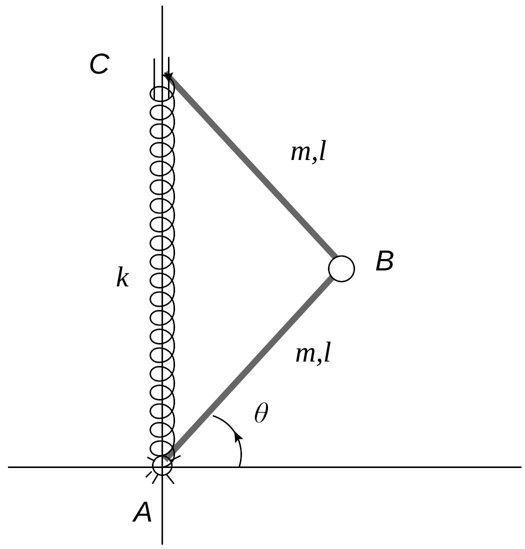

Figura 1:

Esercizio 1

Due aste omogenee di massa m e lunghezza l sono incernierate fra loro in B; l'estremo A della prima asta è vincolato da una cerniera fissa mentre il punto C dell'altra asta è vincolato a scorrere su di una guida verticale (vedi figura 1). Le aste sono collegate fra loro da una molla di costante k e lunghezza a riposo $2l_0$. Tutte le forme di attrito sono trascurabili. Detto θ l'angolo che l'asta AB forma con la guida verticale:

- Trovare, con il metodo del potenziale, il valore di l_0 tale che l'angolo $\theta = \frac{\pi}{4}$ sia di equilibrio
- Con il valore di l_0 fissato al punto precedente discutere la stabilità del punto di equilibrio.

Soluzione

L'energia potenziale del sistema ha una parte gravitazionale e una elastica, e si scrive:

$$U = 2mgl\sin\theta + \frac{1}{2}k(2l\sin\theta - 2l_0)^2 \tag{1}$$

da cui la derivata prima:

$$\frac{1}{2mlg}\frac{\partial U}{\partial \theta} = \cos\theta(1 + \frac{2k}{mg}(l\sin\theta - l_0)) \tag{2}$$

La condizione di equilibrio in $\theta = \frac{\pi}{4}$ si scrive:

$$1 + \frac{2k}{mg}(\frac{l}{\sqrt{2}} - l_0) = 0 \Rightarrow l_0 = \frac{l}{\sqrt{2}} + \frac{mg}{2k}$$

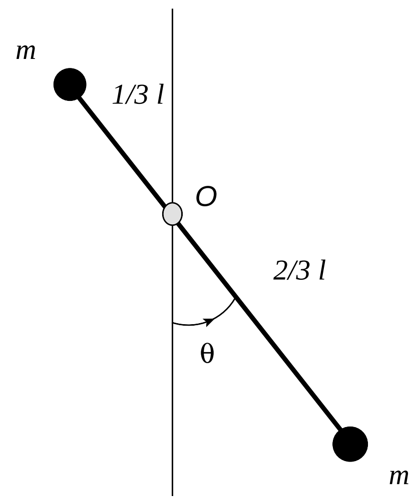

Figura 2:

La derivata seconda nel punto di equilibrio si scrive:

$$\frac{1}{2mlg}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}|_{\theta=\frac{\pi}{4}} = \frac{kl}{mg} > 0 \tag{3}$$

Il punto $\theta = \frac{\pi}{4}$ è quindi di equilibrio stabile.

Esercizio 2

Il pendolo di figura 2 è composto da un'asta di lunghezza l e massa trascurabile agli estremi della quale sono fissate due masse m uguali. L'asta è vincolata in un punto O che divide l'asta in due segmenti di lunghezza pari a $\frac{1}{3}l$ e $\frac{2}{3}l$.

- Trovare i valori di equilibrio per l'angolo θ che il pendolo forma con la verticale
- Scrivere le equazioni del moto
- Nel caso di piccole ocillazioni intorno al punto di equilibrio stabile, trovare la frequenza di oscillazione del pendolo.

Soluzione

I valori di equilibrio sono $\theta = 0$ (stabile) e $\theta = \pi$ (instabile). Le equazioni del moto sono date da $I\ddot{\theta} = M$ con $I = ml^2(\frac{4}{9} + \frac{1}{9})$ e $M = -\frac{2}{3}mgl\sin\theta + \frac{1}{3}mgl\sin\theta$ da cui $\ddot{\theta} = -\frac{3}{5}\frac{g}{l}\sin\theta$. Per piccole oscillazioni $\sin\theta \approx \theta$ e:

$$\ddot{\theta} = -\frac{3}{5}\frac{g}{l}\theta \Rightarrow \omega^2 = \frac{3g}{5l} \Rightarrow f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{3g}{5l}}$$