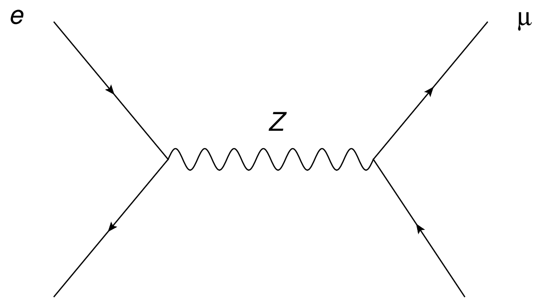

Figure 1: Diagramma di Feynman per $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ con scambio di un vettore massivo Z in canale s

Esame di Meccanica Quantistica Relativistica del 26/02/2018

Il processo $e^+e^- \to \mu^+\mu^-$ riceve un contributo dallo scambio in canale s del bosone Z, come indicato in figura. L'accoppiamento del bosone Z è universale, cioé identico per elettrone e muone, e si può scrivere come $g_V\gamma_\mu + g_A\gamma_\mu\gamma_5$. Inoltre il propagatore dello Z ha l'espressione:

$$\frac{-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{M^2}}{q^2 - M^2}$$

q essendo l'impulso dello Z e M la sua massa. Si supponga che il processo avvenga ad una energia tale che sia la massa dell'elettrone che quella del muone siano trascurabili, e si possano mettere a 0.

1. Scrivere l'ampiezza per il processo.
2. Dimostrare, usando l'equazione di Dirac, che i termini in $q^\mu q^\nu$ del propagatore non contribuiscono all'ampiezza.
3. Scrivere il modulo quadro dell'ampiezza in termini di g_V, g_A, M.
4. Scrivere la sezione d'urto differenziale in $d\Omega$ angolo solido del muone finale, nel caso caso in cui non si misurino gli spin finali e i fasci iniziali siano non polarizzati. Integrare la sezione d'urto differenziale per ottenere la sezione d'urto totale.
5. Determinare il valore numerico in cm^2 della sezione d'urto per il caso particolare $g_V = g_A = e$ carica dell'elettrone, $M = 1$ GeV e energia nel centro di massa $\sqrt{s} = 100$ GeV

Nota Può essere utile l'identità

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = -2(g^\alpha_\rho g^\beta_\sigma - g^\alpha_\sigma g^\beta_\rho)$$

Soluzione Definiamo gli impulsi come $e^-(k_1)e^+(k_2) \to \mu^-(p_1)\mu^+(p_2)$ con (per ipotesi del testo) $k_1^2 = k_2^2 = p_1^2 = p_2^2 = 0$. L'ampiezza, chiamati $u, v(U, V)$ le soluzioni dell'equazione di DIrac per l'elettrone (muone), è data da

$$\mathcal{A} = \bar{v}(k_2)(g_V\gamma_\mu + g_A\gamma_\mu\gamma_5)u(k_1)(\frac{-g^{\mu\nu} + \frac{q^\mu q^\nu}{M^2}}{q^2 - M^2})\bar{U}(p_1)(g_V\gamma_\nu + g_A\gamma_\nu\gamma_5)V(p_2)$$

con $q = k_1 + k_2 = p_1 + p_2$. per via dell'equazione di Dirac si ha ad esempio:

$$q^\mu(\bar{v}(k_2)[g_V\gamma_\mu + g_A\gamma_\mu\gamma_5]u(k_1)) = \bar{v}(k_2)[g_V(\not{k}_1 + \not{k}_2) + g_A(\not{k}_2\gamma_5 - \gamma_5\not{k}1)]u(k_1) = 0$$

essendo, per ipotesi, l'elettrone massless. Il modulo quadro dell'ampiezza sommata su spin iniziali e finali, tenuto conto di quanto sopra, risulta (con $s = (k_1 + k_2)^2$):

$$(s - M^2)^2\overline{|\mathcal{A}|^2} = \mathrm{Tr}\{\not{k}_2[g_V\gamma_\mu + g_A\gamma_\mu\gamma_5]\not{k}_1[g_V\gamma_\nu + g_A\gamma_\nu\gamma_5]\}\mathrm{Tr}\{\not{p}_1[g_V\gamma^\mu + g_A\gamma^\mu\gamma_5]\not{p}_2[g_V\gamma^\nu + g_A\gamma^\nu\gamma_5]\} =$$

$$\left\{4(g_V^2 + g_A^2)[k_1^\mu k_2^\nu + k_1^\nu k_2^\mu - (k_1k_2)g^{\mu\nu}] - 8ig_Vg_A\epsilon^{\alpha\mu\beta\nu}k_{2\alpha}k_{1\beta}\right\} \times$$
$$\left\{4(g_V^2 + g_A^2)[p_2^\mu p_1^\nu + p_2^\nu p_1^\mu - (p_1p_2)g^{\mu\nu}] - 8ig_Vg_A\epsilon^{\rho\mu\sigma\nu}p_{1\rho}p_{2\sigma}\right\}$$

I temini incrociati del prodotto sono nulli in quanto contrazioni di tensori simmetrici e antisimmetrici in μ, ν. I rimanenti due termini danno:

$$(s-M^2)^2\overline{|\mathcal{A}|^2} = 16(g_V^2+g_A^2)^2[2(k_1p_1)(k_2p_2)+2(k_1p_2)(k_2p_1)]-64g_V^2g_A^2[-2(k_2p_1)(k_1p_2)+2(k_1p_1)(k_2p_2)] =$$

$$32\left\{(k_2p_1)(k_1p_2)[(g_V^2 + g_A^2)^2 + 4g_V^2g_A^2] + (k_1p_1)(k_2p_2)(g_V^2 - g_A^2)^2\right\}$$

Nel sistema del centro di massa, definito θ come l'angolo fra la direzione di elettrone entrante e quella di muone uscente, si ha

$$k_1p_1 = k_2p_2 = \frac{s}{4}(1 - \cos\theta) \qquad k_1p_2 = k_2p_1 = \frac{s}{4}(1 + \cos\theta)$$

e, una volta tenuto conto del fattore 1/4 per la media sulle possibili configurazioni di spin iniziali:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s}\frac{\overline{|\mathcal{A}|^2}}{4} = \frac{1}{128\pi^2 s}\frac{s^2}{(s - M^2)^2}\left\{[(g_V^2 + g_A^2)^2 + 4g_V^2g_A^2](1 + \cos\theta)^2 + (g_V^2 - g_A^2)^2(1 - \cos\theta)^2\right\}$$

Per la sezione d'urto totale, tenuto conto che $\int d\Omega(1 - \cos\theta)^2 = \int d\Omega(1 + \cos\theta)^2 = 16\pi/3$, si ottiene:

$$\sigma = \frac{1}{12\pi s}\frac{s^2}{(s - M^2)^2}(g_V^2 + g_A^2)^2$$