Esame di Meccanica Quantistica Relativistica del 11/02/2018

La Lagrangiana di un bosone massivo A_μ in interazione con un fermione di Dirac ψ è data da:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \frac{M^2}{2}A_\mu A^\mu + \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi + \bar{\psi}(g_V\gamma_\mu + g_A\gamma_\mu\gamma_5)\psi\ A^\mu; \quad F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \tag{1}$$

1. Scrivere la regola di Feynman relativa all'ampiezza di decadimento del bosone in una coppia fermione-antifermione e calcolare l'ampiezza stessa.

2. Calcolare il risultato che si ottiene sostituendo la polarizzazione $\epsilon_\mu(p)$ del bosone con p_μ nella suddetta ampiezza.

3. Nel caso $m = 0$, calcolare la larghezza di decadimento Γ (si consiglia di utilizzare il risultatato al punto precedente per semplificare il calcolo).

4. Nel caso specifico $M = 1GeV, g_V = e, g_A = 2e, m = 0$ con e carica dell'elettrone, calcolare il valore numerico della vita media.

Considerare (sempre con $m = 0$) la trasformazione globale $\psi \to e^{i\theta}\psi$. La Lagrangiana è invariante? Scrivere la corrente di Noether J_μ relativa questa trasformazione. E sotto la trasformazione globale $\psi \to e^{i\theta\gamma_5}\psi$ la Lagrangiana è invariante? Scrivere la corrente di Noether J^5_μ relativa a questa seconda trasformazione. (Nota: ricordarsi che γ_5 anticommuta con le γ_μ, per cui ad esempio $\exp(i\gamma_5)\gamma_\mu = \gamma_\mu \exp(-i\gamma_5)$).

Ritorniamo ora al caso più generale $m \neq 0$. Sotto quali delle due trasformazioni la Lagrangiana è ancora invariante? Utilizzando l'equazione di Dirac, calcolare $\partial^\mu J_\mu$ e $\partial^\mu J^5_\mu$.Verificare che per le trasformazioni che sono simmetrie della Lagrangiana la corrente è conservata, per quelle che non lo sono la corrente non è conservata.

Soluzione L'ampiezza relativa al diagramma in figura per il processo $p \to k_1 + k_2$ è data (a meno di una fase) da

$$\mathcal{A} = \epsilon^\mu(p)\bar{u}(k_1)(g_V\gamma_\mu + g_A\gamma_\mu\gamma_5)v(k_2) \tag{2}$$

Utilizziamo ora l'equazine di Dirac $\bar{u}(k_1)(k\!\!\!/_1 - m) = (k\!\!\!/_2 + m)v(k_1) = 0$ per scrivere:

$$(k_1 + k_2)^\mu \bar{u}(k_1)\gamma_\mu v(k_2) = \bar{u}(k_1)(k\!\!\!/_1 + k\!\!\!/_2)v(k_2) = 0$$

$$\bar{u}(k_1)(k\!\!\!/_1 + k\!\!\!/_2)\gamma_5 v(k_2) = \bar{u}(k_1)k\!\!\!/_1\gamma_5 v(k_2) - \bar{u}(k_1)\gamma_5 k\!\!\!/_2 v(k_2) = 2m\bar{u}(k_1)\gamma_5 v(k_2)$$

e quindi:

$$p^\mu \bar{u}(k_1)(g_V\gamma_\mu + g_A\gamma_\mu\gamma_5)v(k_2) = 2mg_A\bar{u}(k_1)\gamma_5 v(k_2) \tag{3}$$

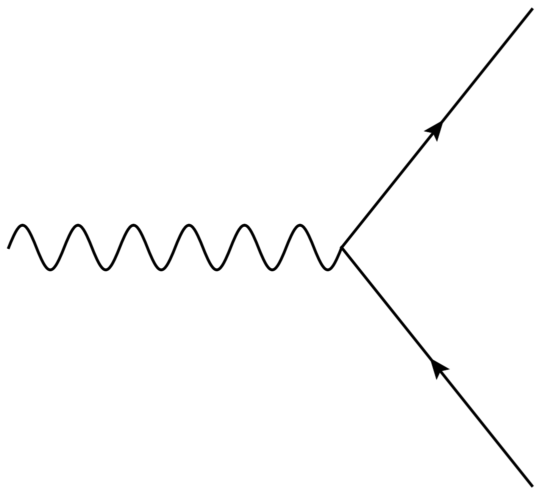

Figure 1: Diagramma di Feynman per il decadimento di un bosone vettore.

Nel caso $m = 0$, il modulo quadro dell'ampiezza sommato su spin finali e mediato su spin iniziali è:

$$\overline{|\mathcal{A}|^2} = \frac{1}{3}(-g^{\mu\nu} + \frac{p^\mu p^\nu}{M^2})\mathrm{Tr}\{\not{k}_1(g_V\gamma_\mu + g_A\gamma_\mu\gamma_5)\not{k}_2(g_V\gamma_\nu + g_A\gamma_\nu\gamma_5)\}$$

Nel caso massless in esame i termini in $p_\mu p_\nu$ non contribuiscono per via del risultato ricavato in precedenza. Inoltre anche i termini in $g_V g_A$ danno 0 essendo proporzionali a $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}g^{\mu\nu}$ e quindi:

$$\overline{|\mathcal{A}|^2} = -\frac{1}{3}\left[g_V^2\mathrm{Tr}\{\not{k}_1\gamma_\mu\not{k}_2\gamma^\mu\} + g_A^2\mathrm{Tr}\{\not{k}_1\gamma_\mu\gamma_5\not{k}_2\gamma^\mu\gamma_5\}\right] = \frac{8}{3}(g_V^2 + g_A^2)(k_1k_2)$$

(notare che la traccia con le γ_5 dà lo stesso risultato di quelle senza, in quanto $\gamma_5\not{k}_2\gamma^\mu\gamma_5 = \not{k}_2\gamma^\mu$). Utilizzando $M^2 = 2k_1k_2$, il fatto che il modulo dell'impulso delle particelle finali, massless, vale $M/2$ e l'espressione per la larghezza in termini di spazio delle fasi, si ottiene:

$$d\Gamma = \frac{1}{64\pi^2}\frac{\overline{|\mathcal{A}|^2}}{M}d\Omega \Rightarrow \Gamma = \frac{1}{12\pi}(g_V^2 + g_A^2)M$$

Inserendo i valori numerici proposti, otteniamo:

$$\Gamma = \frac{5\alpha}{3}GeV \Rightarrow \tau = \frac{1}{\Gamma}\frac{\hbar c}{c} \approx \frac{3 \times 137}{5GeV}\ \frac{0.2GeV \times 10^{-15}m}{3 \times 10^8 m/s} \approx 5.5 \times 10^{-23}s$$

Sotto la trasformazione $\psi \to e^{i\theta}\psi$ la Lagrangiana è banalmente invariante. La corrente di Noether associata è:

$$J^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial_\mu\psi}\Delta\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial_\mu\bar{\psi}}\Delta\bar{\psi} = i\bar{\psi}\gamma^\mu(i\theta\psi) \propto \bar{\psi}\gamma^\mu\psi$$

Consideriamo la trasformazione $\psi \to e^{i\theta\gamma_5}\psi$; si ha $\bar{\psi} \to \psi^\dagger e^{-i\gamma_5}\gamma_0 = \psi^\dagger\gamma_0 e^{i\gamma_5} = \bar{\psi}e^{i\gamma_5}$. Il termine cinetico e il termine di corrente vettoriale (proporzionale a g_V) si trasformano nello stesso modo e sono invarianti in quanto $\bar{\psi}\gamma_\mu\psi \to \bar{\psi}e^{i\gamma_5}\gamma_\mu e^{i\gamma_5}\psi = \bar{\psi}\gamma_\mu e^{-i\gamma_5}e^{i\gamma_5}\psi = \bar{\psi}\gamma_\mu\psi$. Identiche manipolazioni portano a concludere che la corrente assiale (proporzionale a g_A) è invariante. La corrente di Noether associata a questa trasformazione è $J_\mu^5 = \bar{\psi}\gamma_\mu\gamma_5\psi$.

Se la massa del fermione è diversa da zero, nulla cambia per la prima delle due trasformazioni, ma per la seconda si ha $\bar{\psi}\psi \to \bar{\psi}e^{i\gamma_5}e^{i\gamma_5}\psi$ e il termine di massa non è invariante. Utilizzando l'equazione di Dirac $(i\partial\!\!\!/ - m)\psi = i\partial_\mu\bar{\psi}\gamma^\mu + m\bar{\psi} = 0$ si ottiene $i\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\psi) = -m\bar{\psi}\psi + m\bar{\psi}\psi = 0$ e la corrente vettoriale è conservata, coerentemente con il fatto che la prima trasformazione è una simmetria. Per la corrente assiale invece $i\partial_\mu(\bar{\psi}\gamma^\mu\gamma_5\psi) = -m\bar{\psi}\gamma_5\psi - m\bar{\psi}\gamma_5\psi \neq 0$; in questo caso la seconda trasformazione non è una simmetria e la corrente non è conservata.

Commento

L'identità (3) è connessa con la nonconservazione della corrente totale che si ricava dall'equazione di Dirac, cioé

$$\partial_\mu J_\mu^{TOT} = \partial_\mu[\bar{\psi}(g_V\gamma_\mu + g_A\gamma_\mu\gamma_5)\psi] = 2mig_A\bar{\psi}\gamma_5\psi \tag{4}$$

Per capire la connessione, osserviamo che nell'ampiezza (2) compare l'elemento di matrice di $J_\mu^{TOT}(0)$ fra il vuoto e lo stato finale di coppia fermione-antifermione:

$$\langle f|J_\mu^{TOT}(0)|0\rangle = \bar{u}(k_1)(g_V\gamma_\mu + g_A\gamma_\mu\gamma_5)v(k_2)$$

L'invarianza per traslazioni spaziotemporali implica $\partial^\mu J_\mu^{TOT} = i[P^\mu, J_\mu]$ con P operatore impulso (si può ricavare da $J_\mu(x) = \exp[iPx]J_\mu(0)\exp[-iPx]$). Si ha quindi:

$$\langle f|\partial^\mu J_\mu^{TOT}|0\rangle = \langle f|i[P^\mu, J_\mu^{TOT}]|0\rangle = ip^\mu\langle f|J_\mu^{TOT}|0\rangle = ip^\mu\bar{u}(k_1)(g_V\gamma_\mu + g_A\gamma_\mu\gamma_5)v(k_2) \tag{5}$$

D'altra parte la (4) valutata a $x = 0$ implica:

$$\langle f|\partial^\mu J_\mu^{TOT}|0\rangle = 2mi\langle f|g_A\bar{\psi}\gamma_5\psi|0\rangle = 2mig_A\bar{u}(k_1)\gamma_5 v(k_2) \tag{6}$$

Uguagliando la (5) e la (6) si ottiene facilmente la (3), che è quindi conseguenza del pattern di rottura di simmetria: il termine proporzionale a m rompe la simmetria $\psi \to e^{i\gamma_5\theta}\psi$ ma mantiene la simmetria $\psi \to e^{i\theta}\psi$ causando una parziale nonconservazione della corrente J_μ^{TOT} nella forma (4).