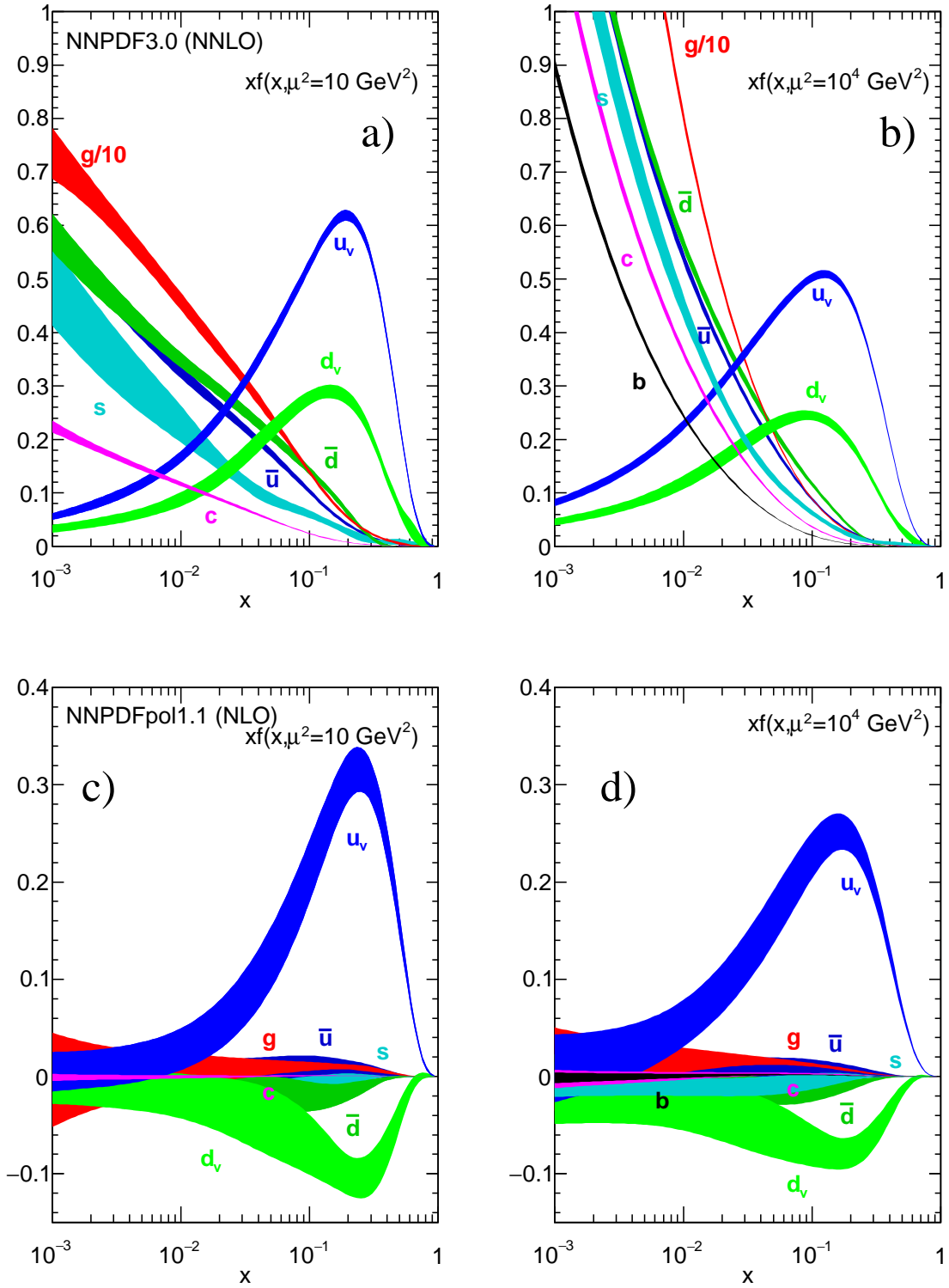
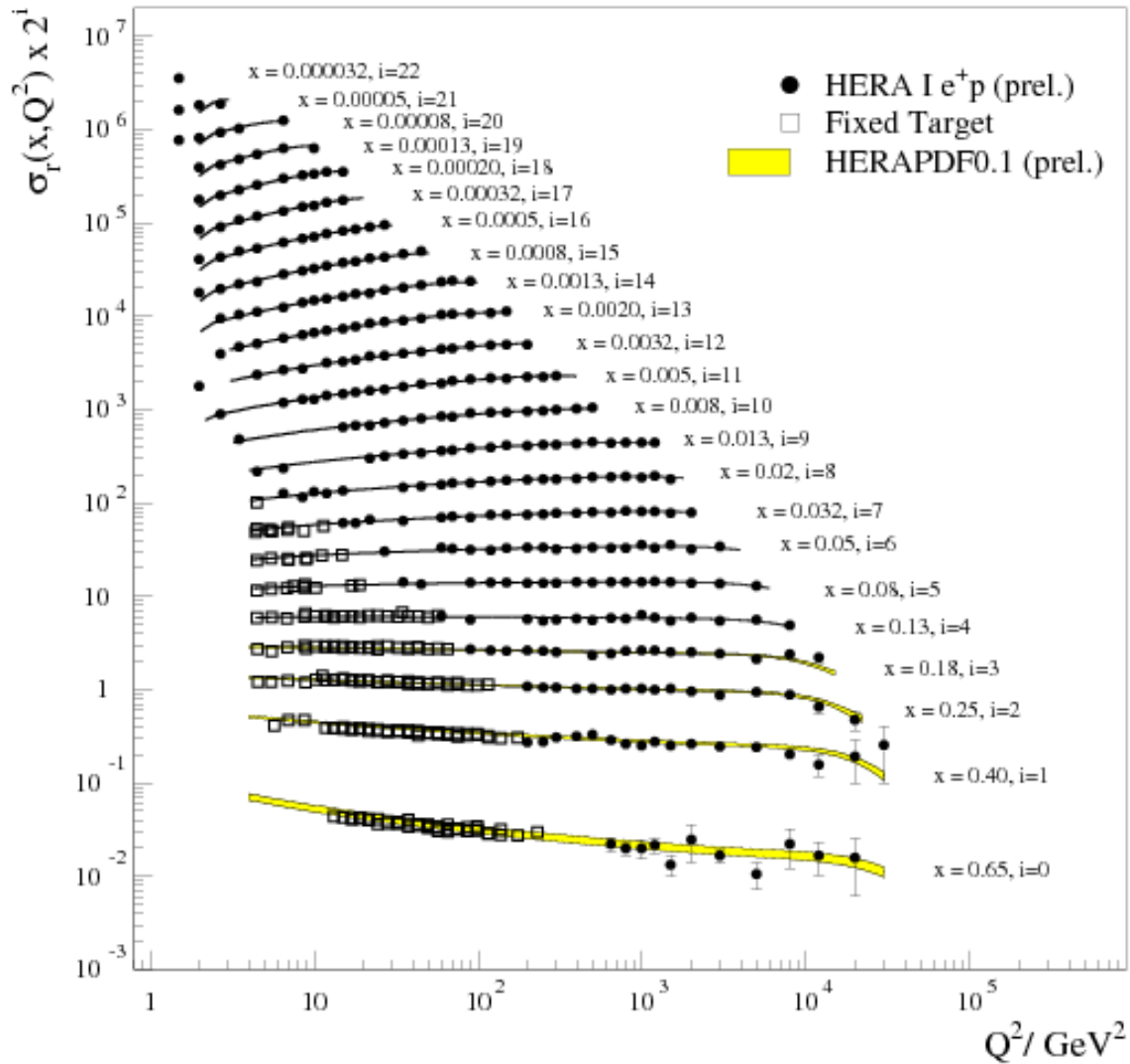


Figure 12: $xf(x)$ unpolarized per $Q^2 = 10 \text{ GeV}^2$ (a) e $Q^2 = 10^4 \text{ GeV}^2$ (b). Da [13]. Le c,d sono polarized.

H1 and ZEUS Combined PDF Fit



April 2008

HERA Structure Functions Working Group

Figure 13: F2 misurato ad HERA confrontato con le predizioni di QCD.

7 DIS e OPE

Il deep Inelastic Scattering si può analizzare utilizzando una tecnica denominata Operator Product Expansion (OPE, vedi [15]). Storicamente questa analisi è stata effettuata prima che Altarelli Parisi presentassero le equazioni di evoluzione determinate dalla struttura infrarossa della teoria che abbiamo visto nei paragrafi precedenti. L'approccio AP risulta più intuitivo e diretto rispetto a quello tramite OPE; tuttavia quest'ultimo è più rigoroso formalmente. I paragrafi successivi sono organizzati nel modo seguente:

- Definizione e di OPE con esempi
- Connessione del limite DIS con il prodotto T-ordinato di due correnti
- Connessioni dei momenti delle funzioni di struttura con la OPE
- Violazioni di scaling determinate dalle RGE

7.1 Operator product expansion

Molte osservabili fisiche, fra cui il tensore $W_{\mu\nu}$ che compare nel DIS, sono connesse con il prodotto di due operatori $O_1(x)O_2(y)$ quando $x \rightarrow y$. Tale prodotto è singolare nel limite, a causa della presenza di operatori di creazione/distruzione non ordinati normalmente. Ad esempio*:

$$T\{\phi(x)\phi(0)\} = \langle T\{\phi(x)\phi(0)\} \rangle + : \phi(x)\phi(0) : \equiv \Delta_F(x) + : \phi(x)\phi(0) : \quad (306)$$

In questa espressione Δ_F è singolare nel limite $x \rightarrow 0$, mentre il secondo termine, essendo ordinato normalmente, non è singolare: quando andiamo a farne elementi di matrice su stati fisici non incontriamo singolarità. Possiamo calcolare esplicitamente il propagatore nel caso massless:

$$\Delta_F(x) = \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ikx}}{k^2 + i\varepsilon} = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^4} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \frac{e^{-ik_0 x_0}}{k_0^2 - |\mathbf{k}|^2 + i\varepsilon} \quad (307)$$

L'integrale in k_0 si fa con il metodo dei residui: i poli sono sul semipiano complesso inferiore per $p_0 \sim |\mathbf{p}|$ e sul semipiano superiore per $p_0 \sim -|\mathbf{p}|$. Per $x_0 > 0$ ($x_0 < 0$) si può chiudere il cammino di integrazione sul semipiano inferiore (superiore), cosicché si ottiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dk_0 \frac{e^{-ik_0 x_0}}{k_0^2 - |\mathbf{k}|^2} = -\frac{i\pi}{|\mathbf{k}|} [\theta(x_0)e^{-i|\mathbf{k}|x_0} + \theta(-x_0)e^{i|\mathbf{k}|x_0}] \quad (308)$$

Utilizzando $d^3 \mathbf{k} = 2\pi |\mathbf{k}|^2 d|\mathbf{k}| d\cos\theta$ possiamo fare l'integrale in θ , ottenendo:

$$\Delta_F(x) = -\frac{1}{8\pi^2 |\mathbf{x}|} \int d|\mathbf{k}| (e^{i|\mathbf{k}||\mathbf{x}|} - e^{-i|\mathbf{k}||\mathbf{x}|}) [\theta(x_0)e^{-i|\mathbf{k}|x_0} + \theta(-x_0)e^{i|\mathbf{k}|x_0}] \quad (309)$$

*questo è un esempio di teorema di Wick

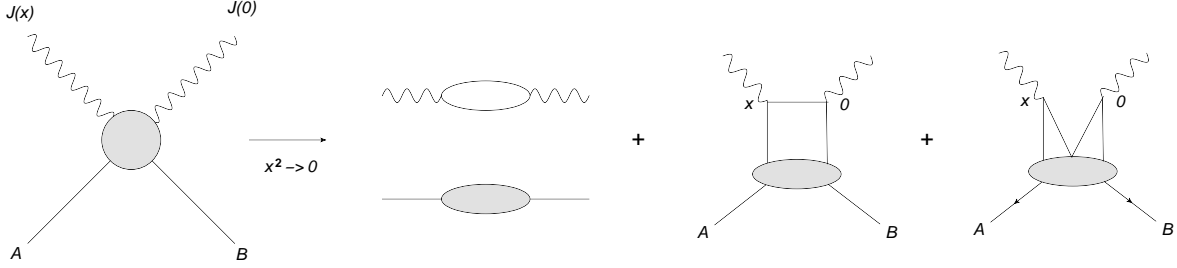


Figure 14: OPE per il prodotto di due correnti.

Regolarizzando gli integrali tramite la sostituzione $\exp[\pm i\alpha|\mathbf{k}|] \rightarrow \exp[\pm i(\alpha \pm i\varepsilon)|\mathbf{k}|]$ si ottiene infine:

$$\Delta_F(x) = \frac{i}{4\pi^2} \frac{1}{x^2 - i\varepsilon} \quad (310)$$

Il propagatore nel caso massivo è diverso, ma il comportamento singolarità per $x \rightarrow 0$ è identico: esso deriva da regioni di integrazione in trasformata di Fourier $k \rightarrow \infty$, che sono insensibili al valore della massa.

Calcoli simili a quelli appena visti portano a concludere che:

$$\Delta(x) \equiv -i[\phi(x), \phi(0)] \stackrel{x \rightarrow 0}{\approx} -\frac{1}{2\pi} \varepsilon(x_0) \delta(x^2) \quad (311)$$

dove $\varepsilon(x_0)$ è la funzione 'segno di x_0 '. Notare la relazione fra le singolarità del commutatore e del propagatore $\Delta(x) = 2\varepsilon(x_0) \text{Im}(i\Delta_F(x))$. Incontreremo relazioni simili quando analizzeremo il DIS in termini di OPE.

Come prossimo passo consideriamo l'operatore ϕ^2 . Utilizzando il teorema di Wick:

$$T[:\phi^2(x) :: \phi^2(0) :] = -4\Delta_F^2(x) + 2i\Delta_F(x) : \phi(x)\phi(0) : + : \phi^2(x)\phi^2(0) : \quad (312)$$

Dal punto di vista diagrammatico questa equazione, se la valuto fra uno stato iniziale A e uno finale B, corrisponde ai diagrammi in figura 14. I primi due termini sono i più singolari; sviluppiamo in serie di Taylor il secondo termine:

$$: \phi(x)\phi(0) : = \phi^2(0) + x_\mu (: \phi \partial^\mu \phi :)_0 + \frac{1}{2} x_\mu x_\nu (: \phi \partial^\mu \partial^\nu \phi :)_0 \quad (313)$$

Adesso interpretiamo $J(x) \equiv : \phi^2(x) :$ come una 'corrente scalare'. Otteniamo:

$$T[J(x)J(0)] = \frac{1}{8\pi^2} \frac{1}{(x^2 - i\varepsilon)^2} - \frac{J(0) + x_\mu J^\mu(0) + \dots}{\pi^2(x^2 - i\varepsilon)} + \dots \quad (314)$$

dove i puntini stanno per termini nonsingolari.

Le espressioni (306,314) possono essere generalizzate a espansione di prodotto di due operatori quando la differenza degli argomenti tende a zero (limite $x_\mu \rightarrow 0$, OPE vera e propria) oppure

quando $x^2 \rightarrow 0$ senza che necessariamente $x_\mu \rightarrow 0$ (sviluppo sul cono luce)*. Come vedremo, il primo limite è rilevante per e^-e^+ in adroni e il secondo per il DIS.

$$P\{A(x)B(0)\} \stackrel{x_\mu \rightarrow 0}{\approx} \sum C_i(x)O_i(x) \quad P\{A(x)B(0)\} \stackrel{x^2 \rightarrow 0}{\approx} \sum C_i^{(n)}(x)x_{\mu_1} \cdots x_{\mu_n}O_i^{\mu_1 \cdots \mu_n}(x) \quad (315)$$

Le singolarità che compaiono nel prodotto di due operatori in punti vicini vengono così fattorizzate nel prodotto di coefficienti singolari e di operatori locali nonsingolari $O(x)$. I prodotti P possono essere di tipo commutatore, T-ordinato ecc. e corrispondentemente cambia il tipo di singolarità come abbiamo già avuto modo di osservare. Per ragioni dimensionale, nel caso della OPE, avendo indicato con d_I la dimensione dell'operatore I , i coefficienti si comportano come $C_i \sim x^{-d_A-d_B-d_O}$. Pertanto i coefficienti più singolari sono quelli che moltiplicano gli operatori di dimensione più bassa, come si vede ad esempio dalla (306). Nel caso dello sviluppo sul cono luce, si ha $C_i^{(n)} \rightarrow (x^2)^{-\frac{d_A+d_B}{2}+\frac{\tau}{2}}$ e in questo caso quello che conta è il twist $\tau = d_0 - n$ cioè dimensione - spin \dagger . Ad esempio l'operatore $\phi \partial_{\mu_1} \dots \partial_{\mu_n} \phi$ ha spin n , dimensione $n+2$ e twist 2. Gli operatori di twist più basso corrispondono dunque ai coefficienti più singolari.

7.2 Singolarità dei campi liberi e Bjorken scaling

Cominciamo con il mostrare la connessione fra $W_{\mu\nu}$ e il commutatore di due correnti. La trasformata di Fourier del commutatore si scrive:

$$\int e^{iqx} \langle P|[J_\mu(x), J_\nu(0)]|P \rangle = \sum_X \delta^4(P+q-P_X) \langle P|J_\mu(0)|X \rangle d\Phi_X \langle X|J_\nu(0)|P \rangle \quad (316) \\ - \sum_X \delta^4(P_X+q-P) \langle P|J_\nu(0)|X \rangle d\Phi_X \langle X|J_\mu(0)|P \rangle$$

avendo utilizzato $J(x) = e^{iPx}J(0)e^{-iPx}$ e $1 = \sum_X d\phi_X$. Ora, il primo termine nel membro di destra di questa espressione è esattamente $W_{\mu\nu}$ dato dalla (248). Il secondo termine è identicamente 0. Infatti per la conservazione del numero barionico nello stato finale c'è un barione con massa maggiore o uguale alla massa M del protone, che è il barione più leggero; ne segue $P_X^0 \geq M$. D'altra parte nel sistema di riposo del protone si ha $P^0 = M$ e $q^0 = E - E' > 0$, per cui la delta di conservazione dell'energia non può essere soddisfatta. Se ne conclude $W_{\mu\nu} = \int e^{iqx} \langle P|[J_\mu(x), J_\nu(0)]|P \rangle$. Mostriamo ora che la regione di interesse è quella del cono luce $x^2 \sim 0$. Per cominciare, la causalità comporta che il commutatore possa essere diverso da 0 solo per $x^2 \geq 0$. Scegliamo un sistema di riferimento con il protone a riposo e l'asse z lungo \mathbf{q} . Allora $q = (\nu, \mathbf{0}, \sqrt{\nu^2 + \mathbf{Q}^2})$, per cui $q_0 + q_3 \approx 2\nu$ e $q_0 - q_3 \approx Q^2/2\nu$ nel limite DIS in cui $Q^2, \nu \rightarrow \infty$ con Q^2/ν fisso. Il contributo dominante all'integrale (316) viene dalle regioni con oscillazioni meno rapide, cioè $qx \sim 1$, per cui:

$$q \cdot x = \frac{q_0 + q_3}{\sqrt{2}} \frac{x_0 - x_3}{\sqrt{2}} + \frac{q_0 - q_3}{\sqrt{2}} \frac{x_0 + x_3}{\sqrt{2}} \sim 1 \Rightarrow x_0 - x_3 \sim \frac{1}{\nu}, \quad x_0 + x_3 \sim \frac{Q^2}{2\nu} \quad (317)$$

*una discussione esaustiva di queste espansioni è data in [16]

\dagger in appendice è dimostrato che uno spinore simmetrico negli indici $\mu_1 \cdots \mu_n$ ha spin n

In definitiva si ha $0 \leq x^2 = x_0^2 - x_3^2 - \mathbf{x}_T^2 \leq (x_0 - x_3)(x_0 + x_3) \sim 1/Q^2$ e la light cone dominance è stabilita.

Nel caso in cui nelle correnti appaiano gli operatori liberi, ci si aspetta di recuperare i risultati del parton model, cioè lo scaling. Mostriamo adesso come questo sia vero. Nel seguito sviluppo la dimostrazione solo a grandi linee; i dettagli si trovano in [5]. Lo sviluppo sul cono luce delle correnti fermioniche è analogo a quello visto in (314), ma la presenza degli indici di Lorentz rende notevolmente più complesso il calcolo. Definita $J_\mu(x) =: \bar{\Psi}(x)\gamma_\mu\Psi(x) :$ e $V_\mu(x, y) =: \bar{\Psi}(x)\gamma_\mu\Psi(y) :$ si ottiene[5]:

$$T[J_\mu(x)J_\nu(x)] \approx (Tr Q^2) \frac{x^2 g_{\mu\nu} - 2x_\mu x_\nu}{\pi^4 (x^2 - i\varepsilon)^4} + \frac{ix^\alpha}{2\pi^2 (x^2 - i\varepsilon)^2} S_{\mu\alpha\nu\beta} [V^\beta(x, 0) - V^\beta(0, x)] + \dots \quad (318)$$

dove $S_{\mu\alpha\nu\beta} = g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha} - g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}$. Nella (318) sono stati omissi termini higher twist o che contribuiscono solo allo scattering polarizzato. Inoltre il primo termine del membro a destra contribuisce solo a e^+e^- in adroni quando sandwichato fra stati di vuoto (vedi fig. 14). Adesso dalle singolarità del prodotto tordinato possiamo ricavare le singolarità del commutatore in maniera analoga a quanto visto in precedenza: $[j(x), j(0)] = 2\varepsilon(x_0)Im[iT(J(x), J(0))]$. Per farlo usiamo le identità:

$$\frac{x^\alpha}{(x^2 - i\varepsilon)^2} = -\frac{1}{2}\partial^\alpha\left(\frac{1}{x^2 - i\varepsilon}\right) \quad Im\left(\frac{1}{x^2 - i\varepsilon}\right) = -2\pi i\delta(x^2) \quad (319)$$

da cui ricaviamo:

$$[J_\mu(x), J_\nu(0)] \approx \{S_{\mu\alpha\nu\beta}[V^\beta(x, 0) - V^\beta(0, x)]\} \frac{1}{2\pi} \partial^\alpha [\delta(x^2)\varepsilon(x_0)] \quad (320)$$

In maniera analoga a quanto fatto nel caso scalare, da uno sviluppo di Taylor otteniamo:

$$[J_\mu(x), J_\nu(0)] \approx \sum_{n \text{ dispari}} \frac{1}{n!} x^{\mu_1} \dots x^{\mu_n} \mathcal{O}_{\beta\mu_1 \dots \mu_n}^{(n+1)} S_{\mu\alpha\nu\beta} \partial^\alpha [\delta(x^2)\varepsilon(x_0)] \quad (321)$$

dove la limitazione agli n dispari è connessa con la presenza della differenza $V(x, 0) - V(0, x)$ e dove $\mathcal{O}_{\beta\mu_1 \dots \mu_n}^{(n+1)}$ è un operatore di spin $n + 1$:

$$\mathcal{O}_{\beta\mu_1 \dots \mu_n}^{(n+1)} =: \bar{\psi}(0) \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\mu_1} \dots \overset{\leftrightarrow}{\partial}_{\mu_n} \gamma_\beta Q^2 \Psi(0) : \quad (322)$$

(in questa espressione Q è la carica). Gli elementi di matrice di questo operatore sul protone sono ignoti in quanto non perturbativi, tuttavia possiamo dare un'espressione come tensori di rango $n+1$ (vedi appendice:

$$\langle P | \mathcal{O}_{\beta\mu_1 \dots \mu_n}^{(n+1)} | P \rangle = N^{(n+1)} S[p_\beta p_{\mu_1} \dots p_{\mu_n}] + Tr \dots \quad (323)$$

dove gli N sono c-numeri e dove i termini di traccia, che contengono uno o più $g_{\mu_i\mu_j}$, danno potenze di x^2 quando contratti con la (321) e sono quindi sottodominanti sul cono luce. Utilizzando le (323, 321) si ottiene:

$$W_{\mu\nu} = \int d^4x e^{iqx} \langle P | [J_\mu(x), J_\nu(0)] | P \rangle \quad (324)$$

$$\approx \int d^4x e^{iqx} \sum_{n \text{ disp}}^{\infty} (x \cdot P)^n \frac{P^\beta}{n!} N^{(n+1)} S_{\mu\alpha\nu\beta} \partial^\alpha [\delta(x^2) \varepsilon(x_0)] \quad (325)$$

Definiamo adesso la funzione f e la sua trasformata di Fourier:

$$f(z) = \sum_{n \text{ disp}}^{\infty} \frac{z^n}{n!} N^{(n+1)} \quad \tilde{f}(\xi) = \int dz f(z) e^{-iz\xi} \quad (326)$$

e quindi:

$$W_{\mu\nu} = \int d^4x e^{iqx} \int d\xi e^{ix \cdot \xi P} \tilde{f}(\xi) S_{\mu\alpha\nu\beta} \partial^\alpha [\delta(x^2) \varepsilon(x_0)] \quad (327)$$

Ora, in trasformata di Fourier derivare corrisponde a moltiplicare per l'impulso, cioè $\int d^4x \exp[iqx] \partial_\alpha g(x) = d^4x \exp[iqx] (-iq_\alpha) g(x)$, per cui si arriva al risultato:

$$W_{\mu\nu} \approx \int d^4x e^{iqx} \int d\xi e^{ix \cdot \xi p} \tilde{f}(\xi) S_{\mu\alpha\nu\beta} (q + \xi p)^\alpha p^\beta [\delta(x^2) \varepsilon(x_0)] \quad (328)$$

Infine, utilizzando l'identità:

$$i \int d^4x e^{ikx} \varepsilon(x_0) \delta(x^2) = (2\pi)^2 \varepsilon(k_0) \delta(k^2) \quad (329)$$

con $k = q + \xi p$, si ottiene:

$$W_{\mu\nu} \approx \frac{1}{M} \int d\xi \tilde{f}(\xi) \delta(q^2 + 2M\nu\xi) (g_{\mu\alpha}g_{\nu\beta} + g_{\mu\beta}g_{\nu\alpha} - g_{\mu\nu}g_{\alpha\beta}) (q + \xi p)^\alpha p^\beta \quad (330)$$

$$= \frac{1}{2M^2\nu} \int d\xi \tilde{f}(\xi) \delta\left(\xi + \frac{q^2}{2M\nu}\right) (-M\nu g_{\mu\nu} + 2\xi p_\mu p_\nu + \dots) \quad (331)$$

$$= \tilde{f}(x) \left[-\frac{g_{\mu\nu}}{2M} + \frac{x p_\mu p_\nu}{\nu M^2} + \dots \right] \quad (332)$$

con $x = -q^2/(2M\nu)$ dove i puntini stanno ad indicare termini di traccia (proporzionali a $P^2 = M^2$, higher twist) oppure termini proporzionali a q_μ o q_ν che fanno zero per conservazione della corrente.

Otteniamo quindi i risultati del modello a partoni con:

$$MW_1 \rightarrow F_1(x) = \frac{1}{2} \tilde{f}(x) \quad \nu W_2 \rightarrow F_2(x) = x \tilde{f}(x) \quad (333)$$

7.3 DIS e $T[J_\mu J_\nu]$

In questa sezione operiamo una serie di passi formali per connettere il tensore adronico che compare nel DIS con lo sviluppo sul cono luce del prodotto T-ordinato di due correnti. I momenti delle funzioni di struttura di $W_{\mu\nu}$ sono legati all'espansione sul cono luce del prodotto T-ordinato delle correnti elettromagnetiche. Per vedere come, definiamo il tensore (al solito, $x = Q^2/2M\nu$):

$$T_{\mu\nu}(Q^2, x) = i \int d^4x e^{iqx} \langle P | T \{ J_\mu(x) J_\nu(0) \} | P \rangle \quad (334)$$

Vale la relazione $W_{\mu\nu} = \text{Im}(T_{\mu\nu})$. Questa relazione si può ottenere come conseguenza del teorema ottico oppure direttamente dalla definizione di T , facendo gli stessi passaggi che hanno portato W ad essere connesso con il commutatore di due correnti. Possiamo fare per $T_{\mu\nu}$ la stessa decomposizione in termini di strutture di Lorentz e fattori di forma fatta per $W_{\mu\nu}$. Adesso per non generare confusione con gli indici di Lorentz, omettiamo gli indici μ, ν e supponiamo di fare l'OPE di un prodotto di correnti scalari, oppure di uno dei fattori di forma scalari di $T_{\mu\nu}$. Per $T\{J(x)J(0)\}$ vale l'espansione sul cono luce (315). In trasformata di Fourier definiamo:

$$\mathcal{T.F.}[C_i^{(n)}(x)x_{\mu_1} \cdots x_{\mu_n}] = \frac{q_{\mu_1} \cdots q_{\mu_n}}{(q^2)^n} \tilde{C}_i^n(q^2) \quad (335)$$

dove i $\tilde{C}_i^n(q^2)$ sono definiti in termini di derivate della trasformata di Fourier \tilde{C} di $C(x)$, ad esempio $\tilde{C}_i^1(q^2) = 2q^2(\partial/\partial q^2)\tilde{C}(q^2)$. Gli elementi di matrice sullo stato del protone degli operatori che compaiono nella (315) possono essere costruiti a partire dall'unico vettore P_μ (nel caso in cui non osservi lo spin) e sono dati da:

$$\langle P | O_i^{\mu_1 \cdots \mu_n}(x) | P \rangle = N_i^n S[P_{\mu_1} \cdots P_{\mu_n}] + \dots \quad (336)$$

dove $S[.]$ rappresenta l'operazione di simmetrizzazione e sottrazione di traccia per formare il tensore di rango n (vedi appendice). I puntini stanno per termini di traccia proporzionali a $g_{\mu_i \mu_j}$ e quindi sottodominanti in quanto contengono potenze di $P^2 = M^2$. Gli N sono c-numeri. Poiché $x = Q^2/2qP$, otteniamo infine:

$$\mathcal{T.F.}\{\langle P | [T(J(x)J(0))] | P \rangle\} \equiv T(Q^2, x) = \sum_{i,n} \tilde{C}_i^n(q^2) \cdot N_i^n \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^n \quad (337)$$

Dobbiamo adesso connettere la OPE con la regione fisica del DIS; le due regioni sono distinte. Infatti la regione OPE è quella in cui $q \rightarrow \infty$, per cui $Q^2 \rightarrow \infty$ con Q^2/ν^2 fisso (ricordiamo che $\nu = Pq/M$). Invece la regione fisica di scaling è quella in cui Q^2/ν è fisso. Per Q^2 fisso, vista $T_{\mu\nu}$ come funzione di ν , la regione OPE è quella in cui $\nu \sim 0$ mentre quella fisica corrisponde a $\nu \geq Q^2/(2M)$. In appendice.....è dimostrata la seguente relazione di dispersione:

$$T(Q^2, \nu) = \frac{1}{\pi} \int_{\frac{Q^2}{2}}^{\infty} d\nu' \text{Im}[T(Q^2, \nu')] \left[\frac{1}{\nu' - \nu} + \frac{1}{\nu' + \nu} \right] \quad (338)$$

che connette Siccome $\text{Im}T = 2\pi W$, cambiando variabili tramite $\nu = Q^2/(2x)$ si ottiene:

$$T(Q^2, x) = 4 \int_0^1 \frac{dx'}{x'(1 - \frac{x'^2}{x^2})} W(Q^2, x') = 4 \sum_2^\infty \left(\frac{1}{x}\right)^n \int_0^1 dx' x'^{n-1} W(Q^2, x') \quad (339)$$

dove la somma è solo sugli n pari, a causa della simmetria $T(Q^2, x) = T(Q^2, -x)$. Confrontando la (337) con la (339), si ottiene infine:

$$W^{(n)}(Q^2) = \int_0^1 dz z^{n-1} W(Q^2, z) = \sum_i C_i^{(n)}(Q^2) N_i^{(n)} \quad (340)$$

Quindi i momenti delle funzioni di struttura sono connessi con i coefficienti dello sviluppo sul cono luce per il prodotto T-ordinato di due correnti.

L'ultimo passo degli sviluppi formali fin qui effettuati è quello di scrivere le equazioni RGE per i coefficienti di Wilson, e conseguentemente per i momenti delle funzioni di struttura. Per fare questo, teniamo conto del fatto che i coefficienti di Wilson per via delle divergenze UV acquistano una dipendenza dal punto di rinormalizzazione μ :

$$\mathcal{T.F.} \{ \langle P | [T(J(x)J(0))] | P \rangle \} \equiv T(Q^2, x) = \sum_{i,n} \tilde{C}_i^n(q^2, \mu^2) \cdot N_i^n(\mu^2) \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^n \quad (341)$$

$$\langle P | O_i^{\mu_1 \dots \mu_n}(x) | P \rangle = N_i^n(\mu^2) S[P_{\mu_1} \dots P_{\mu_n}] + \dots \quad (342)$$

I c-neri $N = 1 + b\alpha_s \log \Lambda/\mu$ acquistano una parte divergente UV. Adesso, possiamo scrivere:

$$\langle O_i^n \rangle_P = Z_2^{-1} (Z_i^n)^{-1} \langle O_i^n \rangle_P^R \quad \frac{\partial \log Z_i^n}{\partial \log \mu^2} = \gamma_i^n = b_i^n \alpha_s + \dots \quad (343)$$

Gli elementi di matrice degli O^R , e quindi i numeri N , obbediscono una equazione di Callan-Simanzik:

$$(D - \gamma_2 - \gamma_i^n) N_i^n(\mu^2) = 0; \quad D \equiv \frac{\partial}{\partial \log \mu^2} + \beta(\alpha_s) \frac{\partial}{\partial \alpha_s} \quad (344)$$

Consideriamo ora la (341). La corrente elettromagnetica è conservata, per cui la sua normalizzazione è fissata dalla conservazione della carica, come abbiamo visto in precedenza. Questo ammonta a dire che le dimensioni anomale delle correnti conservate sono nulle. L'equazione di Callan-Simanzik in questo caso è quindi:

$$(D - \gamma_2) [\tilde{C}_i^n(q^2, \mu^2) \cdot N_i^n(\mu^2)] = 0 \quad (345)$$

Mettendo insieme le (343,344) si ottiene:

$$(D + \gamma_i^n) \tilde{C}_i^n(q^2, \mu^2, \alpha_s) = 0 \quad (346)$$

In altre parole le dimensioni anomale dei coefficienti di Wilson sono uguali e opposte a quelle degli operatori che compaiono nello sviluppo.

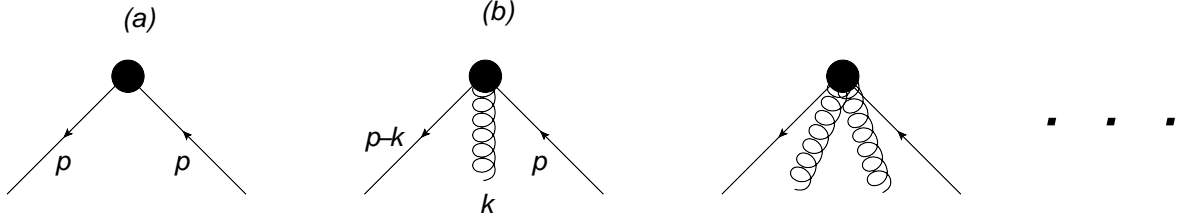


Figure 15:

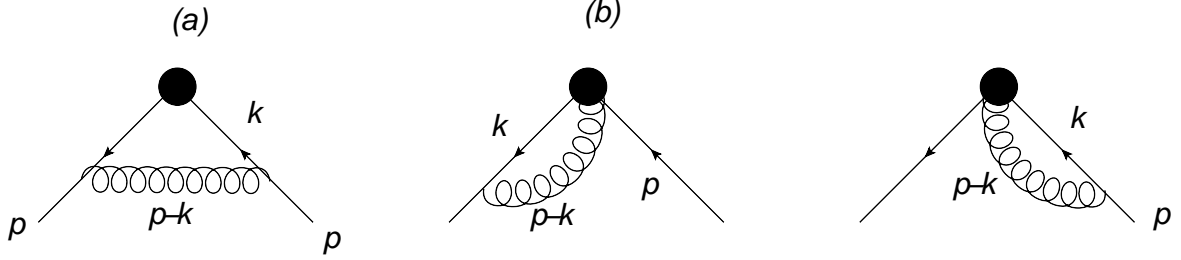


Figure 16:

7.4 Calcolo delle dimensioni anomale

Come abbiamo visto nel paragrafo precedente, nella OPE di due correnti elettromagnetiche compare l'operatore (322). Quando accendo le interazioni, siccome il prodotto di due correnti e.m. è invariante secondo $SU(3)$ di gauge forte, le derivate diventano covarianti:

$$\mathcal{O}_{\beta\mu_1\cdots\mu_n}^{(n+1)} =: \bar{\psi}(0)S[D_{\mu_1}\cdots D_{\mu_n}\gamma_\beta]\Psi(0): \quad D_\mu \equiv \partial_\mu + igA_\mu^a\tau^a \quad (347)$$

dove l'operatore S , al solito, simmetrizza e toglie le tracce. Calcolando le dimensioni anomale di questo operatore si ottengono, secondo la (346), le equazioni RGE dei momenti delle funzioni di struttura. L'elemento di matrice dell'operatore (347) nel limite $g = 0$ è dato da $p_{\mu_1}\cdots p_{\mu_n}\gamma_\beta$ (vedi fig. 15 a). L'operatore inoltre descrive diversi elementi di matrice con stati di gluone in aggiunta agli stati fermionici; questi elementi di matrice corrispondono ai termini in A_μ delle derivate covarianti (vedi fig. 15 b). La rinormalizzazione di questo operatore, che consente di calcolare le dimensioni anomale, ad ordine g^2 coinvolge i diagrammi di fig. 16.

Utilizzando le regole di Feynman della teoria, oltre alle regole aggiuntive di fig. 15, in gauge di Feynman si ottiene per il diagramma di fig. 16 a:

$$\begin{aligned} & g^2 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \gamma^\alpha \tau^a \frac{\not{k}}{k^2} \gamma^{\mu_1} k^{\mu_2} \cdots k^{\mu_n} \frac{\not{k}}{k^2} \gamma_\alpha \tau^a \frac{1}{(p-k)^2} \\ & = g^2 C_F(-2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{1}{(k^2)^2 (k-p)^2} \not{k} \gamma^{\mu_1} k^{\mu_2} \cdots k^{\mu_n} \not{k} \end{aligned} \quad (348)$$

Adesso utilizziamo un trucco dovuto a Feynman per scrivere l'integrando come un oggetto

con un solo denominatore:

$$\frac{1}{AB^2} = \int_0^1 dx \frac{2(1-x)}{[xA + (1-x)B]^3} \Rightarrow \frac{1}{k^2(k-p)^2} = \int_0^1 dx \frac{2(1-x)}{[(k-xp)^2 \pm x(1-x)p^2]^3} \quad (349)$$

Adesso facciamo l'integrale shiftando $k \rightarrow k + xp$. Fra i vari termini che otteniamo, dobbiamo selezionare quelli in cui in due fattori compare k e negli altri xp ; questi infatti sono gli unici termini proporzionali all'operatore di tree level del quale vogliamo calcolare il rescaling. Si ha:

$$k^\mu k^\nu \rightarrow \frac{1}{4} k^2 g^{\mu\nu} \quad \not{k} \gamma^\mu k^\nu \rightarrow \frac{1}{4} k^2 \gamma^\nu \gamma^\mu \rightarrow \frac{1}{4} k^2 g^{\mu\nu} \quad (350)$$

La prima uguaglianza è dovuta al fatto che i termini con $\mu \neq \nu$ sono 0 per parità e all'invarianza di Lorenz; il fattore 4 si ottiene facendo la traccia*. La seconda uguaglianza deriva dalla simmetrizzazione rispetto agli indici. Entrambi i termini della (350) sono irrilevanti in quanto termini di traccia. L'unico termine rilevante per il calcolo è:

$$\not{k} \gamma^{\mu_1} \not{k} \rightarrow \frac{1}{4} k^2 \gamma^\nu \gamma^{\mu_1} \gamma_\nu = -\frac{1}{2} k^2 \gamma^{\mu_1} \quad (351)$$

Otteniamo quindi:

$$\begin{aligned} g^2 \frac{4}{3} \int_0^1 dx \quad 2(1-x) \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{k^2}{[k^2 + x(1-x)p^2]^3} \gamma^{\mu_1} (xp^{\mu_2}) \dots (xp^{\mu_n}) \\ = \frac{8}{3} \int_0^1 dx \quad 2(1-x) \frac{1}{(4\pi)^2} \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \gamma^{\mu_1} p^{\mu_2} \dots p^{\mu_n} \\ = \frac{4}{3} \frac{2}{n(n+1)} \frac{g^2}{(4\pi)^2} \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \gamma^{\mu_1} p^{\mu_2} \dots p^{\mu_n} \end{aligned} \quad (352)$$

Il diagramma di fig. 16 (b) è una somma sull'indice j , dove μ_j è l'indice della derivata covariante dalla quale estraggo il pezzo in A^a :

$$\int \frac{d^d k}{(2\pi)^4} \gamma^{\mu_j} g \tau^a \frac{\not{k}}{k^2} \gamma^{\mu_1} k^{\mu_2} \dots k^{\mu_{j-1}} g \tau^a p^{\mu_{j+1}} \dots p^{\mu_n} \frac{1}{(k-p)^2} \quad (353)$$

$$= g^2 C_F \int \frac{d^d k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2(k-p)^2} \gamma^{\mu_j} \not{k} \gamma^{\mu_1} k^{\mu_2} \dots k^{\mu_{j-1}} p^{\mu_{j+1}} \dots p^{\mu_n} \quad (354)$$

Simmetrizzando rispetto agli indici μ_1 e μ_j e omettendo i termini di traccia::

$$\frac{k_\alpha}{2} (\gamma_{\mu_j} \gamma_\alpha \gamma_{\mu_1} + \gamma_{\mu_1} \gamma_\alpha \gamma_{\mu_j}) = k_\alpha (g_{\alpha\mu_j} \gamma_{\mu_1} + g_{\alpha\mu_1} \gamma_{\mu_j} - g_{\mu_1\mu_j} \gamma_\alpha) \rightarrow 2\gamma_{\mu_1} k_{\mu_j} \quad (355)$$

Adesso, come fatto in precedenza, raccogliamo in un unico denominatore e facciamo lo shift nella variabile di integrazione. Gli unici termini che producono $n - 1$ fattori di p sono quelli in cui

*a rigore dovrebbe comparire $1/d$ anziché $1/4$. Tuttavia siamo interessati solo alla parte divergente, che non cambia.

$k \rightarrow xp$. Otteniamo quindi:

$$\begin{aligned}
g^2 \frac{4}{3} \int_0^1 dx \quad 2 \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{[k^2 + x(1-x)p^2]^3} \gamma^{\mu_1}(xp^{\mu_2}) \cdots (xp^{\mu_j}) p^{\mu_{j+1}} \cdots p^{\mu_n} \\
= g^2 \frac{8}{3} \int_0^1 dx x^{j-1} \frac{1}{(4\pi)^2} \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \gamma^{\mu_1} p^{\mu_2} \cdots p^{\mu_n} \quad (356) \\
= \sum_j \frac{4}{3} \frac{2}{j} \frac{g^2}{(4\pi)^2} \Gamma(2 - \frac{d}{2}) \gamma^{\mu_1} p^{\mu_2} \cdots p^{\mu_n}
\end{aligned}$$

Sommando l'identico contributo dal diagramma di fig. 16 c, otteniamo la dimensione anomala:

$$\gamma^n = \frac{8}{3} \frac{g^2}{(4\pi)^2} \left[1 + 4 \sum_{j=2}^n \frac{1}{j} - \frac{2}{n(n+1)} \right] \quad (357)$$

Come si confronta questo risultato con l'approccio alla Altarelli Parisi? Abbiamo visto che le dimensioni anomale sono date dai momenti delle funzioni di splitting. Considerando la P_{qq} si ha ad esempio:

$$\int_0^1 dz z^{n-1} \frac{1}{(1-z)_+} = \int_0^1 dz \frac{z^{n-1} - 1}{(1-z)} = \int_0^1 dz (-1 - z \cdots - z^{n-2}) = - \sum_1^{n-1} \frac{1}{j} \quad (358)$$

per cui:

$$\int_0^1 z^{n-1} \frac{4}{3} \left[\frac{1+z^2}{(1-z)_+} + \frac{3}{2} \delta(1-z) \right] = -\frac{4}{3} \left[\sum_1^{n-1} \frac{1}{j} + \sum_3^{n+1} \frac{1}{j} + \frac{3}{2} \right] = -\frac{2}{3} \left[1 + 4 \sum_2^n \frac{1}{j} - \frac{2}{n(n+1)} \right] \quad (359)$$

A Appendice

A.1 Costruzione di tensori di ordine n

Per prima cosa consideriamo due vettori $p_i, q_i, i = 1, 2, 3$ che vivono nella rappresentazione fondamentale di $SO(3)$. Con essi costruiamo il tensore $T_{ij} = p_i q_j$. La traccia $T_{ii} = \sum_i p_i q_i$ è invariante. Inoltre il carattere di (anti)simmetria è invariante rispetto alle rotazioni di $SO(3)$, cioè se $T_{ij} = \pm T_{ji}$ vale anche $T'_{ij} = \pm T'_{ji}$ dove T' è il trasformato di T (Esercizio: dimostrarlo!). Quindi i multipletti appartengono a elementi del tensore con simmetria definita. Quanti gradi di libertà ha il tensore simmetrico? Ha elementi T_{ij} con $i \leq j$. Con $i = 1$ ho tre possibilità, con $i = 2$ ne ho 2 e con $i = 3$ ne ho una sola, in tutto 6 elementi. Il tensore antisimmetrico ha $i < j$ e quindi $2+1=3$ componenti, che esauriscono le $3 \times 3 = 9$ componenti. La decomposizione è:

$$3 \otimes 3 = 5 \oplus 3 \oplus 1 \quad (360)$$

Eliminando la traccia, che è invariante, dal tensore simmetrico, otteniamo le 5 componenti del multipletto di spin 2. La parte antisimmetrica ha le tre componenti di spin 1 e la traccia ha spin

0:

$$T_{ij} = \left[\frac{p_i q_j + p_j q_i}{2} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sum_k p_k q_k \right] + \left[\frac{p_i q_j - p_j q_i}{2} \right] + \frac{1}{3} \delta_{ij} \sum_k p_k q_k = S[T_{ij}] + A[T_{ij}] + Tr \quad (361)$$

avendo indicato con S l'operazione di simmetrizzazione e sottrazione della traccia.

Consideriamo ora il prodotto diretto di tre vettori p, q, r . La decomposizione è:

$$3 \otimes 3 \otimes 3 = [5 \oplus 3 \oplus 1] \otimes 3 = (7 \oplus 5 \oplus 3) \oplus (5 \oplus 3 \oplus 1) \oplus 3 \quad (362)$$

per un totale di $3^3 = 27$ gradi di libertà. Di nuovo, la rappresentazione di spin più elevato (spin 3 in questo caso) è legata al tensore completamente simmetrico rispetto allo scambio dei tre indici. In questo caso il numero di componenti è dato dalle scelte $i \leq j \leq k$. E' facile vedere che se scelgo $i = 1$ ho 6 possibili scelte per j, k . se scelgo $i = 2$ ne ho 3 e per $i = 3$ una sola. In totale ho 10 componenti. Tuttavia anche in questo caso ho dei termini di traccia: Tutti i tensori ottenuti contraendo due indici appartengono alla rappresentazione di spin 1. Ho tre possibili scelte $\delta_{ij} T_{ijk}, \delta_{ik} T_{ijk}, \delta_{kj} T_{ijk}$. In totale ho $10-3=7$ componenti per il tensore totalmente simmetrico a traccia nulla, che corrispondono allo spin 3.

Cerchiamo ora di formalizzare e generalizzare a tensori con n componenti. Possiamo formare i tensori invarianti ($R \in SO(3)$):

$$\delta_{ij} \rightarrow R_{ii'} R_{jj'} \delta_{i'j'} = \delta_{ij} \quad \varepsilon_{ijk} \rightarrow R_{ii'} R_{jj'} R_{kk'} \varepsilon_{i'j'k'} = \varepsilon_{ijk} \det[R] = \varepsilon_{ijk} \quad (363)$$

Combinando questi tensori con un tensore di rango n possiamo abbassare il rango rispettivamente a n-2 e n-1*:

$$\delta_{ab} T_{ab} \rightarrow \delta_{ab} R_{aa'} R_{bb'} T_{a'b'} = \delta_{a'b'} T_{a'b'} \quad (364)$$

$$\varepsilon_{abc} T_{bc} \rightarrow \varepsilon_{abc} R_{bb'} R_{cc'} T_{b'c'} = \varepsilon_{a'b'c'} R_{a'l} R_{al} R_{bb'} R_{cc'} T_{b'c'} = R_{al} \varepsilon_{ab'c'} T_{b'c'} \quad (365)$$

Sottraiamo ora il termine di traccia e il termine antisimmetrico:

$$S[T]_{ij} = T_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} [\delta_{ab} T_{ab}] - \frac{1}{2} \varepsilon_{ijl} [T_{ab} \varepsilon_{abl}] \quad (366)$$

E' Facile verificare che $S[T]$ è simmetrico e a traccia nulla rispetto agli indici ij . Possiamo ora ripetere l'operazione di simmetrizzazione e sottrazione di traccia per tutti gli indici. Otteniamo il giusto numero di gradi di libertà, che è $2n+1$ per uno spin n? Siccome il tensore è completamente simmetrico, possiamo contarne le componenti indipendenti mettendo tutti gli 1 a sinistra, i 3 a destra e i 2 fra gli 1 e i 3. Possiamo pensare di identificare un elemento del tensore mettendo due separatori A e B fra i tre gruppi di numeri. Ad esempio A=3, B=5 con n=7 corrisponde a 1123333 mentre A=4, B=8 con n=10 corrisponde a 1112223333. Il numero di componenti

*si sottintende che la contrazione ad esempio avviene sui primi due indici mentre i restanti n-2 indici restano invariati

indipendenti dipende quindi dal numero di modi diversi in cui posso sistemare A e B. Se $A=1$ B può essere messo in $n+1$ modi diversi (il numero totale di oggetti compresi A e B è $n+2$). Se $A=2$ B ha n possibilità ecc. In totale ho la somma degli interi da 1 a $n+1$, cioè $(n+2)(n+1)/2$. Adesso passiamo a richiedere traccia nulla su tutte le coppie di indici. Data la simmetria, posso sempre mettere i due indici su cui richiedo traccia nulla a sinistra. Dopodiché il conteggio procede come prima solo che il numero di indici è sceso di due unità. Ottengo quindi $n(n-1)/2$ condizioni, e il numero di gradi di libertà è:

$$\frac{(n+2)(n+1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = 2n+1 \quad (367)$$

Spesso anziché la base cartesiana si usa la base sferica, cioè quella degli autovettori di T_3 . Siccome in base cartesiana $T_{ij}^3 = -i\varepsilon_{3ij}$, è facile verificare che $T_3 x_{\pm} = \pm x_{\pm}$ con $x_{\pm} = 1/\sqrt{2}(x \pm iy)$. Si ottengono facilmente le armoniche sferiche dal prodotto diretto di vettori di spin 1:

$$T_+ = \frac{x+iy}{\sqrt{2}} = \frac{e^{i\phi} \sin \theta}{\sqrt{2}} \quad T_3 = z = \cos \theta \quad T_- = \frac{x-iy}{\sqrt{2}} = \frac{e^{-i\phi} \sin \theta}{\sqrt{2}} \quad (368)$$

Ad esempio le componenti del tensore di spin 2, ordinati dal valore +2 al valore 0 di T_3 , sono:

$$\begin{aligned} S[T]_{++} &= T_{++} = \frac{x^2 - y^2 + 2ixy}{2} = \frac{1}{2} e^{2i\phi} \sin^2 \theta \\ S[T]_{+3} &= \frac{T_{+3} + T_{3+}}{2} = \frac{z(x+iy)}{\sqrt{2}} = e^{i\phi} \sin \theta \cos \theta \\ S[T]_{33} &= T_{33} - \frac{1}{3}(T_{+-} + T_{-+} + T_{33}) = \frac{2z^2 - x^2 - y^2}{3} = \frac{1 + 3 \cos(2\theta)}{6} \end{aligned}$$

con le componenti con T_3 negativo ottenute dallo scambio di + con - ovvero $\phi \rightarrow -\phi$.

Possiamo usare lo stesso conteggio nel caso di un tensore con indici che vanno da 1 a 4, $T_{\mu_1 \dots \mu_i \dots \mu_n} = p_{\mu_1} \dots p_{\mu_i} \dots p_{\mu_n}$. Il numero di gradi di libertà sembra diverso, ma se pensiamo a uno stato fisico la condizione di onshellness impone $p_0 = +\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ e ho 3 gradi di libertà per ogni indice.

Per finire, posso descrivere uno spinore di spin s e impulso k tramite $s_s^\mu = \bar{u}_s(k) \gamma^\mu u_s(k)$. Nel sistema a riposo se la particella ha spin allineato con \hat{n} , è facile verificare che $s^\mu = (0, m\hat{n})$. Possiamo costruire anche tensori misti $s^\mu p^\nu$.

A.2 Relazioni di dispersione

Il tensore adronico definito in termine di commutatore delle correnti è simmetrico per scambio $q \rightarrow -q, \mu \leftrightarrow \nu$; infatti:

$$\int d^4x e^{-iqx} \langle T[J_\nu(x) J_\mu(0)] \rangle = - \int d^4x e^{iqx} \langle T[J_\nu(-x) J_\mu(0)] \rangle = + \int d^4x e^{iqx} \langle T[J_\mu(0) J_\nu(-x)] \rangle = \int d^4x e^{iqx} \langle T[J_\mu(0) J_\nu(x)] \rangle \quad (369)$$

Quindi i fattori di forma T_1, T_2 che compaiono nell'analogo della (249) per $T_{\mu\nu}$ sono simmetrici per scambio $(Q^2, \nu) \rightarrow (Q^2, -\nu)$. Qui discussione sul Peskin sulla regione fisica e quella della OPE. Si ha $W_{\mu\nu} \sim \text{Im}T_{\mu\nu}$ vedi Muta. Nella variabile ν , $W_{\mu\nu}$ è zero per $\nu = Pq/M < Q^2/(2M)$. Infatti nella regione fisica $P + q = P_X$ da cui $-q^2 = Q^2 = 2Pq + P^2 - P_X^2 \leq 2Pq$. Quindi anche la parte immaginaria di T , cioè la discontinuità attraverso il taglio dell'asse reale, è zero per $\nu = < Q^2/(2M)$. T è inoltre simmetrico per crossing $(Q^2, \nu) \rightarrow (Q^2, -\nu)$.

References

- [1] M. Maggiore, "A modern introduction to quantum field theory", Oxford university press.
- [2] M.E. Peskin, D.V. Schroeder, An Introduction to quantum field theory, Addison-Wesley publishing company.
- [3] M. Kaku, "Quantum Field Theory- A modern introduction", Oxford University Press
- [4] C. Itzykson and J. Zuber, "Quantum Field Theory", McGraw-Hill
- [5] T. Cheng and L. Li, "Gauge Theory of Elementary Particle Physics", Oxford Science Publications
- [6] L. A. Harland-Lang, A. D. Martin, P. Motylinski and R. S. Thorne, Eur. Phys. J. C **75** (2015) no.5, 204 doi:10.1140/epjc/s10052-015-3397-6 [arXiv:1412.3989 [hep-ph]].
- [7] M. Ciafaloni, P. Ciafaloni and D. Comelli, Phys. Rev. Lett. **88** (2002) 102001 [hep-ph/0111109].
- [8] F. Mandl and G. Shaw, Quantum Field Theory (Wiley Ed.)
- [9] S. Bethke, Prog. Part. Nucl. Phys. **58**, 351 (2007) doi:10.1016/j.pnpnp.2006.06.001 [hep-ex/0606035].
- [10] G. Altarelli and G. Parisi, Nucl. Phys. B **126** (1977) 298. doi:10.1016/0550-3213(77)90384-4
- [11] M. Ciafaloni, P. Ciafaloni and D. Comelli, Phys. Rev. Lett. **84** (2000) 4810 doi:10.1103/PhysRevLett.84.4810 [hep-ph/0001142].
- [12] J. Wess and J. Bagger, "Supersymmetry and Supergravity", Princeton University Press.
- [13] <http://www-pdg.lbl.gov/>
- [14] S. P. Martin, "A Supersymmetry Primer", hep-ph/9709356
- [15] H. Georgi and H. D. Politzer, Phys. Rev. D **9** (1974) 416; D. J. Gross and F. Wilczek, Phys. Rev. D **9** (1974) 980.

[16] T. Muta, Perturbative QCD