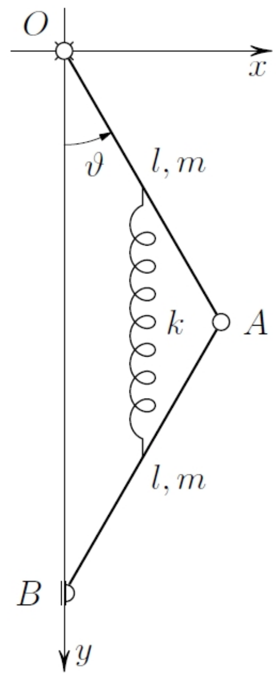

Figura 1:

Esercizio 1

Due aste omogenee di massa m e lunghezza l sono incernierate fra loro in A; le aste sono collegate fra loro, a metà lunghezza, da una molla di costante k e lunghezza a riposo nulla. L'estremo O della prima asta è vincolato da una cerniera fissa mentre il punto B dell'altra asta è vincolato a scorrere su di una guida verticale (vedi figura 1). Tutte le forme di attrito sono trascurabili. Detto θ l'angolo che l'asta AO forma con la guida verticale:

- Trovare, con il metodo del potenziale, il valore di k tale che l'angolo $\theta = \frac{\pi}{4}$ sia di equilibrio
- Con il valore di k fissato al punto precedente discutere la stabilità del punto di equilibrio.

Soluzione

Chiamati 1 e 2 i punti in cui la molla è fissata alle due aste, si ha $y_1 = \frac{l}{2}\cos\theta$ e $y_2 = \frac{3l}{2}\cos\theta$. L'energia potenziale del sistema ha una parte gravitazionale e una elastica, e si scrive:

$$U = -2mgl\cos\theta + \frac{1}{2}k(l\cos\theta)^2 \tag{1}$$

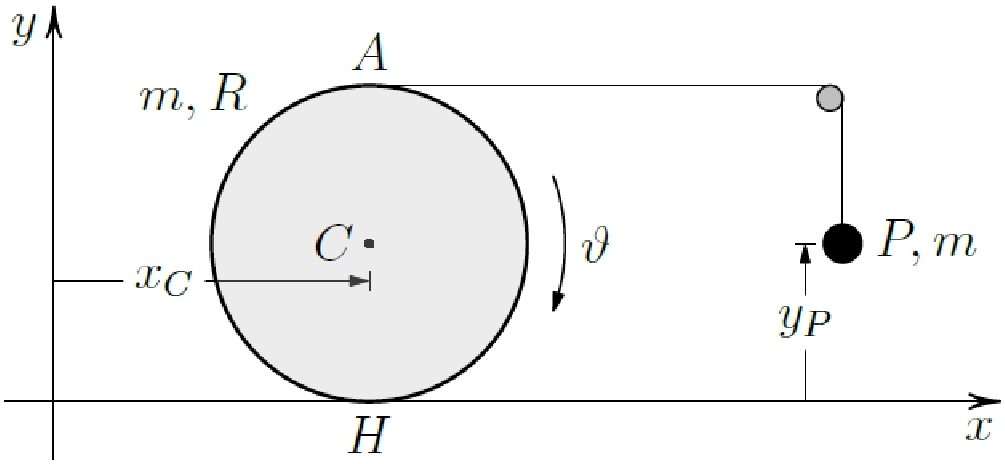

Figura 2:

da cui la derivata prima:

$$\frac{1}{mlg}\frac{\partial U}{\partial \theta} = \sin\theta(2 - \frac{kl}{mg}\cos\theta) \tag{2}$$

La condizione di equilibrio in $\theta = \frac{\pi}{4}$ si scrive:

$$\cos\theta_{eq} = \frac{2mg}{kl} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow k = \frac{2\sqrt{2}mg}{kl}$$

La derivata seconda nel punto di equilibrio si scrive:

$$\frac{1}{mlg}\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} = \sin\theta_{eq}(\frac{kl}{mg}\cos\theta_{eq}) = \sqrt{2} > 0 \tag{3}$$

Il punto $\theta = \frac{\pi}{4}$ è quindi di equilibrio stabile.

Esercizio 2

Il sistema di figura 2 si compone di un disco omogeneo di raggio R e massa m e di un contrappeso P di massa M. Il disco rotola senza strisciare su un piano orizzontale. Il punto P è fissato ad un estremo di un filo inestensibile e massa trascurabile che si avvolge senza strisciare sulla circonferenza del disco e si appoggia senza attrito su un piolo fisso posto ad altezza $2R$ dal suolo.

- Trovare i legami cinematici fra le coordinate θ, x_C, y_P indicate in figura
- Trovare il moto del sistema, cioé scrivere le equazioni del moto e risolverle
- Scrivere l'energia cinetica del sistema.

Soluzione

Per via del moto di puro rotolamento si ottiene:

$$\dot{x}_c = R\dot{\theta}; \quad \dot{y}_P = -2R\dot{\theta} = -2\dot{x}_c$$

La prima equazione cardinale applicata al contrappeso e la seconda equazione cardinale applicata al disco, chiamata T la tensione del filo, si scrivono:

$$\frac{3}{4}mR^2\ddot{\theta} = TR$$

$$m\ddot{y}_P = -mg + T$$

Utilizzando i vincoli cinematici sopra scritti ed eliminando T dalle due equazioni si ottiene:

$$\frac{11}{4}R\ddot{\theta} = g \Rightarrow \theta(t) = \theta_0 + \dot{\theta}_0 t + \frac{2}{11}\frac{g}{R}t^2$$

Con $\theta_0, \dot{\theta}_0$ da determinarsi in base alle condizioni iniziali. L'energia cinetica, somma dell'energia cinetica del contrappeso P e dell'energia di rotolamento del disco, è:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m(\dot{y}_P)^2 + \frac{1}{2}\frac{3}{2}mR^2(\dot{\theta})^2 = \frac{11}{4}mR^2(\dot{\theta})^2$$