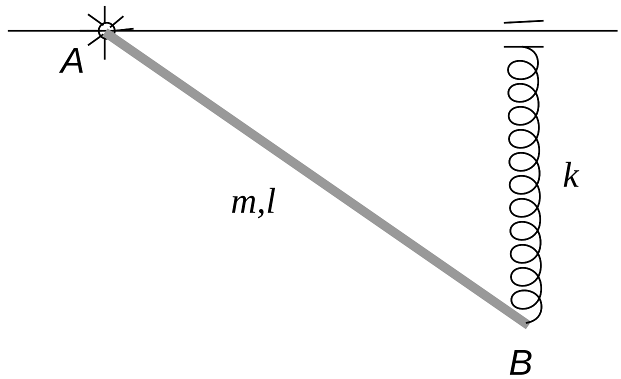


Figura 1:

# Esercizio 1

Un'asta omogenea di massa $m$ e lunghezza $2l$ è incernierata in A ad una guida orizzontale; sulla stessa guida scorre un estremo di una molla di costante $k$ e lunghezza a riposo nulla. L'altro estremo della molla è collegato all'estremo B dell'asta; la molla rimane quindi sempre in verticale (vedi figura 1). Tutte le forme di attrito sono trascurabili. Detto $\theta$ l'angolo che l'asta forma con la guida orizzontale:

- Trovare, con il metodo del potenziale, le posizioni di equilibrio e discutere la loro esistenza al variare dei parametri del sistema.
- Discutere la stabilità dei punti di equilibrio al variare dei parametri del sistema.

# Soluzione

L'energia potenziale del sistema ha una parte gravitazionale e una elastica, e si scrive:

$$U = -\frac{l}{2}mg\sin\theta + \frac{1}{2}kl^2\sin^2\theta \tag{1}$$

da cui la derivata prima:

$$\frac{2}{mlg}\frac{\partial U}{\partial\theta} = \cos\theta(2\frac{kl}{mg}\sin\theta - 1) \tag{2}$$

I valori degli angoli in configurazione di equilibrio sono quindi $\theta_1 = \frac{\pi}{2}, \theta_2 = \frac{3\pi}{2}$ e $\theta_3$ tale che $\sin\theta_3 = \frac{mg}{2kl}$, che esiste solo se $\frac{mg}{2kl} < 1$.

La derivata seconda si scrive:

$$\frac{2}{mlg}\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} = 2\frac{kl}{mg}\cos^2\theta - \sin\theta(2\frac{kl}{mg}\sin\theta - 1) \tag{3}$$

Per $\theta = \theta_1 = \frac{\pi}{2}$ La derivata seconda vale $1-2\frac{kl}{mg}$ ed è positiva (equilibrio stabile) se $mg > 2kl$. Per $\theta = \theta_2 = \frac{3\pi}{2}$ La derivata seconda vale $-1-2\frac{kl}{mg}$ ed è sempre negativa (equilibrio instabile). Infine, per $\theta = \theta_3$ il secondo termine nella (3) vale 0 e la derivata seconda è sempre positiva (equilibrio stabile).

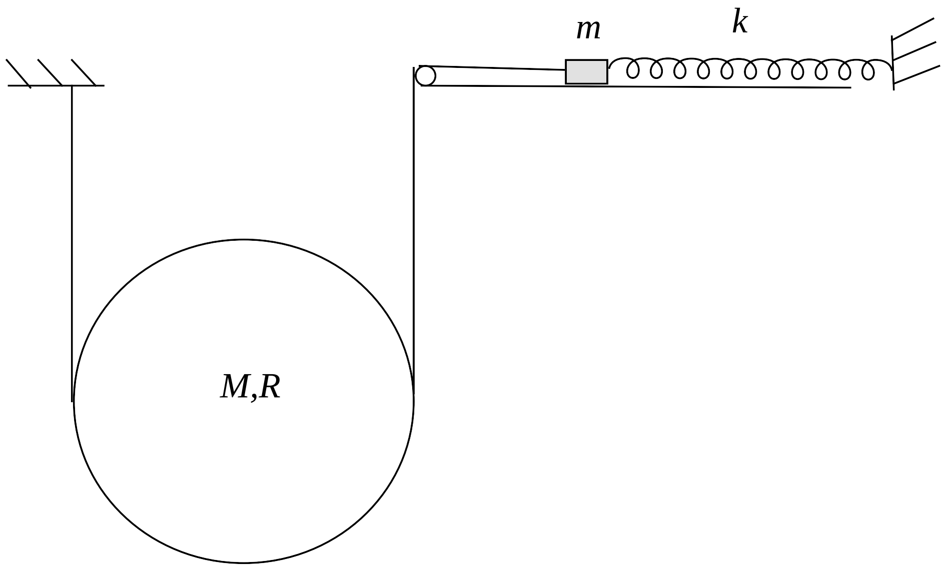


Figura 2:

# Esercizio 2

Nel sistema in figura 2 tutti gli attriti sono trascurabili.

- Quanto vale l'allungamento $x$ della molla quando il sistema è in equilibrio?
- Scrivere le equazioni del moto del sistema
- Il sistema è inizialmente in quiete, con la molla in condizione di riposo: determinare dopo quanto tempo il sistema si ferma nuovamente.

# Soluzione

All'equilibrio, poiché il disco è in quiete, le tensioni del filo a destra e sinistra del disco sono identiche. L'equilibrio delle forze impone $2T = Mg$ per il disco e $kx = T$ per la molla. Si ricava quindi $x = \frac{Mg}{2k}$.

Per ricavare le equazioni del moto, la cinematica impone $2R\dot{\theta} = \dot{x}$ essendo $\theta$ l'angolo di rotazione del disco misurato in senso orario. La seconda equazione cardinale per il disco è $\frac{3}{2}MR^2\ddot{\theta} = -2RT + MgR$; la prima equazione cardinale per il corpo di massa $m$ è $m\ddot{x} = -kx + T$. Notare che la seconda equazione cardinale è qui ottenuta considerando come polo il punto di tangenza fra il disco e la parte di sinistra del filo, rispetto al quale il disco compie un moto di puro rotolamento. Si può considerare anche il baricentro del disco come polo, ottenendo ovviamente gli stessi risultati (farlo per esercizio!). Infine, considerando tutte le equazioni viste in precedenza si ottengono le equazioni del moto:

$$(\frac{3}{8}M + m)\ddot{x} = \frac{Mg}{2} - kx \tag{4}$$

che ha come soluzione:

$$x(t) = \frac{Mg}{2k} + A\cos(\omega t + \phi); \qquad \omega = \sqrt{\frac{8k}{8m + 3M}} \tag{5}$$

con $A, \phi$ da determinare in base alle condizioni iniziali. Se il disco è inizialmente in quiete, tornerà ad arrestarsi ($\dot{x} = 0$) dopo metà del periodo, cioè $\frac{\pi}{\omega}$.