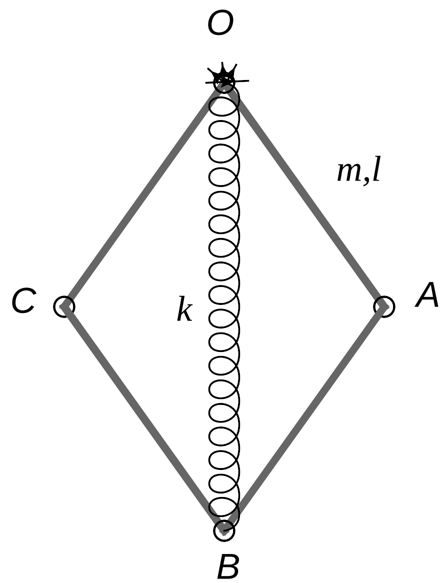

Figura 1:

Esercizio 1

Il rombo di figura 1 è costituito da 4 aste omogenee identiche di massa m e lunghezza l, e da una molla di lunghezza a riposo nulla e costante elastica k. La cerniera in O è vincolata ad un muro verticale; ogni forma di attrito è trascurabile. Si supponga che B possa stare sia al di sotto che al di sopra di O.

- Utilizzando il metodo del potenziale, determinare le configurazioni di equilibrio del sistema e discuterle al variare dei paramentri m, l, k.
- Discutere le stabilità delle configurazioni di equilibrio ricavate al punto precedente al variare dei parametri. Si supponga $mg \neq kl$.

Soluzione

Scelto come grado di libertà l'angolo θ tale che 2 θ sia l'angolo formato tra OA e OC, l'energia potenziale è la somma delle energie potenziali gravitazionali delle 4 aste e di quella elastica della molla:

$$U(\theta) = -2(mg\frac{l}{2} + mg\frac{3l}{2})\cos\theta + \frac{1}{2}k(2l\cos\theta)^2 = lmg(-4\cos\theta + \frac{kl}{mg}\cos^2\theta) \tag{1}$$

Le derivate prima e seconda, divise per il numero positivo $4mlg$, sono:

$$\frac{1}{4mlg}\frac{\partial U(\theta)}{\partial\theta} = \sin\theta - \frac{kl}{mg}\sin\theta\cos\theta \tag{2}$$

$$\frac{1}{4mlg}\frac{\partial^2 U(\theta)}{\partial\theta^2} = \cos\theta + \frac{kl}{mg}(1 - 2\cos^2\theta) \tag{3}$$

Si hanno quindi tre configurazioni di equilibrio, per $\sin\theta = 0$ ($\theta_1 = 0$ e $\theta_2 = \pi$) e per $\cos\theta_3 = \frac{mg}{kl}$. Affinché quest'ultima esista deve essere $mg < kl$.

Per la stabilità, studiando il segno della derivata seconda del potenziale si trova che θ_1 è stabile se $mg > kl$ (instabile altrimenti), θ_2 è sempre instabile e θ_3 sempre stabile.

Esercizio 2

Una motocicletta con pilota è schematizzabile nel modo seguente. Le due ruote sono identiche e hanno ciascuna momento d'inerzia I e raggio R. La massa del sistema moto-pilota-ruote è M ed il suo baricentro G è ad altezza h dal suolo mentre la verticale per G è a distanza l dal punto di contatto A della ruota posteriore col suolo (vedi figura 2). Il motore fornisce alla ruota posteriore una coppia di valore assoluto τ e con direzione entrante nel foglio.

- Supponendo che entrambe le ruote compiano un moto di puro rotolamento, determinare il valore della accelerazione a del sistema in funzione della coppia τ (*suggerimento: applicare la seconda equazione cardinale a ciascuna delle due ruote e la prima equazione cardinale al sistema complessivo).*
- Determinare il valore massimo τ_M della coppia fornita dal motore tale che la moto inizi ad 'impennare', cioè la ruota anteriore inizi a distaccarsi dal suolo. In tali condizioni, determinare per quali valori del coefficiente di attrito statico μ_s viene soddisfatta la condizione di puro rotolamento.

Soluzione

Con riferimento alla figura 3, sia a l'accelerazione del sistema e w la velocità angolare delle due ruote, con il verso positivo in senso orario. La relazione cinematica è $a = R\dot{\omega}$. La prima equazione cardinale si scrive $Ma = F_A - F_B$. La seconda equazione cardinale per la ruota anteriore si scrive $I\dot{\omega} = RF_B$ e quella per la ruota posteriore $I\dot{\omega} = \tau - RF_A$. Mettendo insieme le equazioni si ricava:

$$a = \frac{\tau}{MR + 2\frac{I}{R}} \tag{4}$$

Nel sistema del punto di istantanea rotazione della ruota posteriore (punto A), le forze sul piano orizzontale non hanno momento e la reazione normale in B è nulla quando la ruota anteriore inizia a sollevarsi. Rispetto al polo A hanno quindi momento solo la gravità e la forza apparente Ma applicata al baricentro G. Uguagliando i due momenti si ha :

$$M_A = hMa - lMg = 0 \Rightarrow a_M = \frac{\tau_M}{MR + 2\frac{I}{R}} = g\frac{l}{h} \Rightarrow \tau_M = MgR\frac{l}{h}(1 + 2\frac{I}{MR^2}) \tag{5}$$

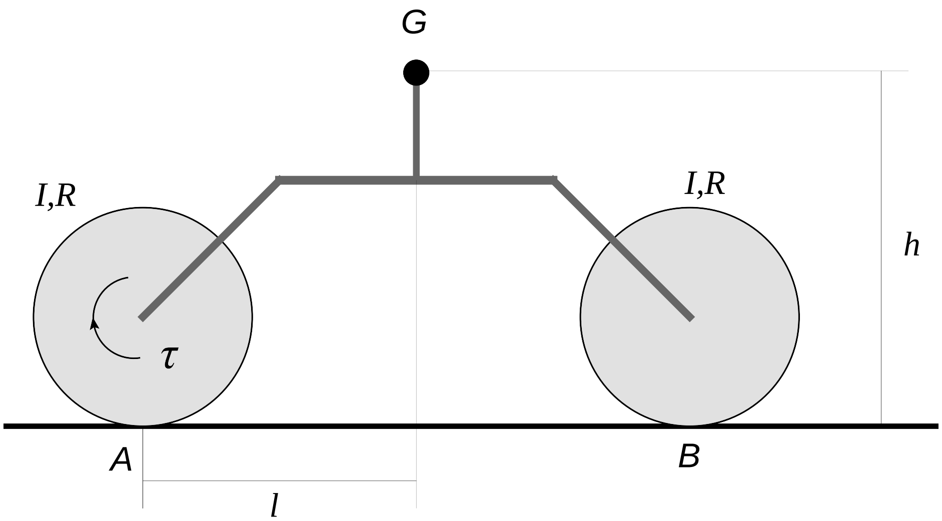

Figura 2:

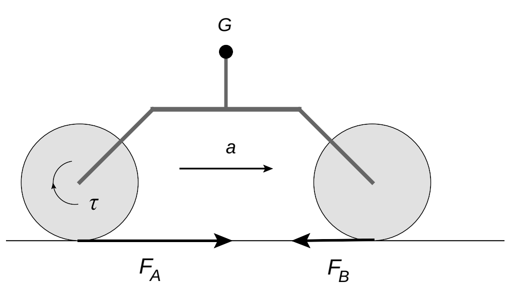

Figura 3: