Esercitazione di Meccanica Quantistica Relativistica del 22/11/2018

Esercizio 1

Si considerino i due quadrivettori $p = (3, 0, 1, -1)$ e $q = (1, -2, 0, 1)$. Calcolare p^2, q^2 e $p \cdot q$. Si effettua una trasformazione di Lorentz $p' = \Lambda p$ e $q' = \Lambda q$; Λ rappresenta una rotazione definita da $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha, 0, 0)$. Scrivere esplicitamente la matrice 4x4 Λ e dimostrare che $p^2 = p'^2, q^2 = q'^2, q' \cdot p' = q \cdot p$. Ripetere l'esercizio per la trasformazione di Lorentz che rappresenta il boost definito da $\boldsymbol{\beta} = (0, \beta, 0)$.

Esercizio 2

Si consideri il prodotto diretto di due spin 1/2 secondo la decomposizione $\frac{1}{2} \otimes \frac{1}{2} = 0 \oplus 1$. Definendo $|\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}\rangle \equiv |\pm\rangle$, si ricavino esplicitamente gli stati di singoletto $|0\rangle \equiv |0, 0\rangle$ e di tripletto $|x_3\rangle \equiv |1, 0\rangle, |x_\pm\rangle \equiv |1, \pm 1\rangle$. Considerato lo spin totale $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{S}^1 + \boldsymbol{S}^2$, si scrivano gli elementi di matrice di $\boldsymbol{S}_3$ sullo stato di singoletto e su quelli di tripletto. Per una rotazione finita $\exp[-i\boldsymbol{S}_3\alpha]$ come trasforma lo stato di singoletto? E quelli di tripletto?. Consideriamo ora una nuova base di tripletto, lasciando $|x_3\rangle$ invariato e definendo

$$|x_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|x_+\rangle + |x_-\rangle) \qquad , \qquad |x_2\rangle = \frac{1}{i\sqrt{2}}(|x_+\rangle - |x_-\rangle)$$

. Scrivere la matrice 3x3 che rappresenta S_3 in questa base. Come si trasformano gli stati di questa nuova base sotto rotazione?

Esercizio 3

Si consideri la Lagrangiana $\mathcal{L} = \bar{\psi}_1(i\partial\!\!\!/ - m)\psi_1 + \bar{\psi}_2(i\partial\!\!\!/ - m)\psi_2$ dove ψ_1 e ψ_2 sono due quadrispinori di Dirac. In maniera sintetica, possiamo scrivere

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\partial\!\!\!/ - m)\psi \qquad \text{con} \qquad \psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}$$

Si ricavino le equazioni del moto per ψ_1, ψ_2. Dimostrare che la Lagrangiana è invariante sotto trasformazione $\psi \to \psi' = U\psi$ dove U è una matrice 2x2 unitaria. Si ricavino le correnti di Noether conservate relative a questa invarianza. Cosa succede se $m_1 \neq m_2$ cioè $\mathcal{L} = \bar{\psi}_1(i\partial\!\!\!/ - m_1)\psi_1 + \bar{\psi}_2(i\partial\!\!\!/ - m_2)\psi_2$? Quali simmetrie possiede ancora la Lagrangiana, se ne possiede? Quali correnti sono ancora conservate?