Esercitazione di Meccanica Quantistica Relativistica del 20/12/2018

Esercizio 1
Dimostrare che se uno spinore $u(p)$ soddisfa l'equazione di Dirac $(\not{p}-m)u = 0$, si ha anche $\bar{u}(\not{p}-m) = 0$. Si consideri l'ampiezza relativa al processo di emissione di un fotone da parte di un elettrone $e(p_1) \to e(p_2) + \gamma(k)$:

$$\mathcal{M} = \bar{u}(p_2)\gamma_\mu u(p_1)\epsilon^\mu(k) \equiv \mathcal{M}_\mu \epsilon^\mu(k)$$

Utilizzando la conservazione del quadriimpulso e l'equazione di Dirac, dimostrare che $\mathcal{M}_\mu k^\mu = 0$. Questo è un esempio di Identità di Ward, secondo la quale se in un'ampiezza si sostituisce la polarizzazione di un fotone con l'impulso k, si ottiene 0.

Utilizzando la conservazione del quadriimpulso, dimostrare che questo processo è possibile solo se l'energia del fotone è nulla.

Esercizio 2 Si consideri un processo di scattering $p_1 + p_2 \to p_3 + p_4$ con $p_i^2 = m_i^2$ nel sistema del c.m., nel quale le componenti spaziali di $p_1 + p_2$ e $p_3 + p_4$ sono zero. Indicando $|\mathbf{p}_i^{c.m.}| = |\mathbf{p}_1| = |\mathbf{p}_2|$ e $|\mathbf{p}_f^{c.m.}| = |\mathbf{p}_3| = |\mathbf{p}_4|$ e definendo $s \equiv (p_1 + p_2)^2$, dimostrare che valgono le relazioni:

$$|\mathbf{p}_i^{c.m.}| = \frac{1}{2\sqrt{s}}\sqrt{s^2 - 2s(m_1^2 + m_2^2) + (m_1^2 - m_2^2)^2} \qquad |\mathbf{p}_f^{c.m.}| = \frac{1}{2\sqrt{s}}\sqrt{s^2 - 2s(m_3^2 + m_4^2) + (m_3^2 - m_4^2)^2}$$

Qual'è il valore minimo dell'energia nel c.m. $\sqrt{s}$ affinché il processo sia possibile?

Dimostrare che lo spazio delle fasi:

$$d\phi = (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{d^3\boldsymbol{p}_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d^3\boldsymbol{p}_4}{(2\pi)^3 2E_4}$$

assume, nel sistema del c.m., l'espressione seguente:

$$d\phi_{c.m.} = \frac{1}{16\pi^2} \frac{|\boldsymbol{p}_f^{c.m.}|}{\sqrt{s}} d\Omega_f$$

dove $d\Omega_f$ è l'angolo solito relativo a $\boldsymbol{p}_3$.