0.1 Integrali e derivate

Dare una definizione di $\frac{df(x)}{dx}$ e di $\int_a^b f(x)dx$. Dimostrare che integrale e derivata sono uno l'operazione inversa dell'altro, nel senso che:

$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(x')dx' = f(x) \qquad \int_a^x \frac{df(x')}{dx'}dx' = f(x) - f(a) \tag{1}$$

con a costante reale.

0.2 Esponenziale

Supponendo di definire un numero reale e tale che $\frac{d}{dx}e^x = e^x$, determinare una espressione per e utilizzando la serie di Taylor. Utilizzando l'espressione cosí ricavata, dare una approssimazione numerica per e con due cifre significative. Risolvere quindi l'equazione differenziale

$$\frac{dN(t)}{dt} = -\Gamma N(t) \qquad N(0) = N_0 \tag{2}$$

con Γ costante reale positiva.

0.3 Diagonalizzazione

Si consideri la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Trovare le matrici U unitaria e D diagonale tali che $U^\dagger AU = D$.

0.4 Prova del nove

Utilizzando lo sviluppo di Taylor per piccoli α, β, dire se la relazione:

$$\sin(\alpha - \beta) = -\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

puó essere giusta oppure e' sicuramente sbagliata. Quali altre "prove del nove" posso utilizzare?

0.5 Prodotto scalare e prodotto vettoriale

Utilizzando le proprietá del prodotto scalare, dimostrare la relazione $\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$. Tramite le proprietá del prodotto vettoriale, ricavare l'analoga relazione per $\sin(\alpha - \beta)$.

0.6 Sistemi di riferimento

Due sistemi di riferimento cartesiani (x, y) e (x', y') sono ruotati di un angolo θ uno rispetto all'altro. Trovare le relazioni $x'(x, y, \theta)$ e $y'(x, y, \theta)$. Invertire tali relazioni per trovare $x(x', y', \theta)$ e $y(x', y', \theta)$. Come mai le une si ottengono dalle altre tramite le trasformazioni $x \leftrightarrow x', y \leftrightarrow y', \theta \rightarrow -\theta$?

0.7 Motocicletta 10 HP

Una moto di massa $m = 200$ kg scende senza freni né motore da una collina ad una altezza $h = 100$ metri dal livello del mare. La sua velocitá iniziale e' v_i=100 km/h. Se non ci sono attriti, quale sará la sua velocitá v_f a livello del mare? Supponiamo ora che la moto scenda a ruote bloccate (un bell'esercizio di equilibrismo!). Se c'e' attrito con coefficiente $\mu_s = 0.5$ e la collina e' inclinata di 45 gradi, qual'e' la velocitá finale? Se la pendenza della collina aumenta, v_f aumenta o diminuisce? Trovare la generica espressione per v_f in funzione dell'inclinazione della collina.

0.8 Maltempo

Un tornado a Lecce ruota in senso orario o antiorario? E a Sidney?

0.9 Giro della morte

Si trascurino tutte le forme di attrito. Il solito pendolo formato da un filo di massa nulla e lunghezza l con un corpo puntiforme di massa m al suo estremo. Chiamiamo θ l'angolo fra la verticale e il filo. Sia v la velocita' del corpo nel punto piu' basso della traiettoria. Si determini il valore v_1 di v tale che il pendolo arrivi fino a $\theta = \frac{\pi}{2}$ e poi torni indietro. Si determini il valore minimo v_2 di v tale che la traiettoria del corpo sia circolare (il corpo fa il "giro della morte"). Supponiamo ora $v_1 \leq v \leq v_2$. Si determini, in funzione di v, l'angolo $\bar{\theta}$ tale che il corpo inizi a separarsi dalla traiettoria circolare. Dopo essersi staccato, che tipo di traiettoria segue il corpo? Determinare l'altezza massima raggiunta dal corpo in funzione di v (Suggerimento: conviene prima esprimere l'altezza max. in funzione di $\bar{\theta}$, poi esprimere $\bar{\theta}$ in funzione di v).

Discussione:

- Analisi dimensionale
- I risultati dipendono da m? Perché?
- Una volta trovata $\bar{\theta}(v)$, verificare il risultato nei casi particolari $v = v_1, v_2$
- Verificare che l'altezza massima in funzione di v sia corretta nei casi particolari $v = v_1, v_2$.
- *ad libitum*

0.10 Pendoli e numeri

L'equazione del moto del pendolo è:

$$\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = -\frac{mgr}{I}\sin\theta(t) \tag{3}$$

dove I è il momento di inerzia, m la massa e r la distanza del centro di massa dall'asse di rotazione. Si determini il cambiamento nella scala dei tempi tale che nella nuova variabile x definita da $x = \omega t$ l'equazione del moto si scriva $\frac{d^2\theta(x)}{dx^2} = -\sin\theta(x)$. Che dimensioni deve avere ω? E quanto vale in termini di m, I, r? L'equazione differenziale così ottenuta non è risolvibile analiticamente e va risolta numericamente. Lo si puó fare discretizzando la variabile x in passi ϵ, cioè supponendo che essa possa assumere solo i valori $x_n = n\epsilon$ con n intero. Supponendo che le condizioni iniziali siano $\theta(0) = A$, $\frac{d\theta}{dx}|_{x=0} = 0$, dimostrare che risolvere l'equazione differenziale del moto equivale approssimativamente a risolvere il sistema di equazioni:

$$\theta[(n+2)\epsilon] = -\epsilon^2\sin[\theta(n\epsilon)] - \theta(n\epsilon) + 2\theta[(n+1)\epsilon] \qquad \theta(0) = \theta(\epsilon) = A \tag{4}$$

Il problema ammette quindi una soluzione iterativa: Dati i valori di $\theta(0)$ e $\theta(\epsilon)$ determinati dalle condizioni iniziali, si determina $\theta(2\epsilon)$ utilizzando la (4) con $n = 0$. Col valore di $\theta(2\epsilon)$ così ricavato e col valore di $\theta(\epsilon)$ si determina $\theta(3\epsilon)$ utilizzando la (4) con $n = 1$, e così via. Scrivere un programmino che trovi la soluzione per $\theta(x)$, scegliendo ad esempio inizialmente un valore $\epsilon = 0.1$. Per determinare un valore di ϵ più accurato, si proceda nel modo seguente. Sappiamo che per A piccoli si ha $\sin\theta \approx \theta$ e la soluzione analitica è $\theta = A\cos x$. Si determini ϵ in modo che per $A = 0.1$ la soluzione numerica differisca in un periodo per non piú dell'1 % da quella analitica. Con il valore di ϵ così determinato si scriva un programma che tracci in un unico grafico gli andamenti della soluzione analitica e di quella numerica per $A = \frac{\pi}{2}$. Quale delle due soluzioni è più vicina a descrivere il vero moto del pendolo? Di quanto si discostano (circa) percentualmente le due soluzioni? Di quanto varia (circa) percentualmente il periodo del pendolo passando da $A = .1$ a $A = \frac{\pi}{2}$?