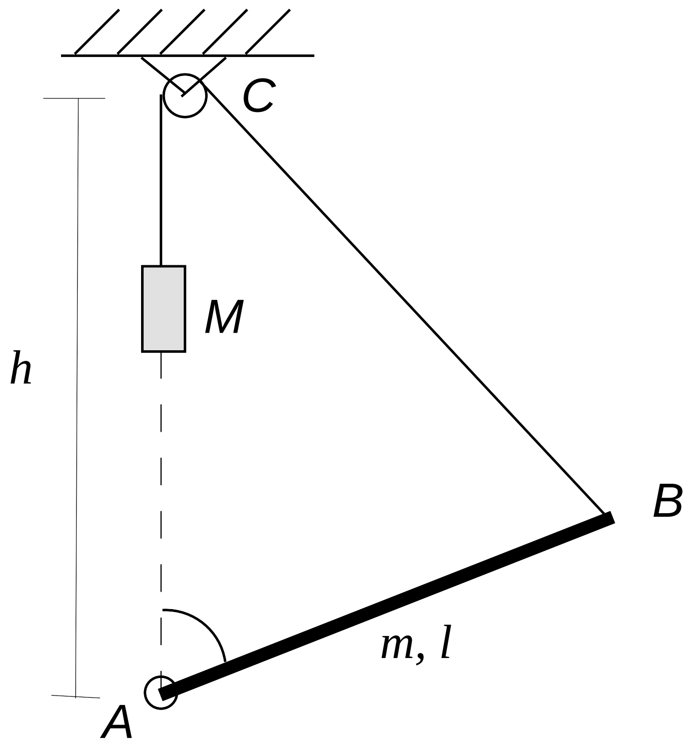

Figura 1:

Esercizio 1

L'estremità B di una sbarretta di massa m e lunghezza l è collegata tramite un filo inestensibile di massa trascurabile ad un oggetto di massa M (vedi figura 1). La carrucola C è di dimensioni e massa trascurabili e priva di attrito. L'altra estremità della sbarretta, A, è vincolata con una cerniera priva di attrito. Il punto A si trova sulla verticale del baricentro dell'oggetto di massa M; la distanza fra il punto A e la carrucola C è h (si supponga $h > l$). La sbarretta forma un angolo θ con la verticale. Si supponga che il sistema sia costriuto in modo tale da consentire ogni valore possibile per θ, ovvero $-\pi < \theta \leq \pi$.

- Utilizzando il principio dei lavori virtuali, si determini quanti e quali sono i valori di θ per i quali il sistema è in equilibrio. Si discuta la risposta al variare dei parametri del sistema.
- Si sviluppi in serie di Taylor al secondo ordine il potenziale vicino al punto θ =0 e si discuta la stabilità dell'equilibrio in tale punto al variare dei parametri del sistema.

Soluzione

Poichè la corda ha lunghezza fissa, la variazione di altezza dell'oggetto di massa M è pari alla variazione della lunghezza BC, per cui per una variazione di configurazione del sistema da un angolo θ a un angolo θ' si ha $\Delta U_M = U_M(\theta) - U_M(\theta') = Mg\Delta\, BC$. Quindi $U_M(\theta) = Mg\, BC+$costante[1]. A questo va aggiunto la parte di potenziale relativo alla sbarretta che è $U_m(\theta) = mgl/2\cos\theta$. Scrivendo BC in funzione dei parametri del sistema si ottiene:

$$U(\theta) = mg\frac{l}{2}\cos\theta + Mg\sqrt{h^2 + l^2 - 2hl\cos\theta} \tag{1}$$

da cui si ricavano derivata prima e seconda:

$$\frac{1}{gl}\frac{\partial U}{\partial\theta} = -\frac{m}{2}\sin\theta + \frac{Mh\sin\theta}{\sqrt{l^2 + h^2 - 2hl\cos\theta}} \tag{2}$$

$$\frac{1}{gl}\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} = -\frac{m}{2}\cos\theta + Mh\left(\frac{\cos\theta}{\sqrt{l^2 + h^2 - 2hl\cos\theta}} - \frac{hl\sin^2\theta}{(l^2 + h^2 - 2hl\cos\theta)^{\frac{3}{2}}}\right) \tag{3}$$

La derivata prima si annulla per $\sin\theta = 0$ cioè per $\theta = 0$ e $\theta = \pi$, e per $\theta = \bar\theta$ dove:

$$\cos\bar\theta = \frac{l^2 + h^2 - 4\frac{M^2}{m^2}}{2hl} \tag{4}$$

La richiesta che valga $|\cos\theta| \leq 1$ comporta:

$$1 - \frac{l}{h} \leq 2\frac{M}{m} \leq 1 + \frac{l}{h} \tag{5}$$

La derivata seconda del potenziale in $\theta = 0$ vale $-\frac{m}{2} + M\frac{h}{h-l}$ ed è positiva (stabilità) per $2\frac{M}{m} > 1 - \frac{l}{h}$.

Esercizio 2

Un disco omogeneo ha inizialmente un moto puramente traslatorio. Tutti i punti P del corpo si muovono quindi inizialmente con velocità parallela al suolo: $v_P(t=0) = v\,\forall\, P$ (vedi figura 2). Il disco prosegue poi il suo moto su un piano orizzontale con coefficiente di attrito dinamico μ.

- Si determini per quale istante $\bar t$ il disco inizia un moto di puro rotolamento.
- Si verifichi il teorema dell'energia cinetica considerando gli istanti $t = 0$ e $t = \bar t$.
- Si risponda alle stesse domande nel caso in cui il disco abbia densità bidimensionale $\rho(r) = Kr$, con r distanza dal centro del disco e K costante con dimensioni $kg\, m^{-3}$.

[1] si potrebbe anche osservare che la quota di M vale $h - L + BC$, con L lunghezza totale del filo

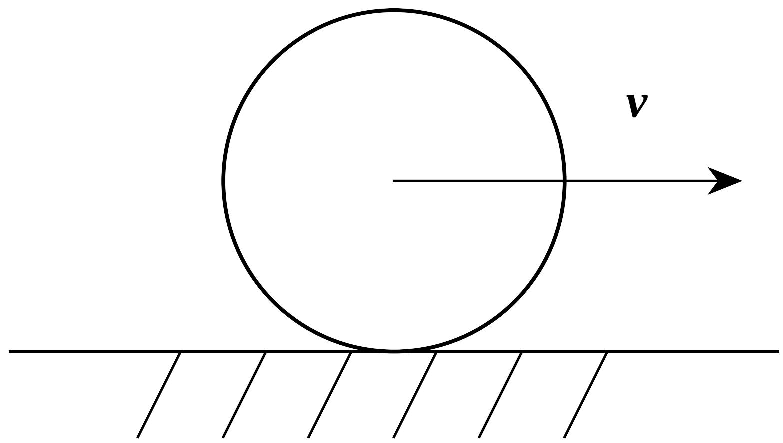

Figura 2:

Soluzione

Il punto Q di contatto fra suolo e disco si muove con velocità $v_Q(t) = v_G(t) - R\omega(t)$ dove G è il baricentro, R il raggio del disco e ω la sua velocità angolare (supposta positiva in senso orario). La forza di attrito è μMg e il suo momento $R\mu Mg$; il momento d'inerzia è $I = 1/2MR^2$. La prima equazione cardinale applicata al baricentro e la seconda equazione cardinale si risolvono, date le condizioni iniziali $v_G(0) = v, \omega(0) = 0$, come:

$$v_G(t) = v - \mu gt; \quad \omega(t) = \frac{2\mu g}{R}t \quad \Rightarrow \quad v_Q(t) = v - 3\mu gt \Rightarrow \bar{t} = \frac{v}{3\mu g} \tag{6}$$

dove $\bar{t}$ è stato ricavato imponendo la condizione di puro rotolamento $v_Q(\bar{t}) = 0$. Il lavoro infinitesimo fatto dalla forza d'attrito (negativo) è dato da $dL = -\mu MgdQ$ dove $dQ = v_Qdt$ e quello integrato fra $t = 0$ e $t = \bar{t}$ è quindi:

$$L = -\int_0^{\bar{t}} \mu gMv_Q(t)dt = -\mu gM \int_0^{\frac{v}{3\mu g}} (v - 3\mu gt) = -\frac{1}{6}Mv^2 \tag{7}$$

L'energia cinetica iniziale è $1/2Mv^2$ mentre quella finale è somma di quella traslazionale e di quella rotazionale all'istante $\bar{t}$, e vale $1/3Mv^2$. Si ottiene quindi $\Delta T = -1/6Mv^2 = L$

Se la densità è proporzionale a r distanza dal centro, si ottiene:

$$\frac{I}{MR^2} = \frac{\int d\theta \int r^4 dr}{\int d\theta \int r^2 dr} = \frac{3}{5} \tag{8}$$

Si ottiene in questo caso $\Delta T = -\frac{3}{16}Mv^2 = L$