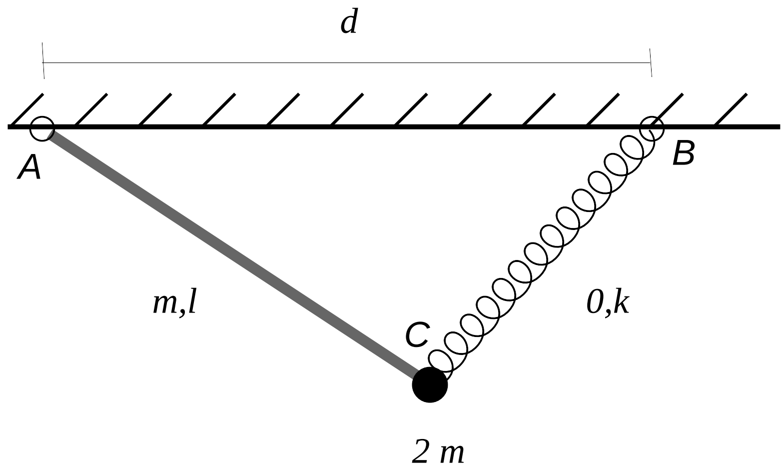

Figura 1:

Esercizio 1

Nel sistema in figura 1 l'asta omogenea di massa m e lunghezza l ha una sferetta di massa $2m$ attaccata alla sua estremità. La molla ha massa e lunghezza di riposo nulle e costante elastica k. Una estremità della molla, una estremità dell'asta e la sferetta di massa $2m$ sono incernierati nello stesso punto C. La distanza fra i due punti, A e B, in cui molla ed asta sono incernierati al soffitto è pari a d. Si suppongano m, d, k, l non nulli. Quanti sono i gradi di libertà del sistema?

- Una volta scelto un numero di parametri pari al numero di gradi di libertà, si determinino le configurazioni di equilibrio utilizzando il metodo del potenziale. Si studi poi la stabilità dell'equilibrio al variare dei parametri.
- Utilizzando le equazioni cardinali, si determinino le reazioni vincolari in A e in B nella configurazione di equilibrio.

Soluzione

Il sistema ha 1 grado di libertà, che può essere scelto come l'angolo θ fra il soffitto e l'asta. Scelto un sistema di riferimento con il versore $\hat{i}$ in orizzontale e il versore $\hat{j}$ in verticale, si ha $\overline{CB} = \hat{i}(d - l\cos\theta) + \hat{j}l\sin\theta$. La lunghezza quadrata della molla è quindi data da $\overline{CB}^2 = (d-l\cos\theta)^2 + l^2\sin^2\theta = d^2+l^2-2dl\cos\theta$; tale espressione è valida qualunque sia il segno di $d-l\cos\theta$. Il baricentro del sistema asta-sferetta è a $\frac{5}{6}l$ dall'estremità, per cui l'energia potenziale, a meno di una costante irrilevante, è data da:

$$U(\theta) = -\frac{5}{2}mgl\sin\theta - kdl\cos\theta \tag{1}$$

e derivata prima e seconda sono:

$$\frac{1}{l}\frac{\partial U}{\partial \theta} = -\frac{5}{2}mg\cos\theta + kd\sin\theta; \qquad \frac{1}{l}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = \frac{5}{2}mg\sin\theta + kd\cos\theta \tag{2}$$

L'equilibrio si ha quindi per $\theta = \bar{\theta}$ con $\tan\bar{\theta} = \frac{5mg}{2kd} > 0$. Si ha quindi $0 < \bar{\theta} < \frac{\pi}{2}$, i valori fra $\frac{\pi}{2}$ e π essendo esclusi perchè danno luogo a valori negativi per la tangente. Per $\theta = \bar{\theta}$ si ha $\frac{1}{l}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = \cos\bar{\theta}(\frac{(\frac{5}{2}mg)^2+(kd)^2}{kd})$, che è sempre positivo dato che $0 < \bar{\theta} < \frac{\pi}{2}$. Il punto di equilibrio è quindi stabile per qualunque valore dei parametri.

Per calcolare le reazioni in A e B, consideriamo il sistema asta-molla. Indicate con Φ_x^A, Φ_y^A le componenti della reazione in A lungo gli assi orizzontale x e verticale y, le equazioni cardinali (scegliendo A come polo) si scrivono:

$$\Phi_x^A + \Phi_x^B = 0; \qquad \Phi_y^A + \Phi_y^B = 3mg; \qquad \frac{5}{2}mgl\cos\theta = d\,\Phi_y^B \tag{3}$$

Queste costituiscono un sistema di 3 equazioni in 4 incognite, e sono quindi insufficienti. Per ottenere una equazione in più si può considerare ad esempio l'equilibrio della molla separatamente. Poiché la molla è priva di massa, l'unico modo di ottenere equilibrio è che le reazioni vincolari sulla molla in C (dovuta all'asta) e in B (dovuta al soffitto) formino una coppia di forze di momento nullo. Inoltre la molla esercita sul soffitto una forza elastica $\bar{F} = -k\overline{CB}$; per il principio di azione e reazione se ne deduce che la reazione in B è $\overline{\Phi^B} = k\overline{CB} = \hat{\imath}k(d - l\cos\theta) + \hat{\jmath}kl\sin\theta$. Aggiungendo quest'ultima alle precedenti equazioni si ottiene:

$$\tan\bar{\theta} = \frac{5mg}{2kd}; \qquad \Phi_y^B = kl\sin\bar{\theta} = \frac{5klmg}{\sqrt{25m^2g^2 + 4k^2d^2}}; \qquad \Phi_y^A = 3mg - \frac{5klmg}{\sqrt{25m^2g^2 + 4k^2d^2}} \tag{4}$$

$$\Phi_x^B = -\Phi_x^A = k(d - l\cos\bar{\theta}) = kd - \frac{2k^2dl}{\sqrt{25m^2g^2 + 4k^2d^2}}; \tag{5}$$

Esercizio 2

Nel sistema in figura 2 i corpi 1 e 2 hanno masse m_1, m_2 e la carrucola C ha momento d'inerzia I e raggio R. Il piano su cui poggia il corpo 1 è inclinato di $\frac{\pi}{4}$, ed è scabro con coefficiente d'attrito dinamico pari a quello statico $\mu_d = \mu_s \equiv \mu$.

- Si determini il valore minimo μ_{min} tale che per $\mu > \mu_{min}$ il sistema, posto inizialmente in quiete, continua a rimanervi (cioè il sistema è in equilibrio).

Si supponga ora che sia $m_1 = m_2 = m$ e $\mu < \mu_{min}$ e che il sistema sia in quiete all'istante $t = 0$. Si supponga inoltre che l'attrito fra carrucola e filo sia tale da avere un moto relativo di puro rotolamento (non c'è strisciamento).

- Determinare e risolvere le equazioni del moto.

- Verificare il teorema dell'energia cinetica prendendo come istante iniziale $t = 0$ e come istante finale quello in cui il corpo 2 ha percorso un tratto l.

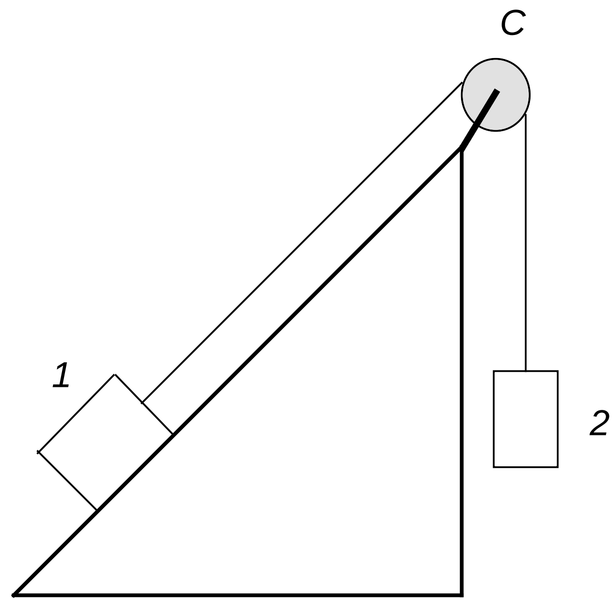

Figura 2:

Soluzione

Le forze sono come in figura 3 (sono omesse le forze di gravità). Nel caso statico $T_1 = T_2 \equiv T$ e le equazioni di equilibrio sono:

$$\frac{m_1 g}{\sqrt{2}} + F_a = T = m_2 g \quad \Rightarrow \quad F_a = g(m_2 - \frac{m_1}{\sqrt{2}}) \tag{6}$$

La condizione sull'attrito statico impone:

$$|F_a| = g|m_2 - \frac{m_1}{\sqrt{2}}| \leq \mu \frac{m_1 g}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad \mu \geq |\sqrt{2}\frac{m_2}{m1} - 1| = \mu_{min} \tag{7}$$

Nel caso dinamico invece, scegliamo per la carrucola $\dot{\theta} > 0$ in senso orario, e le accelerazioni dei corpi 1 e 2 in maniera coerente con questa scelta. I vincoli cinematici impongono $a_1 = a_2 = a$ e $a = \ddot{\theta} R$. Le equazioni della dinamica nel caso $m_1 = m_2 = m$ si scrivono:

$$ma = mg - T_2; \qquad ma = T_1 - \frac{mg}{\sqrt{2}} - \mu\frac{mg}{\sqrt{2}} \qquad \frac{I}{R^2} a = T_2 - T_1 \tag{8}$$

Sommando le tre equazioni si ottiene facilmente:

$$a = g\frac{1 - \frac{1+\mu}{\sqrt{2}}}{2 + \frac{I}{mR^2}} \tag{9}$$

Per quanto riguarda il moto del sistema, chiamiamo $x_1(t)$ la coordinata del corpo 1 lungo il piano inclinato, $x_2(t)$ quella del corpo 2 lungo l'asse verticale e $\theta(t)$ l'angolo che definisce la posizione della

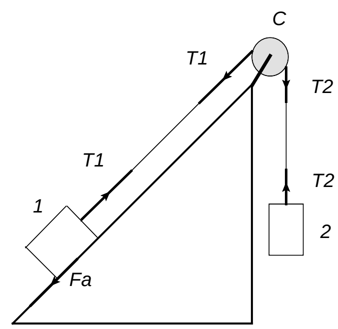

Figura 3:

carrucola, con i segni scelti in base a quanto detto sopra per le accelerazioni e con $x_1(0) = x_2(0) = \theta(0) = 0$. I vincoli cinematici impongono allora $x_1(t) = x_2(t) \equiv x(t) = \theta(t)R$. L'accelerazione è costante per cui il moto è uniformemente accelerato: $x(t) = \frac{1}{2}at^2$. Dopo aver percorso un tratto l il corpo 2 ha acquisito una velocità $v_l = \sqrt{2al}$ e il sistema ha energia cinetica:

$$2\,\frac{1}{2}mv_l^2 + \frac{1}{2}I\omega_l^2 = mal(2 + \frac{I}{mR^2}) = mgl(1 - \frac{1+\mu}{\sqrt{2}}) \tag{10}$$

avendo utilizzato il valore di a che si ottiene dalla (9).

Per quanto riguarda il lavoro delle forze, occorre notare che il lavoro totale delle tensioni è nullo a causa del principio di azione e reazione. Ad esempio il lavoro di T_1 sul corpo 1 è uguale e opposto a quello di $-T_1$ sulla carrucola in quanto la cinematica impone spostamenti infinitesimi identici per 1 e C. Le uniche forze che fanno lavoro sono quindi la gravità e l'attrito. Il lavoro della gravità è positivo su 2, che scende, e vale mgl. La gravità fa invece lavoro negativo con valore $-\frac{mgl}{\sqrt{2}}$ sul corpo 1. Infine il lavoro dell'attrito, che è $-\mu\frac{mgl}{\sqrt{2}}$. Sommando i 3 contributi si ottiene una espressione identica alla variazione di energia cinetica data dalla (10).