

Figure 1: Diagramma di Feynman per $e^-(k_1)e^+(k_2) \rightarrow \mu^-(p_1)\mu^+(p_2)$

Esercitazione di Meccanica Quantistica Relativistica del 24/12/2018

Esercizio

Il processo di annichilazione di una coppia elettrone-positrone in una coppia muone-antimuone $e^-(k_1)e^+(k_2) \rightarrow \mu^-(p_1)\mu^+(p_2)$ è descritto dall'ampiezza in figura 1.

Utilizzando per il propagatore del fotone l'espressione $ig_{\mu\nu}/q^2$, scrivere l'ampiezza per il processo. Suggerimento per la notazione: $u_{s_1}(k_1)(\bar{v}_{s_1}(k_1))$ per lo stato di particella (antiparticella) relativo al fermione di impulso k_1 , e analogamente per l'impulso k_2 . Per il muone: $U_{r_1}(p_1)(\bar{V}_{r_1}(p_1))$ per lo stato di particella (antiparticella) relativo al fermione di impulso p_1 , e analogamente per l'impulso p_2 . Inoltre m massa dell'elettrone, M massa del muone.

Poiché $m/M \sim 1/200$, la massa dell'elettrone si può trascurare. Calcolare in questo limite $|\overline{\mathcal{A}}|^2$, cioè il modulo quadro dell'ampiezza sommato su spin finali e iniziali.

Supponendo ora che l'energia nel centro di massa del processo sia molto più grande della massa M del muone, considerare il limite $m = M = 0$. Calcolare $|\overline{\mathcal{A}}|^2$ in funzione dell'energia del processo $s \equiv (k_1 + k_2)^2$ e dell'angolo di scattering $\cos\theta = \hat{\mathbf{k}}_1 \cdot \hat{\mathbf{p}}_1$.

Soluzione

L'ampiezza (a meno di una fase) si scrive:

$$\mathcal{A} = \frac{e^2}{s} \bar{v}_{s_2}(k_2)\gamma_\mu u_{s_1}(k_1) \bar{U}_{r_1}(p_1)\gamma^\mu V_{r_2}(p_2)$$

in quanto l'impulso del fotone è $q = k_1 + k_2$ e $q^2 = s$. Il modulo quadro dell'ampiezza, tenuto conto che $[\bar{u}_2\gamma_\mu u_1]^* = \bar{u}_1\gamma_\mu u_2$, è dato da

$$|\mathcal{A}|^2 = \frac{e^4}{s^2} \bar{v}_{s_2}(k_2)\gamma_\mu u_{s_1}(k_1) \bar{U}_{r_1}(p_1)\gamma^\mu V_{r_2}(p_2) \bar{V}_{r_2}(p_2)\gamma^\nu U_{r_1}(p_1) \bar{u}_{s_1}(k_1)\gamma_\nu v_{s_2}(k_2)$$

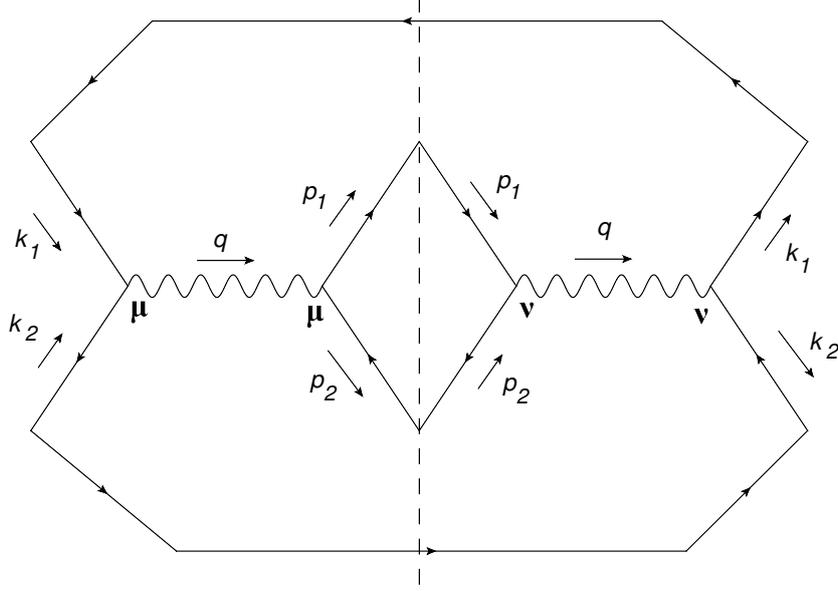


Figure 2: Modulo quadro dell'ampiezza in forma grafica

A questo punto intervengono le tracce; ad esempio sommando sugli spin finali e rendendo espliciti gli indici di Dirac:

$$\sum_{r_1, r_2} \bar{U}_{r_1}(p_1)_\alpha \gamma_{\alpha\beta}^\mu V_{r_2}(p_2)_\beta \bar{V}_{r_2}(p_2)_\delta \gamma_{\delta\rho}^\nu U_{r_1}(p_1)_\rho = (\not{p}_1 + M)_{\rho\alpha} \gamma_{\alpha\beta}^\mu (\not{p}_2 - M)_{\beta\delta} \gamma_{\delta\rho}^\nu = \text{Tr}\{(\not{p}_1 + M)\gamma^\mu(\not{p}_2 - M)\gamma^\nu\}$$

Espressione analoga vale per gli stati iniziali, per cui:

$$|\mathcal{A}|^2 = \frac{e^4}{s^2} \text{Tr}\{(k_1 + m)\gamma_\nu(k_2 - m)\gamma_\mu\} \text{Tr}\{(\not{p}_1 + M)\gamma^\mu(\not{p}_2 - M)\gamma^\nu\}$$

La stessa espressione si ricava con l'aiuto grafico della figura 2, a proposito della quale è ben fare alcune precisazioni:

- Si eseguono le tracce sui loop (cioè sui percorsi chiusi) di fermioni, seguendo le frecce fermioniche al contrario.
- in corrispondenza dell'incrocio fra il taglio di unitarietà (riga verticale tratteggiata) si mettono le somme sugli spin degli stati fisici. Nel caso in esame gli stati fisici sono fermioni e le somme sulle polarizzazioni sono $\not{p} + m$ per particelle e $\not{p} - m$ per antiparticelle. Nel caso ci fossero fotoni ci andrebbe la somma sulle polarizzazioni fisiche.
- La conservazione dell'impulso ai vertici vale per questo grafico esattamente come per il grafico dell'ampiezza.

Possiamo ora eseguire le tracce, ottenendo il risultato:

$$\begin{aligned} \frac{s^2}{e^4} |\mathcal{A}|^2 &= 16\{k_1^\mu k_2^\nu + k_1^\nu k_2^\mu - (m^2 + k_1 k_2)g^{\mu\nu}\} \{p_1^\mu p_2^\nu + p_1^\nu p_2^\mu - (M^2 + p_1 p_2)g^{\mu\nu}\} \\ &= 32\{(k_1 p_1)(k_2 p_2) + (k_1 p_2)(k_2 p_1) + M^2(k_1 k_2) + m^2(p_1 p_2) + 2m^2 M^2\} \end{aligned}$$

Adesso consideriamo il caso $m = M = 0$. Nel sistema del centro di massa si ha:

$$k_1 = E(1, \hat{\mathbf{k}}) \quad k_2 = E(1, -\hat{\mathbf{k}}) \quad p_1 = E(1, \hat{\mathbf{p}}) \quad p_2 = E(1, -\hat{\mathbf{p}}) \quad s = (k_1 + k_2)^2 = 4E^2$$

da cui si ricava, definendo $\cos \theta = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{p}}$:

$$k_1 p_1 = k_2 p_2 = \frac{s}{4}(1 - \cos \theta) \quad k_1 p_2 = k_2 p_1 = \frac{s}{4}(1 + \cos \theta)$$

e infine:

$$\overline{|\mathcal{A}|^2}_{m=M=0} = 4e^4[1 + \cos^2 \theta]$$

Per completezza calcoliamo ora la sezione d'urto. Se il fascio iniziale è non polarizzato e non si misura lo spin finale, l'espressione ora ricavata va divisa per 4 in quanto si media sulle 4 possibili configurazioni di spin iniziali. Inoltre dalle note espressioni per lo spazio delle fasi si ricava:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{64\pi^2 s} \frac{\overline{|\mathcal{A}|^2}}{4} = \frac{\alpha^2}{4s} [1 + \cos^2 \theta]$$

Integrando questa espressione si trova la sezione d'urto totale, valida nel caso $\sqrt{s} \gg M$:

$$\sigma_{tot} = \frac{4\pi\alpha^2}{3s}$$

Esercizio: Ricavare le espressioni per sezione d'urto differenziale e totale nel caso $m = 0$ ma $M \neq 0$. Qual'è la soglia, cioè il valore minimo di \sqrt{s} tale che il processo sia possibile? Utilizzando il valore per la massa M del muone da <http://pdg.lbl.gov/> ricavare il valore, in cm^2 , della sezione d'urto per $\sqrt{s}=100$ GeV.