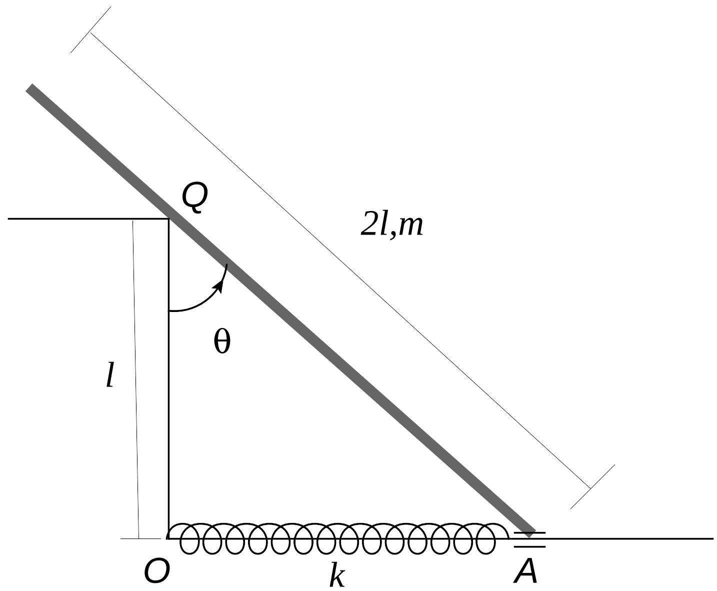

Figura 1:

Esercizio 1

Un'asta omogenea di massa m e lunghezza $2l$ è appoggiata sullo spigolo Q e ha l'estremo A vincolato a scorrere lungo una guida orizzontale. L'estremo A è collegato al punto O tramite una molla di lunghezza a riposo nulla e costante elastica k. Lo spigolo Q sta sulla verticale di O, a distanza l da esso (vedi figura 1). Tutte le forme di attrito sono trascurabili.

- Determinare gli angoli θ_{min} e θ_{max} entro i quali può variare l'angolo θ.
- Trovare, con il metodo del potenziale, la posizione di equilibrio $\bar{\theta}$ e discutere per quali valori dei parametri del sistema si ha $\theta_{min} < \bar{\theta} < \theta_{max}$.
- Discutere la stabilità del punto di equilibrio al variare dei parametri del sistema.

Soluzione

Si ha $\theta_{min} = 0$ mentre l'angolo massimo viene raggiunto quando l'estremo superiore dell'asta coincide con Q, e vale $\theta_{max} = \frac{\pi}{3}$. L'energia potenziale è somma della parte gravitazionale e di quella elastica, e si scrive:

$$U = mgl(\cos\theta + \frac{kl}{mg}\tan^2\theta) \Rightarrow \frac{1}{mgl}\frac{\partial U}{\partial\theta} = \sin\theta(\frac{mg}{kl}\frac{1}{\cos^3\theta} - 1) \tag{1}$$

Uguagliando a zero la derivata si trova che l'angolo di equilibrio soddisfa $\cos\theta_{eq} = (\frac{kl}{mg})^{\frac{1}{3}}$ (le soluzioni tali che $\sin\theta = 0$ sono escluse dalla richiesta $0 < \theta < \frac{\pi}{3}$). Affinchè quest'angolo sia compreso fra 0 e

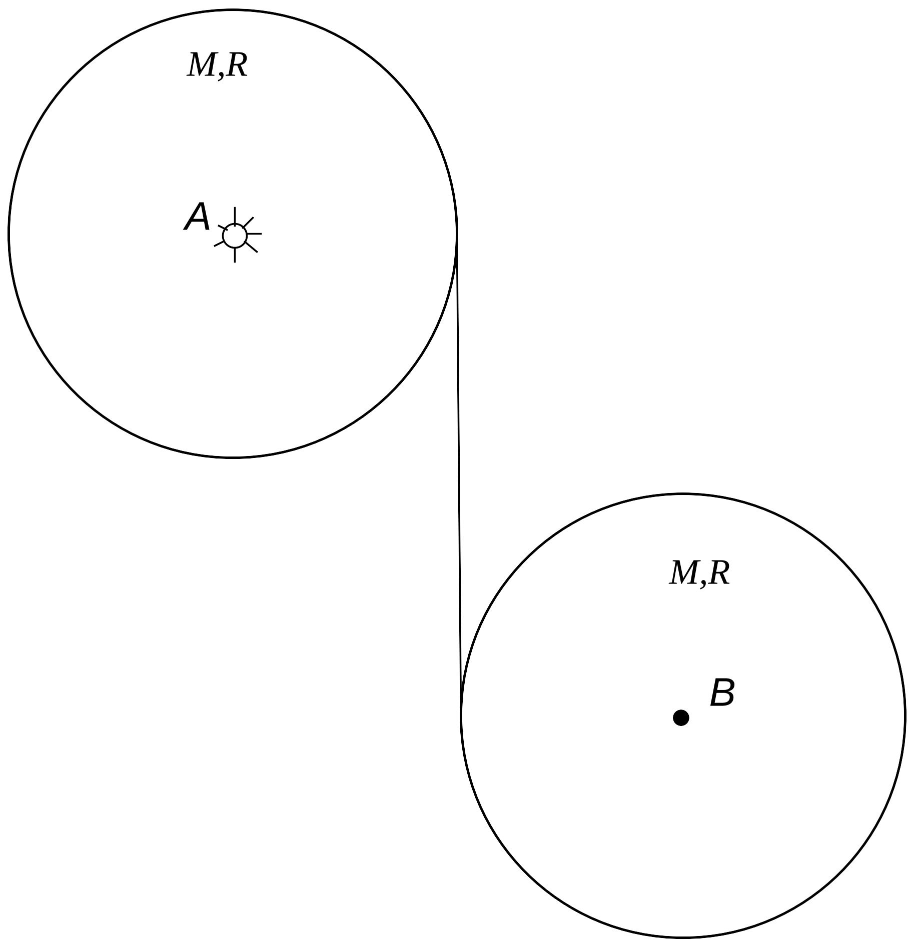

Figura 2:

$\frac{\pi}{3}$ deve valere $\frac{1}{8} < \frac{kl}{mg} < 1$. La derivata seconda si scrive:

$$\frac{1}{mgl}\frac{\partial^2 U}{\partial\theta^2} = \cos\theta(\frac{mg}{kl}\frac{1}{\cos^3\theta} - 1) + 3\frac{mg}{kl}\frac{\sin^2\theta}{\cos^4\theta} \tag{2}$$

Il primo termine è 0 per $\theta = \theta_{eq}$ mentre il secondo è definito positivo: l'equilibrio è quindi sempre stabile.

Esercizio 2

In un piano verticale due dischi, di ugual massa M e raggio R, uno con centro fisso (il disco A in figura 2) e l'altro con centro mobile (il disco B), sono collegati da un filo che si avvolge su entrambi. Ogni forma di attrito è trascurabile.

All'istante $t = 0$, il sistema è in quiete.

- Determinare dopo quanto tempo T i dischi compiono un giro.
- Verificare che l'energia meccanica si conserva, cioè è la stessa per $t = 0$ e per $t = T$.

Soluzione

Detti θ_A l'angolo di rotazione del disco A in senso orario e θ_B l'analoga quantità per il disco B, e detta a_B l'accelerazione verso il basso del disco B, la cinematica impone $a_B = R(\ddot{\theta}_A + \ddot{\theta}_B)$. La prima equazione della dinamica si scrive $Ma_B = Mg - T$; la seconda equazione della dinamica si scrive $\frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta}_A = TR$ per il disco A e $\frac{1}{2}MR^2\ddot{\theta}_B = TR$ per il disco B. Risolvendo si ottiene un moto uniformemente accelerato con $\ddot{\theta}_A = \ddot{\theta}_B = \frac{2}{5}\frac{g}{R}$. Si ricava quindi che i dischi compiono un giro dopo un tempo $t = \sqrt{\frac{10\pi R}{g}}$.