Esercizi - Natale 2018

Esercizio 1
Si consideri la funzione:

$$G(x) = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx}}{p^2 - m^2} \tag{1}$$

Dimostrare che essa soddisfa $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)G(x) = -\delta^4(x)$, ed è pertanto una funzione di Green dell'equazione di Klein-Gordon.

La (1) è ambigua, nel senso che se si aggiunge una funzione $f(x)$ che soddisfa $(\partial_\mu \partial^\mu + m^2)f(x) = 0$ si ha che $G(x) + f(x)$ soddisfa la stessa equazione di $G(x)$. Per risolvere l'ambiguità occorre dare una prescrizione per il polo $p^2 = m^2$. Una prescrizione che compare spesso in teoria dei campi è quella di Feynman:

$$G_F(x) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{e^{-ipx}}{p^2 - m^2 + i\varepsilon}$$

Integrando in dp_0 (conviene fare l'integrale in campo complesso), dimostrare che vale:

$$G_F(x) = -i \int \frac{d^3\boldsymbol{p}}{2p_0(2\pi)^3} \left[\theta(x^0)e^{-ipx} + \theta(-x^0)e^{ipx}\right]_{p_0 = +\sqrt{|\boldsymbol{p}|^2 + m^2}}$$

Utilizzando questa espressione e l'espressione del campo scalare in termini di operatori di creazione e distruzione, dimostrare che (abbrevio $|0\rangle = \rangle$)

$$G_F(x) = -i\langle \mathcal{T}\{\phi(x)\phi(0)\}\rangle \equiv -i\langle \theta(x_0)\phi(x)\phi(0) + \theta(-x_0)\phi(0)\phi(x)\rangle$$

Esercizio 2
Si consideri la Lagrangiana di un campo scalare neutro

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{2}\phi^2 + \lambda \phi^4$$

in cui quindi il termine di interazione è $\mathcal{L}_I(x) = \lambda : \phi^4(x) :$. Considerato il processo di scattering fra due scalari $\phi(p_1)\phi(p_2) \to \phi(p_3)\phi(p_4)$, si dimostri che al primo ordine in teoria perturbativa si ha:

$$\langle f|S - 1|i\rangle = (2\pi)^4 \delta^4(p_3 + p_4 - p_1 - p_2)(i\lambda \times 4!)$$

Effettuata la sostituzione $\lambda \times 4! \to \lambda$, dimostrare che la sezione d'urto nel sistema del centro di massa ha la forma:

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2} \frac{|\mathbf{p}_f^{c.m.}|}{|\mathbf{p}_i^{c.m.}|} \frac{\lambda^2}{s} d\Omega$$

dove $|\mathbf{p}_f^{c.m.}|$ ($|\mathbf{p}_i^{c.m.}|$) è il modulo dell'impulso delle due particelle finali (iniziali). Ricordare che il sistema del centro di massa è quello in cui le componenti spaziali di $p_1 + p_2$ e $p_3 + p_4$ sono nulle.

Esercizio 3

Lo scattering Thomson è la diffusione di fotoni da elettroni tale che l'energia ω dei fotoni soddisfi $\omega \ll m$, con m massa dell'elettrone. Mettendosi nel sistema di riferimento del laboratorio, con elettrone inizialmente a riposo, mostrare che la variazione di energia del fotone prima e dopo lo scattering soddisfa $\omega - \omega' \sim \omega \frac{\omega}{m} \ll \omega$, ed è quindi giustificato assumere $\omega = \omega'$. Mostrare che invece il modulo della variazione dell'impulso del fotone prima ($\boldsymbol{k}$) e dopo ($\boldsymbol{k}'$) lo scattering è di ordine ω, ed è quindi significativamente diversa da zero. Il porre $\omega = \omega'$ ma $\boldsymbol{k} \neq \boldsymbol{k}'$ equivale a trascurare il rinculo dell'elettrone, ed è una tipica approssimazione nonrelativistica.

Considerare l'Hamiltoniana di interazione nonrelativistica radiazione-materia, ed in particolare il termine $e^2 \frac{\boldsymbol{A}^2}{2m}$. Mostrare che l'ampiezza al primo ordine non nullo è data da:

$$\langle \boldsymbol{k}', \epsilon_{p'}(\boldsymbol{k}')| e^2 \frac{\boldsymbol{A}^2(t, \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0})}{2m} |\boldsymbol{k}, \epsilon_p(\boldsymbol{k})\rangle = \frac{e^2}{2mV\sqrt{\omega\omega'}} \boldsymbol{\epsilon}_p(\boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{p'}(\boldsymbol{k}') e^{i(\omega-\omega')t}$$

(Nota: gli stati nonrelativistici sono $\frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\boldsymbol{kx}}$ quindi soddisfano $\langle \boldsymbol{k}|\boldsymbol{k}'\rangle = \frac{(2\pi)^3}{V}\delta^3(\boldsymbol{k} - \boldsymbol{k}')$ e quindi sono dati da $|\boldsymbol{k}\rangle = \sqrt{\frac{(2\pi)^3}{V}} a^\dagger(\boldsymbol{k})|0\rangle$).

La sezione d'urto è dunque proporzionale a $M_{pp'} = |\boldsymbol{\epsilon}_p(\boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{\epsilon}_{p'}(\boldsymbol{k}')|^2$. Calcolarne il valore $\overline{M_{pp'}}$ mediato sulle polarizzazioni iniziali (luce iniziale non polarizzata) e sommato su quelle finali (non si osserva la polarizzazione finale), esprimendolo in funzione dell'angolo θ fra $\boldsymbol{k}$ e $\boldsymbol{k}'$.

Si consideri ora luce iniziale non polarizzata (ad es. come quella che giunge dal sole) ma si fissi la polarizzazione finale; calcolare $\overline{|M_{pp'}|^2}$ in questo caso. Se l'angolo fra $\boldsymbol{k}$ e $\boldsymbol{k}'$ è $\pi/2$, come è polarizzata la luce uscente? Come devono essere polarizzate le lenti di un paio di occhiali da sole se voglio diminuire significativamente la luce che viene trasmessa all'occhio dopo essere stata riflessa dal terreno (o dal mare)? Si consideri il sole sulla verticale.