

Figura 1:

Esercizio 1

Due aste omogenee di massa m e lunghezza l sono incernierate fra loro in B ; gli altri estremi delle aste sono collegati da una molla di costante k e lunghezza a riposo nulla. L'estremo A della prima asta è vincolato da una cerniera fissa mentre il punto C dell'altra asta è vincolato a scorrere su di una guida orizzontale (vedi figura 1). Tutte le forme di attrito sono trascurabili. Detto θ l'angolo che l'asta AB forma con la guida orizzontale, e supposto che tale angolo possa variare fra 0 e 2π :

- Trovare, con il metodo del potenziale, le posizioni di equilibrio e discutere la loro esistenza al variare dei parametri del sistema.
- Discutere la stabilità dei punti di equilibrio al variare dei parametri del sistema.

Soluzione

L'energia potenziale del sistema ha una parte gravitazionale e una elastica, e si scrive:

$$U = 2\frac{l}{2}mg \sin \theta + \frac{1}{2}k(2l \cos \theta)^2 \quad (1)$$

da cui la derivata prima:

$$\frac{1}{mlg} \frac{\partial U}{\partial \theta} = \cos \theta \left(1 - 4 \frac{kl}{mg} \sin \theta\right) \quad (2)$$

I valori degli angoli in configurazione di equilibrio sono quindi $\theta_1 = \frac{\pi}{2}$, $\theta_2 = \frac{3\pi}{2}$ e θ_3 tale che $\sin \theta_3 = \frac{mg}{4kl}$, che esiste solo se $\frac{mg}{4kl} < 1$.

La derivata seconda si scrive:

$$\frac{1}{mlg} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = -4 \frac{kl}{mg} \cos^2 \theta + \sin \theta \left(4 \frac{kl}{mg} \sin \theta - 1\right) \quad (3)$$

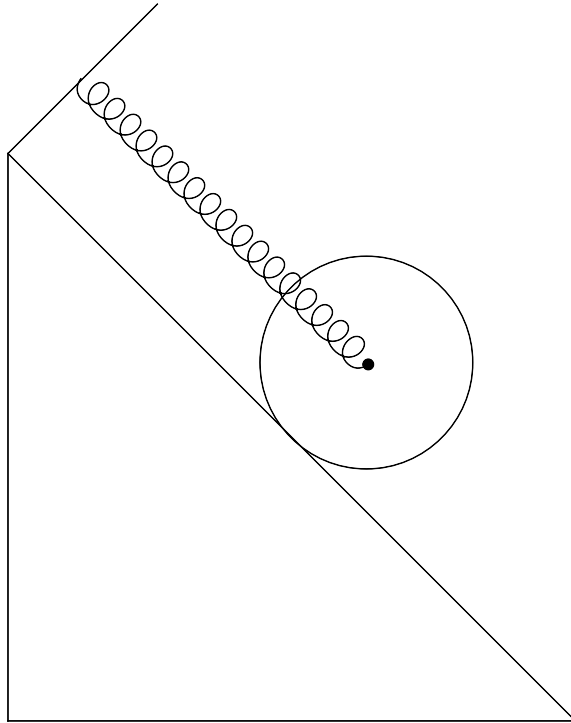


Figura 2:

Per $\theta = \theta_1 = \frac{\pi}{2}$ La derivata seconda vale $4 \frac{kl}{mg} - 1$ ed è positiva (equilibrio stabile) se $k > \frac{mg}{4l}$.
 Per $\theta = \theta_2 = \frac{3\pi}{2}$ La derivata seconda vale $1 + 4 \frac{kl}{mg}$ ed è sempre positiva (equilibrio stabile). Infine, per $\theta = \theta_3$ il secondo termine nella (3) vale 0 e la derivata seconda è sempre negativa (equilibrio instabile).

Esercizio 2

Su di un piano inclinato di un angolo $\frac{\pi}{4}$ rotola senza strisciare un disco di massa M e raggio R . Una molla parallela al piano inclinato e di costante k è collegata al baricentro del disco (vedi figura 2).

- Quanto vale l'allungamento della molla quando il sistema è in equilibrio?
- Scrivere le equazioni del moto del sistema
- Il sistema è inizialmente in quiete, con la molla in condizione di riposo: determinare dopo quanto tempo il sistema si ferma nuovamente (cioè la velocità è di nuovo nulla).