

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DEL SALENTO

---

Facoltà di scienze Matematiche, Fisiche e Naturali  
Corso di laurea in Fisica

# Aspetti introduttivi della teoria di stringa classica e quantistica

*Relatore*

Dott. Claudio Corianò

*Laureando*

Mirko Serino

---

ANNO ACCADEMICO 2007 - 2008

# Indice

|                                                                        |           |
|------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introduzione</b>                                                    | <b>3</b>  |
| <b>1 La corda vibrante in meccanica classica</b>                       | <b>7</b>  |
| 1.1 Trattazione elementare . . . . .                                   | 7         |
| 1.1.1 Derivazione dell'equazione d'onda . . . . .                      | 7         |
| 1.1.2 Condizioni iniziali e ai limiti . . . . .                        | 9         |
| 1.1.3 Soluzione dell'equazione d'onda . . . . .                        | 10        |
| 1.2 Formulazione Lagrangiana del problema . . . . .                    | 11        |
| 1.2.1 Richiami sul principio variazionale . . . . .                    | 11        |
| 1.2.2 Risultati del principio variazionale . . . . .                   | 13        |
| 1.3 Implicazioni delle condizioni ai limiti . . . . .                  | 15        |
| <b>2 L'azione e le equazioni del moto per la stringa relativistica</b> | <b>16</b> |
| 2.1 Il funzionale-area per le superfici in $\mathbb{R}^3$ . . . . .    | 16        |
| 2.2 Cambiamenti ammissibili di parametri . . . . .                     | 17        |
| 2.3 Funzionale-area per superfici nello spazio-tempo . . . . .         | 19        |
| 2.4 Azione, equazioni del moto e condizioni ai limiti . . . . .        | 22        |
| 2.5 Il <i>gauge statico</i> . . . . .                                  | 25        |
| 2.6 Azione in funzione della <i>velocità trasversa</i> . . . . .       | 27        |
| 2.7 Moto degli estremi di un stringa aperta . . . . .                  | 29        |
| <b>3 Parametrizzazione e moto di una stringa</b>                       | <b>31</b> |
| 3.1 Parametrizzazione nel <i>gauge statico</i> . . . . .               | 31        |
| 3.2 Imposizione della parametrizzazione iniziale e vincoli . . . . .   | 35        |
| 3.3 La soluzione generale dell'equazione d'onda . . . . .              | 37        |
| 3.4 Applicazione: il rotatore rigido . . . . .                         | 38        |
| <b>4 Leggi di conservazione e correnti di world-sheet</b>              | <b>41</b> |
| 4.1 Risultati della meccanica Lagrangiana . . . . .                    | 41        |
| 4.2 Correnti di momento lineare e di Lorentz sul world-sheet . . . . . | 45        |
| 4.2.1 Il momento lineare . . . . .                                     | 45        |
| 4.2.2 Le correnti di Lorentz . . . . .                                 | 48        |
| 4.3 Il parametro di curvatura $\alpha'$ . . . . .                      | 49        |

|          |                                                                 |           |
|----------|-----------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>5</b> | <b>Moto di una stringa nel <i>gauge-cono luce</i></b>           | <b>51</b> |
| 5.1      | Parametrizzazione e cambio di unità di misura . . . . .         | 51        |
| 5.1.1    | Parametrizzazione $\tau$ . . . . .                              | 51        |
| 5.1.2    | Parametrizzazione $\sigma$ . . . . .                            | 53        |
| 5.2      | Equazione d'onda nel <i>gauge cono-luce</i> . . . . .           | 57        |
| 5.3      | Soluzione dell'equazione del moto . . . . .                     | 58        |
| 5.4      | Cenni sulla quantizzazione della stringa aperta relativistica . | 63        |
|          | <b>Conclusioni</b>                                              | <b>70</b> |
|          | <b>Bibliografia</b>                                             | <b>72</b> |

# Introduzione

Lo scopo del presente lavoro di tesi è di offrire una panoramica introduttiva della teoria delle stringhe, in quella che è nota come formulazione bosonica. L'attributo indica che la quantizzazione della teoria porta a stati quantistici non riconducibili ai fermioni e, dunque, non produce una descrizione completa dei costituenti noti dell'universo. Ad ovviare a questo problema interviene la teoria delle superstringhe, che utilizza la supersimmetria per prevedere l'esistenza dei fermioni. Tutto ciò, tuttavia, si situa ad un livello superiore a quello del presente lavoro e non verrà trattato ulteriormente.

La teoria delle stringhe nasce alla fine degli anni '60. Analizzando i dati su alcune risonanze adroniche, si scoprì una relazione lineare fra il loro momento angolare intrinseco ed il quadrato dell'energia di centro di massa. Il fisico Gabriele Veneziano propose una formula, in cui entrava in gioco la funzione Gamma di Eulero, che interpolava correttamente i risultati, ma nessun modello che ipotizzasse costituenti più piccoli delle risonanze legati insieme da forze di vario tipo produsse l'attesa giustificazione del risultato, fin quando non fu proposto, da Yoichiro Nambu<sup>1</sup> fra gli altri, un modello della forza nucleare a stringhe vibranti in una dimensione, che giustificava sorprendentemente l'andamento dei dati. Il modello non si rivelò, tuttavia, ulteriormente utile nell'investigazione della forza nucleare, problema tuttora non risolto, ma segnò la nascita della teoria delle stringhe. Secondo questa teoria, le particelle elementari (intese come oggetti sperimentalmente rivelabili, insieme con tutte le loro proprietà: spin, massa, sapore e così via) non sono altro che modi di vibrazione di stringhe (o corde), di lunghezza dell'ordine di  $10^{-35}cm$ , inaccessibile, quindi, con la tecnologia attualmente a nostra disposizione, che permette di sondare la materia fino a scale dell'ordine di  $10^{-18}cm$ . La teoria delle stringhe, dunque, non ha prodotto risultati sperimentalmente verificabili, nè ha mai predetto nulla di nuovo sui fenomeni fisici finora noti. Per comprendere perchè essa attiri l'attenzione della comunità dei fisici, è necessario premettere una digressione.

Il distillato della nostra conoscenza delle leggi fondamentali dell'universo può essere sintetizzato con quattro parole: Relatività Generale e Modello Standard. Su scala astronomica, l'universo è descritto dalla teoria di Einstein

---

<sup>1</sup>Cf. par. 2.4, azione di Nambu-Goto

dello spazio-tempo curvo, teoria classica (nel senso lato di non quantistica), che sfugge ai tentativi di quantizzazione, il che è quantomeno spiacevole, dati i successi della meccanica quantistica in ogni altro ambito della fisica.

Il Modello Standard, d'altro canto, è l'insieme di tutte le teorie quantistiche, compiutamente formulate, come l'elettrodinamica quantistica, o in via di sviluppo, la cromodinamica quantistica, la teoria dell'interazione forte, che spiegano il comportamento dell'universo su scala atomica e subatomica. Le forze fondamentali che contano, in questo ambito, agiscono tramite la mediazione di bosoni messaggeri:

1. il fotone, di massa nulla, mediatore dell'interazione elettromagnetica;
2. i tre bosoni  $W^+$ ,  $W^-$  e  $Z^0$ , di massa di  $80 - 90 \frac{GeV}{c^2}$ , mediatori dell'interazione debole;
3. i gluoni mediatori dell'interazione forte, che tiene uniti i quark a formare tutte le particelle subatomiche note.

Tutte le entità qui descritte sono state osservate sperimentalmente. Tuttavia, questo quadro vorrebbe incorporare anche la gravità, e lo fa prevedendo l'esistenza di un bosone di massa nulla, con spin 2, il gravitone, che sarebbe il messaggero dell'interazione gravitazionale. Questa particella non è mai stata osservata e, per giunta, la necessità della sua esistenza non scaturisce naturalmente dalla quantizzazione di una teoria classica preesistente, come nel caso dell'elettrodinamica quantistica e dell'interazione debole. Il tutto, dunque, è palesemente forzato.

Ebbene, in teoria quantistica delle stringhe il gravitone emerge naturalmente come un semplice modo di vibrazione della stringa elementare. Dunque, se la teoria delle stringhe riuscisse, un giorno, a fornire un quadro soddisfacente della gravità, nonché a mostrare (compito che, per ora, siamo lontani dal raggiungere), che tutte le particelle elementari note scaturiscono come modi di vibrazione delle stringhe, la teoria quantistica della gravità tanto cercata sarebbe già formulata e naturalmente inserita di principio nel quadro delle teorie quantistiche ad oggi disponibili. Non si tratterebbe, beninteso, di una semplice trasposizione su scala cosmica di idee già testate con successo altrove: tutta la fisica dovrebbe essere rivista in una nuova ottica, a cominciare dall'osservazione dell'inesistenza di particelle puntiformi. Queste sono, ad oggi, definite come oggetti la cui eventuale struttura interna non è sperimentalmente rivelabile, come nel caso dell'elettrone. Ma se la teoria delle stringhe dovesse rivelarsi corretta, allora il concetto stesso di puntiforme sarebbe definitivamente privato di qualsiasi valore epistemologico, per conservare solo quello di utile idealizzazione. Inoltre, i vincoli di invarianza relativistica impongono che lo spazio-tempo sia a 26 dimensioni in teoria bosonica, 10 in teoria delle superstringhe, fatto alquanto sorprendente, che tuttavia emana un profondo fascino: in ogni altra teoria fisica, Lorentz-invariante o meno che sia, la dimensione  $D$  dello spazio è un dato che

proviene dall'esterno, non scaturendo naturalmente di principi fisici fondanti. Qui accade esattamente l'opposto, per quanto non si tratti del risultato naturalmente atteso, cioè  $D = 4$ . Un altro argomento in favore della teoria delle stringhe è l'assenza di parametri che devono essere aggiunti dall'esterno, che nel Modello Standard sono circa 20. Il grande problema della teoria delle stringhe, che ne ha limitato finora, e continuerà ancora a limitarne, il potere predittivo, sempre ammesso che la teoria si riveli poi corretta, è che non si dispone ancora di equazioni di campo complete ed eleganti come quelle della Relatività Generale: si tratta, a tutti gli effetti, di una teoria in via di sviluppo, ancora lontana da una formulazione compiuta. Solo se questa sarà mai effettivamente raggiunta, come molti auspicano e per cui lavorano, si potrà stabilire se le previsioni che avanza siano corrette o meno, sebbene le energie attualmente raggiungibili in laboratorio non permettano di sperare che l'esperimento possa prontamente, o forse mai, esprimere il giudizio definitivo sull'esistenza di quelli che la teoria ritiene i costituenti base dell'universo, le stringhe elementari. Le risposte agli interrogativi sulla correttezza delle idee della teoria verranno, verosimilmente, dalla verifica di predizioni indirette, sebbene non per questo secondarie per importanza. Che le stringhe elementari o la presenza delle extra-dimensioni che la teoria prevede possano essere osservate anche all'indomani di un futuro assestamento teorico è, ad oggi, purtroppo, difficilmente sostenibile.

### ***Riassunto del lavoro di tesi***

Elenchiamo, di seguito, il contenuto del lavoro, nell'ordine in cui viene sviluppato nei vari capitoli

1. Introduciamo il problema delle condizioni ai limiti per un'equazione differenziale lineare richiamando i risultati classici sulla corda vibrante, per cui deriviamo l'equazione d'onda prima con i metodi elementari della meccanica newtoniana, quindi applicando il principio integrale di Hamilton. Mostriamo come questo conduca alle stesse equazioni del moto e condizioni ai limiti che il primo metodo.
2. Richiamiamo i risultati di base sulla geometria delle superfici, indispensabili per studiare l'azione di una stringa relativistica, che definiamo subito dopo, ricavando equazioni del moto e condizioni ai limiti. Procediamo fissando una convenzione sulla rappresentazione della superficie che la stringa, muovendosi, descrive nello spazio-tempo di Minkowski. Quindi deriviamo due risultati fondamentali sul moto degli estremi di una stringa aperta.
3. Completiamo la parametrizzazione della stringa e troviamo, in forma implicita, la soluzione generale dell'equazione del moto, discutendo un'applicazione importante, che permette di comprendere come le

stringhe possano entrare in gioco nello studio degli spin delle particelle, come viene poi mostrato alla fine del capitolo successivo.

4. Dopo aver richiamato i risultati generali della meccanica lagrangiana sulle leggi di conservazione, ricaviamo delle equazioni di conservazione per la stringa relativistica. Riprendendo, infine, l'esempio del rotatore rigido, ne calcoliamo il momento angolare, introducendo un parametro utile, sperimentalmente misurabile,  $\alpha'$ , che entra in gioco nella relazione lineare che lega momento angolare delle suddette risonanze adroniche e quadrato dell'energia di centro di massa.
5. Generalizziamo la parametrizzazione discussa nel capitolo 3, introducendo la vantaggiosa rappresentazione di cono-luce, per risolvere esplicitamente, sempre in via del tutto generale, l'equazione del moto. Partendo, quindi, da questa soluzione, mostriamo come si imposta la quantizzazione della stringa.

# Capitolo 1

## La corda vibrante in meccanica classica

*In questo primo capitolo, studiamo le equazioni del moto della corda vibrante classica e le loro soluzioni, per introdurre in modo semplice ed intuitivo i concetti di equazione d'onda, modo di oscillazione e condizione ad un estremo di tipo Dirichlet e Neumann. Tutti questi concetti sono ripresi e sviluppati nei capitoli successivi, per studiare il moto delle stringhe relativistiche. Concludiamo con un'osservazione che è utile per comprendere le differenze fra i due tipi di condizioni al contorno.*

### 1.1 Trattazione elementare

#### 1.1.1 Derivazione dell'equazione d'onda

Iniziamo derivando le equazioni del moto mediante la legge di Newton; quindi le ricaviamo attraverso un principio integrale, col formalismo ed i metodi della meccanica analitica.

Consideriamo una corda a riposo, di lunghezza fissata  $a$ , giacente lungo l'asse  $x$  tra i punti  $x = 0$  e  $x = a$ . Vogliamo studiare le equazioni delle oscillazioni trasversali. Ricordiamo che la coordinata  $x$  non varia per nessuno dei punti della corda, durante il moto. Supponiamo che la corda sia omogenea:  $\mu_0 = \text{costante}$ , dove  $\mu_0$  è la densità lineare di massa. La massa totale della corda è:  $M = \mu_0 a$ .

Si consideri un tratto infinitesimo di corda, di estremi  $x$  ed  $x + dx$ , con  $y = 0$ , quando la corda non oscilla. Supponiamo che, al tempo  $t$ , lo spostamento del punto  $x$  sia  $y(x, t)$  e che quello del punto  $x + dx$  sia  $y(x + dx, t)$ , dove  $y(x, t)$  è la funzione, continua e differenziabile, che descrive lo spostamento di ogni punto della corda dalla posizione di equilibrio statico ad ogni istante di tempo.

Supporremo che le oscillazioni siano piccole, intendendo che, ad ogni istante

di tempo, per ogni punto della corda:

$$\frac{\partial y(t, x)}{\partial x} \ll 1. \quad (1.1)$$

Per ottenere l'equazione del moto, si deve calcolare la componente lungo l'asse  $y$  della forza che agisce sul tratto infinitesimo di corda,  $dF_y$ . Come si vede dalla figura 1.1, la pendenza della tangente alla corda, nei punti  $x$  ed  $x + dx$ , è lievemente diversa. Detto  $\theta$  l'angolo formato dalla tangente alla corda in un punto  $x$  generico,  $T_0$  la tensione, la componente della forza lungo l'asse  $y$  è data da

$$dF_y = T_0 \sin \theta, \quad (1.2)$$

dove  $\sin \theta \simeq \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_x$ .

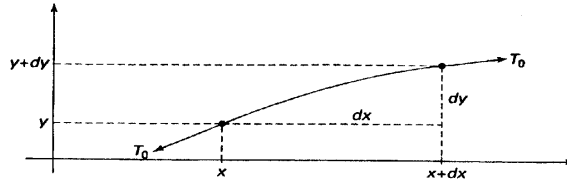


Figura 1.1: Forza risultante sul tratto infinitesimo di stringa

Dunque, sul tratto di corda in questione la forza è

$$dF_y = T_0 \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x+dx} - T_0 \left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_x \simeq T_0 \left. \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right|_x dx. \quad (1.3)$$

Per la seconda legge di Newton, questa quantità eguaglia il prodotto della massa  $dm$  per l'accelerazione. Ma  $dm = \mu_0 dx$ , da cui si ricava che

$$T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx = \mu_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx. \quad (1.4)$$

Eliminando  $dx$  da ambo i membri otteniamo

$$\frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}^2} - \frac{\mu_0}{\mathbf{T}_0} \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial \mathbf{t}^2} = \mathbf{0}. \quad (1.5)$$

Questa è l'equazione delle onde cercata, più spesso scritta nella forma

$$\frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}^2} - \frac{1}{\mathbf{v}_0^2} \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial \mathbf{t}^2} = \mathbf{0}, \quad (1.6)$$

dove

$$v_0 = \sqrt{\frac{T_0}{\mu_0}}. \quad (1.7)$$

L'interpretazione fisica di questo risultato è immediata: maggiore è la tensione della corda, più velocemente questa oscilla; analogamente, maggiore è la sua massa, più lentamente si propaga l'onda.

### 1.1.2 Condizioni iniziali e ai limiti

Occupiamoci adesso di stabilire delle condizioni che permettono di risolvere univocamente l'equazione d'onda ricavata. È chiaro che, trattandosi di un'equazione alle derivate parziali del secondo ordine rispetto al tempo e alla posizione, è necessario assegnare sia delle condizioni iniziali, sia delle condizioni ai limiti. Le prime specificano, se  $t = 0$  è l'istante iniziale, il valore di  $y(0, x)$  e di  $\frac{\partial y}{\partial t}\Big|_{t=0}$  per ogni punto della corda. Le condizioni ai limiti impongono dei vincoli alla soluzione dell'equazione nei punti  $x = 0$  ed  $x = a$ . Possono essere ricavate da considerazioni fisiche dirette, considerando i due casi illustrati nella figura 1.2.

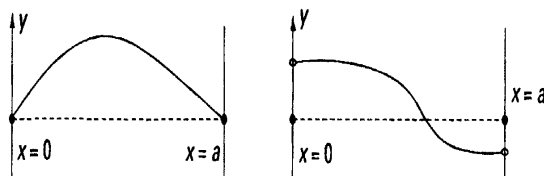


Figura 1.2: Condizioni ai limiti

Supponiamo che la corda sia assicurata, negli estremi, ad un vincolo rigido, come nella prima illustrazione della figura. Allora le condizioni ai limiti, dette in questo caso di Dirichlet, sono

$$y(t, 0) = y(t, a) = 0, \quad \text{Condizioni di Dirichlet} . \quad (1.8)$$

Notiamo subito che queste condizioni, imponendo alla funzione  $y(x, t)$  di essere costante negli estremi, equivalgono completamente a scrivere

$$\frac{\partial y(t, x)}{\partial t}\Big|_{x=0} = \frac{\partial y(t, x)}{\partial t}\Big|_{x=a} = 0, \quad \text{Condizioni di Dirichlet} . \quad (1.9)$$

Diversamente, si consideri la seconda illustrazione della figura 1.2: agli estremi della corda possono essere assicurati due anelli di massa nulla, liberi di scorrere lungo due sbarre lisce, disposte parallele all'asse  $y$ , nei punti  $x = 0, x = a$ . Consideriamo l'anello che scorre lungo la sbarra posta, per esempio, in  $x = 0$ . La forza che agisce su di esso è, per le stesse considerazioni del paragrafo precedente:  $dF_y = T_0 \frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{x=0}$ . Ora, l'anello è privo di massa, quindi, se la forza non fosse nulla, la sua accelerazione sarebbe infinita. Evidentemente, allora, le condizioni ai limiti da imporre in questo caso, dette di Neumann, sono

$$\frac{\partial y(t, x)}{\partial x}\Big|_{x=0} = \frac{\partial y(t, x)}{\partial x}\Big|_{x=a} = 0, \quad \text{Condizioni di Neumann} . \quad (1.10)$$

Adesso è evidente il vantaggio di scrivere le condizioni di Dirichlet in termini delle derivate: i due tipi di condizioni ai limiti si ottengono l'uno dall'altro, scambiando la derivata spaziale con la derivata temporale.

### 1.1.3 Soluzione dell'equazione d'onda

Vediamo come, assegnate le condizioni di cui sopra, si possa integrare l'equazione della corda vibrante. È noto che la sua soluzione generale è

$$f_+(x - v_0 t) + f_-(x + v_0 t) , \quad (1.11)$$

dove  $f_+$  è una soluzione che si propaga nel verso positivo dell'asse  $x$ , mentre  $f_-$  è la soluzione che viaggia in verso opposto. Se conosciamo  $y(0, x)$  e  $\left. \frac{\partial y}{\partial t} \right|_{t=0}$ , otteniamo, sfruttando (1.11), le equazioni

$$y(0, x) = f_+(x) + f_-(x) ; \quad (1.12)$$

$$\frac{\partial y}{\partial t}(0, x) = -v_0 f'_+(x) + v_0 f'_-(x) . \quad (1.13)$$

Ricavando, da (1.12),  $f_-$  in funzione di  $f_+$  e sostituendo in (1.13), si ottiene un'equazione differenziale ordinaria del primo ordine, che si può integrare per ottenere  $f_+(x)$ , grazie alle condizioni ai limiti. Quindi, sostituendo  $f_+(x)$  in (1.13), si ricava anche  $f_-(x)$ . Resta così dimostrato che le condizioni iniziali e le condizioni ai limiti garantiscono l'unicità della soluzione del problema.

In generale, le soluzioni dell'equazione d'onda più studiate ed utilizzate sono sinusoidi e cosinusoidi di una certa frequenza  $\omega$ , oppure loro combinazioni lineari. Non tutte le frequenze sono, però, permesse. Supponiamo, infatti, che la soluzione dell'equazione sia

$$y(t, x) = y(x) \sin(\omega t + \phi) , \quad (1.14)$$

Sostituendo questa funzione nell'equazione, il problema di determinare le frequenze permesse equivale a risolvere una equazione agli autovalori per l'operatore  $\frac{d^2}{dx^2}$ :

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + \omega \frac{\mu_0}{T_0} y(x) = 0 . \quad (1.15)$$

Essendo  $\omega \frac{\mu_0}{T_0} \geq 0$ , l'equazione autonoma associata ammette due radici immaginarie pure. Le soluzioni sono delle funzioni trigonometriche del tipo

$$y(x) = A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) , \quad n = 1, 2, 3... \quad (1.16)$$

se imponiamo condizioni ai limiti di Dirichlet;

$$y(x) = A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{a}\right) , \quad n = 0, 1, 2, 3... \quad (1.17)$$

se imponiamo condizioni di Neumann, nel qual caso è contemplata anche la soluzione  $n = 0$ , che corrisponde allo stato stazionario, con configurazione parallela all'asse  $x$ .

In entrambi i casi, le frequenze permesse alle oscillazioni sono

$$\omega_n = \sqrt{\frac{T_0}{\mu_0}} \left( \frac{n\pi}{a} \right). \quad (1.18)$$

Infine, notiamo che le condizioni di Neumann ammettono un'ulteriore soluzione, di tipo non oscillatorio, che è

$$y(t, x) = at + b, \quad (1.19)$$

con  $a$  e  $b$  costanti arbitrarie. Questo caso corrisponde ad un moto traslatorio rigido uniforme, con configurazione parallela all'asse  $x$ . In un certo senso, il vero modo 0 della corda è proprio questo, non la situazione, banale, in cui è ferma ( $n = 0$  con condizioni ai limiti di Neumann)<sup>1</sup>.

## 1.2 Formulazione Lagrangiana del problema

### 1.2.1 Richiami sul principio variazionale

È noto dalla meccanica analitica<sup>2</sup> che esiste un principio integrale, detto di Hamilton o dell'azione stazionaria, che permette di ricavare, in via del tutto generale, le equazioni del moto di un sistema meccanico (che qui supporremo costituito da punti materiali, per semplicità). Si può definire, infatti, una quantità, l'azione  $S$ , come

$$S = \int_{t_i}^{t_f} L(t) dt. \quad (1.20)$$

La quantità sotto il segno di integrale è detta Lagrangiana e, per sistemi a vincoli olonomi e lisci, è data dalla differenza fra l'energia cinetica e l'energia potenziale del sistema:  $L = T - V$ . Entrambe le quantità e, quindi, l'azione, dipendono dalla traiettoria percorsa dal sistema nel suo spazio delle fasi in un dato intervallo temporale. Supponiamo, ora, che il sistema evolva, fra due istanti di tempo fissati, fra due configurazioni assegnate. Il principio di Hamilton afferma che le equazioni del moto si ottengono determinando la traiettoria che rende stazionaria l'azione, sull'insieme di tutte le possibili traiettorie, congiungenti le configurazioni assegnate, che il sistema può percorrere fra gli istanti iniziale e finale. Per raggiungere lo scopo, si calcola la variazione dell'azione al primo ordine, sostituendo la funzione  $\vec{x}(t)$  con  $\vec{x}(t) + \delta\vec{x}(t)$ . Con  $\vec{x}(t)$  indichiamo il vettore che ha per componenti le leggi

---

<sup>1</sup>Cf.[1, cap. 47-49] per una discussione più approfondita dei modi di vibrazione

<sup>2</sup>Cf.[3, cap.1]

orarie di tutti i punti materiali lungo ciascuno dei tre assi cartesiani. Qui il  $\delta$  indica che la variazione della traiettoria seguita dal sistema nello spazio delle fasi è effettuata a tempo fissato. Illustriamo concretamente l'applicazione del principio di Hamilton al caso di un singolo punto materiale di massa  $m$ , vincolato a muoversi lungo l'asse  $x$  in un campo di forza posizionale  $V(x)$ . La lagrangiana del sistema è semplicemente  $L = \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) - V[x(t)]$ . L'azione per il sistema, dunque, si scrive nella forma

$$S[x(t)] = \int_{t_i}^{t_f} \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) - V[x(t)] dt. \quad (1.21)$$

Variamo adesso la traiettoria, imponendo che, negli istanti iniziale e finale, la configurazione del sistema non muti, cioè chiediamo che  $x(t) \rightarrow x(t) + \delta x(t)$ . L'azione si riscrive perciò come

$$S[x + \delta x] = \int_{t_i}^{t_f} dt \frac{1}{2}m \left[ \frac{d}{dt}(x(t) + \delta x(t)) \right]^2 - V[x(t) + \delta x(t)]. \quad (1.22)$$

Sviluppando le funzioni di  $x(t) + \delta x(t)$  in serie di Taylor, trascurando i termini del secondo ordine resta

$$\begin{aligned} S[x + \delta x] &= \int_{t_i}^{t_f} \frac{1}{2}m\dot{x}^2(t) + \frac{d}{dt}[(\delta x(t))^2] + m\dot{x}(t) \frac{d}{dt}\delta x(t) - V[x(t)] \\ &\quad - V'[x(t)]\delta x(t) dt = S[x(t)] + \delta S, \end{aligned} \quad (1.23)$$

con

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} m\dot{x}(t) \frac{d}{dt}\delta x(t) - V'[x(t)]\delta x(t) dt + \mathcal{O}[(\delta x(t))^2]. \quad (1.24)$$

Per fattorizzare  $\delta x(t)$ , perchè sia evidente che la traiettoria che rende stazionario il funzionale-azione è minima, qualunque sia la variazione apportatavi, si integra per parti, trovando che

$$\delta S = m[\dot{x}(t)\delta x(t)]_{t_i}^{t_f} + \int_{t_i}^{t_f} \delta x(t) (-m\ddot{x}(t) - V'[x(t)]) dt. \quad (1.25)$$

Poichè, essendo fissate le configurazioni iniziale e finale,  $\delta x(t_i) = \delta x(t_f) = 0$ , il primo termine è nullo, per annullare  $\delta S$  è necessario richiedere che sia

$$m\ddot{x}(t) = -V'[x(t)], \quad (1.26)$$

che è precisamente la legge di Newton per i campi conservativi.

### 1.2.2 Risultati del principio variazionale

L'equazione d'onda per le piccole oscillazioni si può derivare applicando il principio variazionale di Hamilton. Per farlo, si deve determinare l'espressione della lagrangiana per la corda. Questa è definita da

$$L = T - V. \quad (1.27)$$

Poichè gli spostamenti dei punti della corda dalla posizione di equilibrio stabile avvengono parallelamente all'asse  $y$ , il contributo al termine cinetico di un tratto di corda infinitesimo di lunghezza  $dx$ , centrato nel punto di ascissa  $x$ , è

$$dT = \frac{1}{2} \dot{y}^2(t, x) \mu_0 dx,$$

dove si è posto

$$\dot{y}(t, x) = \frac{\partial y}{\partial t}.$$

L'energia cinetica della corda si ottiene integrando questo contributo su tutta la sua lunghezza

$$T = \frac{1}{2} \mu_0 \int_0^a \dot{y}^2(t, x) dx. \quad (1.28)$$

La corda possiede anche un'energia potenziale, dovuta al lavoro compiuto dalla tensione  $T_0$  per allungare il tratto di lunghezza a riposo  $dx$ , come si evince dalla figura 1.1, di una quantità

$$\begin{aligned} \Delta l &= \sqrt{dx^2 + dy^2} - dx = dx \left( \sqrt{1 + \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2} - 1 \right) \\ &\simeq dx \frac{1}{2} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2, \end{aligned} \quad (1.29)$$

nell'approssimazione delle piccole oscillazioni. Il lavoro compiuto dalla forza è, allora,

$$dV = T_0 \Delta l = T_0 \frac{1}{2} y'^2(t, x) dx,$$

dove si è posto

$$y'(t, x) \equiv \frac{\partial y}{\partial x}.$$

L'energia potenziale totale si otterrà integrando questo contributo su tutta la lunghezza della corda, ovvero

$$V = \frac{1}{2} T_0 \int_0^a \left( \frac{\partial y}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (1.30)$$

La lagrangiana per la corda è allora

$$L = \int_0^a \left[ \frac{1}{2} \mu_0 \dot{y}^2(t, x) - \frac{1}{2} T_0 y'^2(t, x) \right] dx. \quad (1.31)$$

Questa equazione si incontra, solitamente, scritta nella forma

$$L = \int_0^a \mathcal{L} dx. \quad (1.32)$$

dove  $\mathcal{L}$  è detta densità di lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \mu_0 \dot{y}^2(t, x) - \frac{1}{2} T_0 y'^2(t, x). \quad (1.33)$$

L'azione  $S$  per il sistema è

$$S = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a \left[ \frac{1}{2} \mu_0 \dot{y}^2(t, x) - \frac{1}{2} T_0 y'^2(t, x) \right] dx. \quad (1.34)$$

Come in precedenza, i termini infinitesimi, per  $\delta y(t, x) \rightarrow 0$ , di ordine superiore al primo saranno trascurati nell'espansione in serie di Taylor dell'integrando. Variando la traiettoria del sistema come nel caso del punto materiale,  $y(t, x) \rightarrow y(t, x) + \delta y(t, x)$ , la variazione dell'azione risulta

$$\delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx \left[ \mu_0 \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial (\delta y)}{\partial t} - T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial (\delta y)}{\partial x} \right]. \quad (1.35)$$

Integrando per parti, si ottiene che

$$\begin{aligned} \delta S = \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx & \left[ \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial y}{\partial t} \delta y \right) - \mu_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \delta y \right. \\ & \left. - T_0 \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial y}{\partial x} \delta y \right) + T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \delta y \right]. \end{aligned} \quad (1.36)$$

Integrando le derivate dei prodotti,

$$\begin{aligned} \delta S = \int_0^a \mu_0 \left[ \frac{\partial y}{\partial t} \delta y \right]_{t_i}^{t_f} dx \\ - \int_{t_i}^{t_f} T_0 \left[ \frac{\partial y}{\partial x} \delta y \right]_{x=0}^{x=a} dt - \int_{t_i}^{t_f} dt \int_0^a dx \left( \mu_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) \delta y. \end{aligned} \quad (1.37)$$

I tre termini che compaiono nell'espressione di  $\delta S$  devono annullarsi indipendentemente.

L'annullamento del terzo restituisce l'equazione delle piccole oscillazioni della corda che avevamo già ricavato.

Il primo si annulla grazie alla condizione  $\delta y(t_i) = \delta y(t_f) = 0$ .

Il secondo termine può annullarsi identicamente in due modi distinti, che sono

$$\delta y(t, x=0, a) = 0; \quad (1.38)$$

$$\left. \frac{\partial y}{\partial x} \right|_{x=0, a} = 0. \quad (1.39)$$

Si riconoscono facilmente le condizioni di Dirichlet nella prima equazione, quelle di Neumann nella seconda. Concludiamo, quindi, che la formulazione lagrangiana del problema delle equazioni del moto restituisce, in maniera più elegante e compatta, tutti i risultati della discussione elementare.

### 1.3 Implicazioni delle condizioni ai limiti

L'espressione della quantità di moto della nostra corda è

$$p = \int_0^a \mu_0 \frac{\partial y}{\partial t} dx. \quad (1.40)$$

e, derivandola rispetto al tempo si ottiene

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \int_0^a \mu_0 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx = \int_0^a T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx = T_0 \left[ \frac{\partial y}{\partial x} \right]_{x=0}^{x=a}. \quad (1.41)$$

Dunque, la quantità di moto della corda è costante nel tempo se valgono condizioni ai limiti di tipo Neumann, ma non di tipo Dirichlet. Ciò è intuitivamente sensato: poichè la forza che agisce sulla stringa è proporzionale a  $\frac{\partial y}{\partial x}$ , se  $\frac{\partial y}{\partial x} \neq 0$  per  $x=0, x=a$ , allora il vincolo cui la stringa è assicurata esercita continuamente una forza di reazione alla sollecitazione apportata dalla tensione della stringa stessa: quindi la quantità di moto della stringa non si conserva, perchè questa non è isolata. Il contrario, ovviamente, avviene con condizioni di Neumann.

Solo recentemente si è accettata la possibilità che le condizioni ai limiti di tipo Dirichlet possano essere applicate alla risoluzione di problemi fisici concreti, accettando la possibilità che le stringhe reali siano agganciate alle cosiddette *brane*, oggetti di cui parleremo meglio nel capitolo seguente.

## Capitolo 2

# L'azione e le equazioni del moto per la stringa relativistica

*Per studiare il moto delle stringhe relativistiche è necessario definire per esse un'azione. Questa azione, si vedrà, chiama in causa la superficie descritta dalle stringhe nello spazio-tempo di Minkowski. Per poter disporre, in maniera sufficiente agli scopi di questo lavoro, di tutti i concetti necessari ad impostare il problema, richiamiamo di seguito i risultati basilari della geometria delle superfici, dimostrando l'invarianza della loro misura rispetto ai cambiamenti ammissibili di parametri. In seguito, scriviamo l'azione per la stringa relativistica e ne ricaviamo le equazioni del moto e le condizioni ai limiti. Quindi imponiamo un vincolo sulla parametrizzazione della stringa, riscriviamo l'azione in una forma intuitivamente più cristallina e dimostriamo due risultati sul moto degli estremi di una stringa aperta.*

### 2.1 Il funzionale-area per le superfici in $\mathbb{R}^3$

Una superficie in  $\mathbb{R}^3$  è matematicamente definita da una funzione vettoriale  $\vec{x}$  di due parametri,  $\xi_1$  e  $\xi_2$ , varianti in un dominio  $\mathcal{D} \in \mathbb{R}^2$ , a tre componenti scalari:  $x_1, x_2, x_3$ . La misura dell'area del parallelogramma elementare, sul sostegno, corrispondente al rettangolo  $d\xi_1 d\xi_2$  nel dominio  $\mathcal{D}$ , è il prodotto vettoriale di  $d\vec{v}_1$  e  $d\vec{v}_2$ , cioè di

$$d\vec{v}_1 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_1} d\xi_1; \quad (2.1)$$

$$d\vec{v}_2 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_2} d\xi_2. \quad (2.2)$$

Questi vettori, come è noto, costituiscono una base dello spazio tangente alla superficie nel punto in cui è centrato il parallelogramma. L'area elementare  $dA$  è

$$dA = |d\vec{v}_1| |d\vec{v}_2| \sin \theta$$

$$= |d\vec{v}_1| |d\vec{v}_2| \sqrt{1 - \cos^2 \theta} = \sqrt{|d\vec{v}_1|^2 |d\vec{v}_2|^2 - |d\vec{v}_1|^2 |d\vec{v}_2|^2 \cos^2 \theta}, \quad (2.3)$$

che si può riesprimere in termini di prodotti scalari come

$$dA = \sqrt{(d\vec{v}_1 \cdot d\vec{v}_1)(d\vec{v}_2 \cdot d\vec{v}_2) - (d\vec{v}_1 \cdot d\vec{v}_2)^2}. \quad (2.4)$$

Infine, utilizzando le (2.1), troviamo l'espressione

$$dA = d\xi_1 d\xi_2 \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_1}\right) \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_2}\right) - \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_2}\right)^2}. \quad (2.5)$$

Per ottenere l'area dell'intero sostegno, l'espressione va integrata su tutto il dominio  $\mathcal{D}$

$$A = \int_{\mathcal{D}} d\xi_1 d\xi_2 \sqrt{\left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_1}\right) \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_2}\right) - \left(\frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_2}\right)^2}. \quad (2.6)$$

Osserviamo che l'area  $dA$  sulla superficie è stata definita, in ogni punto, mediante il prodotto vettoriale in  $\mathbb{R}^3$  dei vettori tangenti, che definisce l'area elementare in  $\mathbb{R}^3$ . Altrimenti detto, la metrica che definisce la misura della superficie viene indotta su di essa dall'ambiente in cui è immersa. Questa osservazione è cruciale per comprendere la definizione di metrica su una superficie bidimensionale nello spazio-tempo di Minkowski, con la quale si esprimerà l'azione per una stringa relativistica<sup>1</sup>.

## 2.2 Cambiamenti ammissibili di parametri

L'area di una superficie, si mostrerà, non varia se l'applicazione che la definisce viene espressa in funzione di un'altra coppia di parametri collegati ai vecchi da un *cambiamento ammissibile*. Sia  $\mathcal{T}$  un dominio di  $\mathbb{R}^2$ . Un cambiamento ammissibile di parametri è un'applicazione  $\varphi : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{T}$ , di classe  $C^1$ , invertibile e con determinante Jacobiano  $J_\varphi \neq 0$  in  $\overset{0}{D}$  (nell'interno del dominio). Sotto queste condizioni, una superficie regolare rimane tale per trasformazione di coordinate. Per dimostrare l'invarianza dell'area riscriveremo la sua espressione in un modo più elegante e compatto che in (2.6). Notiamo che, dalla teoria degli integrali multipli, sappiamo che

$$d\xi_1 d\xi_2 = \left| \frac{\partial \xi_i}{\partial \tilde{\xi}_j} \right| d\tilde{\xi}_1 d\tilde{\xi}_2 = |M| d\tilde{\xi}_1 d\tilde{\xi}_2, \quad (2.7)$$

dove  $M$  è la matrice jacobiana della trasformazione di coordinate e  $|M|$  il suo determinante. Analogamente vale l'inverso

$$d\tilde{\xi}_1 d\tilde{\xi}_2 = \left| \frac{\partial \tilde{\xi}_i}{\partial \xi_j} \right| d\xi_1 d\xi_2 = |\tilde{M}| d\xi_1 d\xi_2, \quad (2.8)$$

---

<sup>1</sup>Il riferimento completo per i concetti matematici di questo capitolo è [2, cap. 10]

da cui segue immediatamente che

$$|M||\tilde{M}| = 1. \quad (2.9)$$

Consideriamo, adesso, un vettore  $d\vec{x}$  tangente alla superficie in qualche suo punto. Il suo modulo quadro è

$$ds^2 = d\vec{x} \cdot d\vec{x}. \quad (2.10)$$

E poichè

$$d\vec{x} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_2} d\xi_2 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_i} d\xi_i, \quad (2.11)$$

allora  $ds^2$  può scriversi come

$$ds^2 = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_j} d\xi_i d\xi_j = g_{ij}(\xi) d\xi_i d\xi_j, \quad (2.12)$$

dove abbiamo introdotto

$$g_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_i} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_j}. \quad (2.13)$$

La matrice  $g_{ij}$  è la metrica indotta sulla superficie da  $\mathbb{R}^3$ . È una matrice  $2 \times 2$ , dato che i parametri che definiscono  $\mathcal{S}$  sono  $\xi_1$  e  $\xi_2$ :

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_1} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_2} \\ \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_1} & \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_2} \cdot \frac{\partial \vec{x}}{\partial \xi_2} \end{pmatrix}. \quad (2.14)$$

È evidente, a questo punto, che, detto  $g = |g_{ij}|$ , l'area  $A$  si può scrivere, in forma molto compatta:

$$\mathbf{A} = \int_{\mathcal{D}} d\xi_1 d\xi_2 \sqrt{g}. \quad (2.15)$$

Ora, dato che la lunghezza è una proprietà intrinseca di un vettore, che non può, cioè, dipendere dalla rappresentazione utilizzata, dev'essere necessariamente

$$g_{ij}(\xi) d\xi_i d\xi_j = \tilde{g}_{pq}(\tilde{\xi}) d\tilde{\xi}_p d\tilde{\xi}_q. \quad (2.16)$$

Esprimendo il prodotto dei differenziali con la regola di derivazione delle funzioni composte, otteniamo

$$g_{ij}(\xi) d\xi_i d\xi_j = \tilde{g}_{pq}(\tilde{\xi}) \frac{\partial \tilde{\xi}_p}{\partial \xi_i} \frac{\partial \tilde{\xi}_q}{\partial \xi_j} d\xi_i d\xi_j. \quad (2.17)$$

Poichè la relazione deve valere qualunque siano le coordinate, in qualunque punto, cioè, del sostegno, possiamo scrivere

$$g_{ij}(\xi) = \tilde{g}_{pq} \frac{\partial \tilde{\xi}_p}{\partial \xi_i} \frac{\partial \tilde{\xi}_q}{\partial \xi_j}. \quad (2.18)$$

Per la definizione della matrice  $\tilde{M}$

$$g_{ij}(\xi) = \tilde{g}_{pq}(\tilde{\xi}) \tilde{M}_{pi} \tilde{M}_{qj} = \tilde{M}_{ip}^T \tilde{g}_{pq} \tilde{M}_{qj}, \quad (2.19)$$

dove  $\tilde{M}^T$  è la matrice trasposta di  $M$ . Quindi la condizione di invarianza diventa

$$g = \tilde{M}^T g \tilde{M}, \quad (2.20)$$

da cui estraiamo che

$$|g| = |\tilde{M}^T| |\tilde{g}| |\tilde{M}| = |\tilde{g}| |\tilde{M}|^2, \quad (2.21)$$

da cui concludiamo

$$\sqrt{g} = \sqrt{\tilde{g}} |\tilde{M}|. \quad (2.22)$$

Passando all'espressione integrale dell'area, otteniamo finalmente

$$A = \int_{\mathcal{D}} \sqrt{g} d\xi_1 d\xi_2 = \int_{\tilde{\mathcal{D}}} \sqrt{\tilde{g}} |\tilde{M}| |\tilde{M}| d\tilde{\xi}_1 d\tilde{\xi}_2 = \int_{\tilde{\mathcal{D}}} \sqrt{\tilde{g}} d\tilde{\xi}_1 d\tilde{\xi}_2. \quad (2.23)$$

Ciò completa la prova.

## 2.3 Funzionale-area per superfici nello spazio-tempo

D'ora in avanti chiameremo  $\tau$  e  $\sigma$  i due parametri, varianti in un dominio  $\omega$  di  $\mathbb{R}^2$ , che definiscono la superficie. Questa, inoltre, non sarà una superficie in  $\mathbb{R}^3$ , ma in  $\mathcal{M}^d$ , lo spazio di Minkowski della relatività speciale a  $d$  dimensioni spaziali più una dimensione temporale. Chiameremo  $x^i, i = 0, 1, 2, 3 \dots d$ , le coordinate di questo spazio, con  $x^0 = ct$ . Denoteremo con  $X^\mu$  le componenti scalari della funzione che definisce la superficie in  $\mathcal{M}^2$ .

Dalla teoria della relatività speciale è noto che, nello spazio di Minkowski, si definisce, per ogni particella, una linea di universo, che descrive la sua storia. Nel caso delle stringhe, è necessario definire una *superficie di universo* (world-sheet), descritta dalle nostre funzioni  $X^\mu(\tau, \sigma)$ . Una rappresentazione del world-sheet di due stringhe, una aperta ed una chiusa, si può osservare nella figura 2.1. Chiaramente, essendo una rappresentazione tridimensionale, ciascuna delle due stringhe si deve immaginare in moto, nello spazio euclideo, su di un piano.

Definiamo i vettori tangenti alla superficie in un punto generico:

$$dv_1^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} d\sigma; \quad (2.24)$$

$$dv_2^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} d\tau. \quad (2.25)$$

---

<sup>2</sup>Per quanto segue, cf. [5, cap.6]

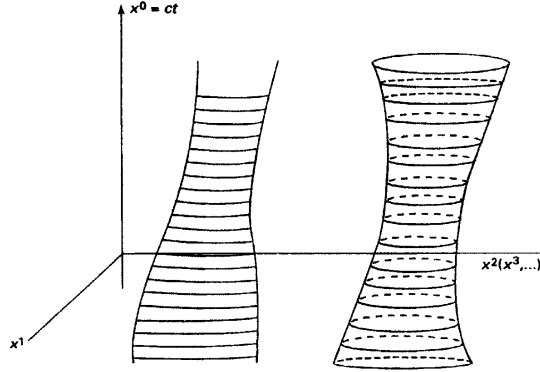


Figura 2.1: World-sheets

La notazione relativistica per il prodotto scalare fra due vettori  $a_\mu$  e  $b_\mu$  in  $\mathcal{M}$  è

$$a \cdot b = a_\mu b^\mu = g^{\mu\nu} a_\mu b_\nu, \quad (2.26)$$

dove

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (2.27)$$

è il tensore metrico di  $\mathcal{M}$ , qui scritto per lo spazio-tempo della relatività speciale, a tre dimensioni spaziali. E' chiaro che l'estensione ad  $\mathcal{M}^d$  si realizza semplicemente con un matrice diagonale  $(d+1) \times (d+1)$  con tanti  $-1$  lungo la diagonale principale quante sono le dimensioni spaziali. D'ora in avanti, quando non specificato diversamente, con la notazione  $a \cdot b$  si intenderà sempre il prodotto scalare nello spazio di Minkowski. Seguendo l'analogia con le superfici in  $\mathbb{R}^3$ , è naturale supporre che un'espressione, invariante per riparametrizzazione, per l'area del world-sheet, sia proprio

$$\begin{aligned} A &= \int_\omega d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \tau}\right) \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)} \\ &= \int_\omega d\tau d\sigma \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2 - \left(\frac{\partial X}{\partial \tau}\right)^2 \left(\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right)^2}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Abbiamo invertito il segno dell'espressione sotto radice, rispetto alla formula (2.6) ed ora spiegheremo perchè. Mostriamo anzitutto che il world-sheet ammette, in ogni punto, un vettore tangente di tipo spazio ed uno di tipo tempo. Il primo si visualizza facilmente: ad ogni punto del world-sheet è associato univocamente un istante di tempo. In quell'istante la stringa è

disposta nello spazio in una certa configurazione. In ogni punto della stringa si può individuare il vettore tangente diretto lungo la curva che la stringa descrive.

Per convincersi dell'esistenza di un vettore tangente di tipo tempo in ogni punto del world-sheet si può ragionare per assurdo: consideriamo, ad esempio, il moto di una stringa chiusa al tempo generico  $t$ . Se in qualche suo punto non esistesse un vettore tangente di tipo tempo, quel punto non potrebbe muoversi. Si consideri, infatti, la possibilità che un punto materiale  $P$  ammetta solo vettori tangenti di tipo spazio alla sua linea di universo: allora nessun osservatore di Lorentz istantaneo con origine del proprio sistema di riferimento nel punto  $P$  potrebbe vedere questo punto a riposo nel suo sistema di riferimento; ma questo contraddice i principi della relatività. Ora, se questa situazione si presentasse per i punti di un tratto arbitrariamente corto di una stringa chiusa ad un dato istante  $t$ , nessun punto  $P$  appartenente al tratto di stringa potrebbe muoversi all'istante  $t$ , il che è fisicamente insensato.

Siamo pronti a giustificare il segno della quantità sotto radice nell'espressione dell'area del world-sheet. Tutti i vettori tangenti alla stringa in un arbitrario punto  $P$  del world-sheet possono esprimersi mediante una combinazione lineare del tipo

$$v^\mu = \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \Big|_P + \lambda \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \Big|_P, \quad (2.29)$$

con  $\lambda \in \mathbb{R}$  ad eccezione di  $\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}$ , che si ottiene nel limite per  $\lambda \rightarrow \infty$ . Daremo per assodato, in seguito, che le derivate siano calcolate nello stesso punto  $P$  del world-sheet, senza specificarlo mediante la notazione (il ragionamento vale qualunque sia questo punto). Il suo modulo quadro è dato da

$$v^2(\lambda) = v^\mu(\lambda) v_\mu(\lambda) = \lambda^2 \left( \frac{\partial X}{\partial \sigma} \right)^2 + 2\lambda \left( \frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma} \right) + \left( \frac{\partial X}{\partial \tau} \right)^2. \quad (2.30)$$

Per quanto discusso sinora, questa quantità dev'essere sia negativa, sia positiva, per diversi valori di  $\lambda$ , in ogni punto del world-sheet. Quindi il discriminante dev'essere positivo, cioè

$$\left( \frac{\partial X}{\partial \tau} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma} \right)^2 - \left( \frac{\partial X}{\partial \sigma} \right)^2 \left( \frac{\partial X}{\partial \tau} \right)^2 \geq 0, \quad (2.31)$$

come volevasi dimostrare. Tutto quanto è stato fin qui esposto è graficamente sintetizzato nella figura 2.2.

Anche questa espressione per l'area del world-sheet è invariante per cambiamenti ammissibili di parametri. Introduciamo le notazioni:

$$\frac{\partial X}{\partial \tau} = \dot{X}; \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial X}{\partial \sigma} = X'. \quad (2.33)$$

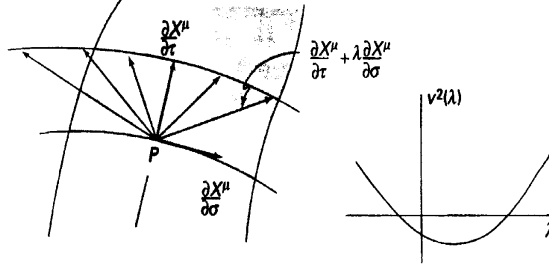


Figura 2.2: Spazio tangente al world-sheet

La lunghezza di un vettore di  $\mathcal{M}$  si esprime attraverso il tensore metrico  $g_{\mu\nu}$ , come già ricordato,

$$ds^2 = g_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} d\xi^\alpha d\xi^\beta. \quad (2.34)$$

Si può introdurre la metrica

$$\gamma_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \cdot \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta}. \quad (2.35)$$

Ponendo  $\xi_1 = \sigma$  e  $\xi_2 = \tau$ , questa si esprime come la matrice

$$\gamma \equiv \gamma_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} (\dot{X})^2 & \dot{X} \cdot X' \\ \dot{X} \cdot X' & (X')^2 \end{pmatrix}. \quad (2.36)$$

L'area si può esprimere come l'integrale della radice quadrata del determinante di  $-\gamma$ . Per lo stesso ragionamento precedente, si prova che l'area è invariante per riparametrizzazioni.

## 2.4 Azione, equazioni del moto e condizioni ai limiti

Si può adesso introdurre l'azione di Nambu-Goto per la stringa relativistica. Assumeremo che, dimensionalmente,  $\tau$  sia un tempo e  $\sigma$  una lunghezza. Le loro unità si cancellano nell'espressione integrale dell'area. Supporremo che il moto si svolga fra gli istanti  $\tau_i$  e  $\tau_f$  e che il parametro  $\sigma$  vari fra 0 e  $\sigma_1$ . Per ottenere le unità di un'azione, si può moltiplicare l'integrale per  $\frac{T_0}{c}$ , dove  $T_0$  è una tensione e  $c$  è la velocità della luce, che ci si aspetta compaia naturalmente in una equazione relativistica. L'azione di Nambu-Goto è definita da

$$\begin{aligned} S &= -\frac{T_0}{c} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2} \\ &= -\frac{T_0}{c} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{-|\gamma|}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Ricaviamo adesso le equazioni del moto per una stringa relativistica applicando nuovamente il principio di Hamilton. Sia la densità di lagrangiana

$$\mathcal{L}(\dot{X}, X') = -\frac{T_0}{c} \sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}. \quad (2.38)$$

Se imponiamo che la variazione dell'azione sia nulla, possiamo scrivere

$$\delta S = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} \frac{\partial (\delta X^\mu)}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu'}} \frac{\partial (\delta X^\mu)}{\partial \sigma} \right], \quad (2.39)$$

avendo posto

$$\delta \dot{X}^\mu = \delta \left( \frac{\partial X^\mu}{\partial \tau} \right); \quad (2.40)$$

$$\delta X^{\mu'} = \delta \left( \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \right), \quad (2.41)$$

nonchè tenuto conto del fatto che la delta-variazione e le derivate commutano. Introduciamo delle notazioni compatte per  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu}$  e per  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu'}}$ :

$$\mathcal{P}_\mu^\tau \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X') X'_\mu - (X')^2 \dot{X}_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}, \quad (2.42)$$

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu'}} = -\frac{T_0}{c} \frac{(\dot{X} \cdot X') \dot{X}_\mu - (\dot{X})^2 X'_\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}. \quad (2.43)$$

La variazione dell'azione, dopo un'integrazione per parti, si può adesso riscrivere come

$$\begin{aligned} \delta S = & \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left[ \frac{\partial}{\partial \tau} (\delta X^\mu \mathcal{P}_\mu^\tau) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial \sigma} (\delta X^\mu \mathcal{P}_\mu^\sigma) - \delta X^\mu \left( \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} \right). \end{aligned} \quad (2.44)$$

Ponendola uguale a zero per ottenere condizioni sul moto, otteniamo tre vincoli.

Il primo termine dà contributi proporzionali a  $\delta X^\mu(\tau_i, \sigma)$  ed a  $\delta X^\mu(\tau_f, \sigma)$ . Poichè le configurazioni della stringa negli istanti iniziale e finale sono fissate, questi contributi sono nulli.

Il secondo termine dà il contributo  $\int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau [\delta X^\mu \mathcal{P}_\mu^\sigma]_0^{\sigma_1}$ . Come nel caso non relativistico, può annullarsi identicamente in due modi distinti, che sono

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \tau}(0/\sigma_1, \tau) = 0; \quad (2.45)$$

$$P_\mu^\sigma(0/\sigma_1, \tau) = 0. \quad (2.46)$$

Si riconoscono le condizioni di Dirichlet in un caso, di Neumann nell'altro. Le condizioni ai limiti non devono necessariamente essere uguali per tutte le coordinate, nè per entrambi gli estremi. Il principio di Hamilton richiede solo che la variazione di  $S$  sia nulla, al primo ordine, per ogni traiettoria diversa da quella effettivamente seguita dal sistema. Questo punto non è stato volutamente evidenziato nella discussione classica, perchè in quel caso l'unica coordinata interessata dal movimento era l'ordinata nel piano  $(x, y)$ . Tuttavia si noti che, anche per la corda classica, le condizioni ai limiti non devono essere le stesse per entrambi gli estremi: per esempio, la corda vibrante può avere un estremo assicurato alla parete e l'altro libero di scorrere senza attrito lungo una sbarra parallela all'asse  $y$  posta in  $x = 0$  (o in  $x = a$ ). In teoria delle stringhe, gli oggetti su cui le stringhe sono vincolate a muoversi sono chiamati D-brane (D sta per Dirichlet). Una Dp-brana è un vincolo a  $p$  dimensioni spaziali. Un caso-limite di vincolo è quello in cui il numero di dimensioni delle brana è equivalente al numero di dimensioni dello spazio in cui si lavora: una corda con estremi liberi di muoversi in  $\mathbb{R}^3$ , di fatto, è vincolata ad una brana 3-dimensionale. Una D2-brana è rappresentata nella figura 2.3. Qui, la stringa è vincolata a muoversi con gli estremi assicurati al piano  $x^3 = 0$ .

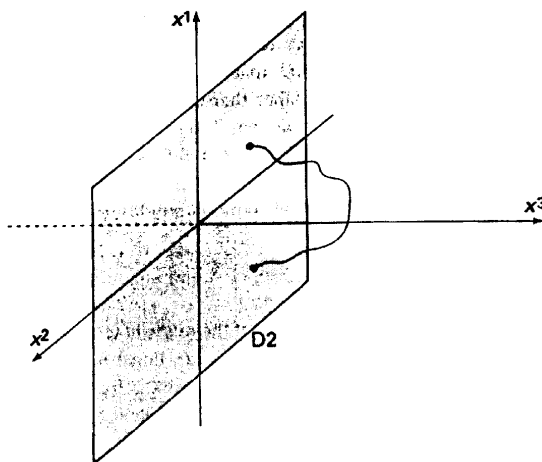


Figura 2.3: Una D2-brana

L'ultimo termine integrando dell'azione restituisce le equazioni del moto, che sono

$$\frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} = 0. \quad (2.47)$$

Vista l'espressione complicata di  $\mathcal{P}_\mu^\tau$  e di  $\mathcal{P}_\mu^\sigma$ , per risolverle, anche nei casi più semplici, è necessario scegliere opportunamente la parametrizzazione del world-sheet.

## 2.5 Il gauge statico

L'invarianza per riparametrizzazioni del world-sheet di una stringa è analoga all'invarianza delle equazioni di Maxwell sotto trasformazioni di gauge in elettrodinamica: modifica l'espressione dell'azione del sistema, ma lascia invariata la struttura delle equazioni del moto. Si parla, allora, per analogia, di *scelta di gauge* quando si sceglie la parametrizzazione del world-sheet. Per tutto il resto del testo, quando si parlerà di scelta di gauge, si intenderà sempre una rappresentazione delle coordinate di stringa, come in questo caso. Per affrontare i primi calcoli, è opportuno porre

$$t(P) = \tau(P) . \quad (2.48)$$

Come fatto implicitamente negli integrali che definiscono l'azione di Nambu-Goto, supporremo che un estremo del world-sheet sia la curva  $\sigma = 0$  e che l'altro estremo sia la curva  $\sigma = \sigma_1$ . Questo significa parametrizzare la stringa, ad ogni istante  $t$ , mediante la sua ascissa curvilinea.

Si noti che, se la stringa è chiusa, descrive un cilindroide nello spazio. Se supponiamo che, ad un qualunque istante di tempo, diciamo  $t = 0$ , la parametrizzazione della stringa si ottenga con  $\sigma \in [0, \sigma_c]$ , questa condizione dovrà valere ad ogni altro istante di tempo. Inoltre, è possibile effettuare l'*identificazione*

$$(\tau, \sigma) \sim (\tau, \sigma + \sigma_c) . \quad (2.49)$$

Si parla di coordinata soggetta ad identificazione quando due tratti qualsiasi di una data lunghezza ( $\sigma_1$  in questo caso), giacenti lungo l'asse della coordinata in questione, rappresentano la stessa entità fisica per uguali valori del resto del set di coordinate<sup>3</sup>. In questo caso, la stringa chiusa è rappresentata ugualmente da qualunque tratto di lunghezza  $\sigma_1$  dell'asse  $\sigma$  dello spazio dei parametri per un fissato valore di  $\tau$ . Scegliere  $[0, \sigma_1]$  è una (comoda) convenzione. Con queste premesse, possiamo scrivere le coordinate di stringa così:

$$X^\mu(\tau, \sigma) = X^\mu(t, \sigma) = [ct, \vec{X}(t, \sigma)] . \quad (2.50)$$

Valutiamo  $X^{\mu'}$  e  $\dot{X}^\mu$ :

$$X^{\mu'} = \left( \frac{\partial X^0}{\partial \sigma}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right) = \left( 0, \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right) ; \quad (2.51)$$

$$\dot{X}^\mu = \left( \frac{\partial X^0}{\partial t}, \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right) = \left( c, \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right) . \quad (2.52)$$

Calcoliamo, adesso, la tensione e l'energia di una stringa che si stende fra i punti  $x^1 = 0$  ed  $x^1 = a$  e con  $x^i = 0, i = 2, 3, 4..$ , ponendo  $X^0 = c\tau$ .

---

<sup>3</sup>Cf. [5, pagg. 38-43]

Sia  $X^1(\tau, \sigma) = f(\sigma)$ , con  $f(\sigma)$  funzione strettamente crescente di  $\sigma$  e con  $f(0) = 0$  ed  $f(\sigma_1) = a$ . Allora le espressioni delle derivate si riducono a

$$\dot{X}^\mu = (c, 0, \vec{0}) ; \quad (2.53)$$

$$X^{\mu'} = (0, f', \vec{0}) . \quad (2.54)$$

Qui  $f' = \frac{\partial f}{\partial \sigma}$ . Si può allora scrivere l'azione:

$$\begin{aligned} S &= -\frac{T_0}{c} \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \sqrt{0 - (f')^2 (-c^2)} = -T_0 \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \frac{\partial f}{\partial \sigma} \\ &= -T_0 \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau (f(\sigma_1) - f(0)) = \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau (-T_0 a) . \end{aligned} \quad (2.55)$$

Evidentemente, come ci si aspetta, l'azione non dipende dalla funzione che descrive la configurazione della stringa. Poichè la stringa è ferma, nel sistema di riferimento scelto, l'integrando fra  $\tau_i$  e  $\tau_f$ , che è la lagrangiana del sistema, è  $-V$ , l'energia potenziale con un segno  $-$ . Concludiamo che

$$V = T_0 a . \quad (2.56)$$

La tensione della stringa si può interpretare come energia per unità di lunghezza. Poichè quest'ultima, per una stringa con densità di massa uniforme e a riposo è  $E = \mu_0 c^2$ , ne deduciamo infine che

$$\frac{V}{a} = \mu_0 c^2 = T_0 \quad (2.57)$$

da cui

$$\mu_0 = \frac{T_0}{c^2} . \quad (2.58)$$

Per finire, si deve verificare che la configurazione che abbiamo discusso soddisfi le equazioni del moto e le condizioni ai limiti. Poichè  $\dot{X}^\mu$  e  $X^{\mu'}$  non dipendono da  $\tau$ , le equazioni del moto sono semplicemente

$$\frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} = 0 . \quad (2.59)$$

In questo caso

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma = -\frac{T_0}{c} \frac{c^2 X^{\mu'}}{\sqrt{c^2 (f')^2}} = -T_0 \frac{X^{\mu'}}{f'} . \quad (2.60)$$

Per  $\mu \neq 1$  questa quantità è 0. Per  $\mu = 1$  è semplicemente  $-T_0$ . Le equazioni del moto sono soddisfatte.

Sono soddisfatte anche le condizioni ai limiti, perchè  $\dot{X}^\mu = 0$  per  $\mu \neq 0$ . Per  $\mu = 0$  non vale una condizione di tipo Dirichlet, perchè l'istante di tempo non è fissato. Deve quindi valere una condizione di tipo Neumann, ovvero  $\mathcal{P}_0^\sigma = 0$ , ma questo è vero.

## 2.6 Azione in funzione della velocità trasversa

Vogliamo mostrare come sia possibile definire una velocità, per la stringa, invariante per riparametrizzazioni, mediante la quale sia possibile riesprimere l'azione di Nambu-Goto. Denotiamo con  $\vec{X}(\tau, \sigma)$  il vettore delle coordinate spaziali della stringa. La definizione più immediata di velocità è  $\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}(\tau, \sigma)$ ; ma questo vettore dipende dalla scelta della parametrizzazione rispetto a  $\sigma$ . Per convincersi dell'esistenza di una velocità invariante, si consideri la superficie che la stringa descrive nello spazio al passare del tempo, la sua *scia*. Come riferimento, si utilizzi la figura 2.4.

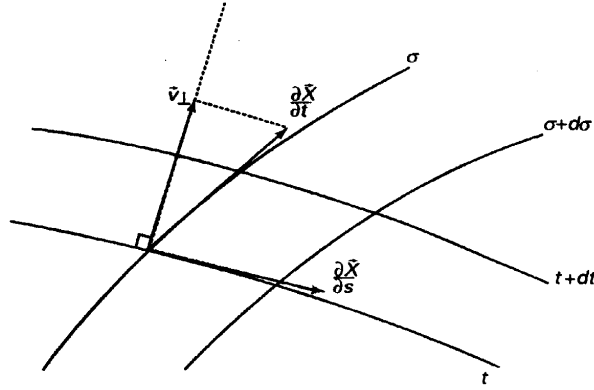


Figura 2.4: La componente della velocità della stringa ortogonale ad essa in un suo punto generico

In ogni istante di tempo, la stringa si trova in una data configurazione. Per ogni suo punto, esiste un piano ortogonale alla tangente alla curva che la stringa descrive. Ogni punto della stringa, in generale, si muoverà con una velocità che ha una componente lungo la tangente alla curva descritta e un'altra lungo il piano ortogonale alla stringa in quel punto. Quest'ultima è chiamata velocità trasversa, che indicheremo con  $\vec{v}_\perp$ . È evidente che questa velocità è invariante per riparametrizzazioni: come la lunghezza di un vettore o l'area di una superficie, è una proprietà geometrica intrinseca del moto, che non può dipendere dalla sua rappresentazione matematica.

Consideriamo adesso, per ogni istante  $t$ , la parametrizzazione naturale della curva descritta dalla stringa. Sia  $\sigma \in [0, \sigma_1]$ . Sia  $s(\sigma)$  la lunghezza del tratto di stringa corrispondente, nel dominio  $\omega$  di definizione del world-sheet, a  $[0, \sigma] \subset [0, \sigma_1]$  (ovvero, il valore della funzione ascissa curvilinea della stringa nel punto  $\sigma$ ). Quindi  $s(0) = 0$ , mentre  $s(\sigma_1)$  è la lunghezza dell'intera stringa aperta. Allora  $ds$  è la lunghezza del vettore  $d\vec{X}$  corrispondente ai

parametri  $t = \text{costante}$  e  $d\sigma$ . Dunque

$$ds = |d\vec{X}| = \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right| |d\sigma|. \quad (2.61)$$

Consideriamo la quantità  $\frac{\partial \vec{X}}{\partial s}$ , la variazione del vettore  $\vec{X}$  con la lunghezza della stringa. Il vettore  $\frac{\partial \vec{X}}{\partial s}$  è unitario,

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial s} \right)^2 = \left| \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right|^2 \left( \frac{\partial \sigma}{\partial s} \right)^2 = 1, \quad (2.62)$$

dove l'ultimo passaggio segue da (2.61). Il vettore  $\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}$ , essendo una derivata del vettore delle coordinate spaziali della stringa a tempo fissato, ovvero effettuata lungo la stringa nella sua configurazione al tempo  $t$ , è tangente alla stringa. Poichè

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial s} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial s}, \quad (2.63)$$

anche  $\frac{\partial \vec{X}}{\partial s}$  è tangente alla stringa, oltre ad essere unitario.

Definiamo  $\vec{v}_\perp$  come la componente di  $\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}$  ortogonale alla stringa. Possiamo evidentemente ricavarla sottraendo a  $\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}$  la componente parallela alla stringa, ovvero come

$$\vec{v}_\perp = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} - \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right) \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}. \quad (2.64)$$

Il modulo quadro (siamo in metrica euclidea) è dato da

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 - 2 \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right) \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right) + \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right)^2 \\ &= \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 - \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right)^2. \end{aligned} \quad (2.65)$$

Per riscrivere l'azione per la stringa si devono riesprimere  $(\dot{X})^2, (X')^2, (\dot{X} \cdot X')$  in termini di  $\vec{v}_\perp$ :

$$(\dot{X})^2 = c^2 - \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2; \quad (2.66)$$

$$(X')^2 = - \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2; \quad (2.67)$$

$$(\dot{X} \cdot X') = - \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}. \quad (2.68)$$

Possiamo scrivere il radicando che compare sotto integrale nell'azione in forma diversa:

$$\begin{aligned} (\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2 &= \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2 + \left[ c^2 - \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 \right] \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2 \\ &= \left( \frac{ds}{d\sigma} \right)^2 \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right)^2 + c^2 - \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 = \left( \frac{ds}{d\sigma} \right)^2 (c^2 - v_{\perp}^2) . \end{aligned} \quad (2.69)$$

Quindi l'integrando diventa

$$\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2} = c \frac{ds}{d\sigma} \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}} . \quad (2.70)$$

L'azione si può riscrivere allora come

$$S = -T_0 \int_{\tau_i}^{\tau_f} d\tau \int_0^{\sigma_1} d\sigma \left( \frac{ds}{d\sigma} \right) \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}} . \quad (2.71)$$

Come nel caso non relativistico,  $-T_0 ds$  è l'opposto dell'energia a riposo della stringa. La lagrangiana associata si ottiene integrando questa, moltiplicata per un fattore relativistico, su tutta la lunghezza della stringa. Ricordando che  $-mc^2$  è l'opposto dell'energia a riposo di un punto materiale di massa  $m$ , ne scriviamo qui l'azione per il moto non vincolato, per evidenziare la somiglianza fra le due espressioni.

$$S = -mc^2 \int_{t_i}^{t_f} dt \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} . \quad (2.72)$$

L'azione per la stringa relativistica si presenta come la naturale generalizzazione di (2.72)<sup>4</sup>.

## 2.7 Moto degli estremi di una stringa aperta

Consideriamo il problema del moto degli estremi di una stringa aperta, con condizioni ai limiti di tipo Neumann per ogni coordinata, che qui richiamiamo:

$$\mathcal{P}_{\mu}^{\sigma}(0, \tau) = \mathcal{P}_{\mu}^{\sigma}(\sigma_1, \tau) . \quad (2.73)$$

Considerata l'espressione (2.43) di  $\mathcal{P}_{\mu}^{\sigma}$ , usando le espressioni di  $\dot{X}$  e  $X'$  ricavate in (2.66), riscriviamo

$$\mathcal{P}_{\mu}^{\sigma} = \frac{T_0}{c} \frac{\left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right) \dot{X}_{\mu} - \left( -c^2 + \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 \right) X'_{\mu}}{c \frac{ds}{d\sigma} \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}} . \quad (2.74)$$

---

<sup>4</sup>Per la derivazione delle equazioni del moto di una particella relativistica, libera o in un campo elettromagnetico, cf. [4, cap. 2,3]

Portando  $\frac{ds}{d\sigma}$  al numeratore, le derivate rispetto a  $\sigma$  si possono riesprimere come derivate rispetto ad  $s$ , restituendo l'espressione

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma = \frac{T_0}{c^2} \frac{\left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right) \dot{X}_\mu + \left( c^2 - \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 \right) \frac{\partial X_\mu}{\partial s}}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}}. \quad (2.75)$$

Proveremo che gli estremi si muovono trasversalmente alla stringa alla velocità della luce. Per provare la prima affermazione, si consideri la componente 0 di  $\mathcal{P}_\mu^\sigma$ , che è

$$\mathcal{P}_0^\sigma = -\frac{T_0}{c} \frac{\left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right)}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}}. \quad (2.76)$$

Deve essere 0, per  $\sigma = 0$  e  $\sigma = \sigma_1$ , dal momento che valgono condizioni ai limiti di tipo Neumann. Quindi, negli estremi, risulta

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} = 0, \quad (2.77)$$

il che prova che la velocità degli estremi è ortogonale, in ogni istante, alla stringa :  $\vec{v} = \vec{v}_\perp$ . Usando (2.77) per semplificare le espressioni di  $\mathcal{P}_\mu^\sigma$ , per  $\mu \neq 0$ , negli estremi della stringa ricaviamo

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma = -\frac{T_0}{c^2} \frac{c^2 \left( 1 - \frac{v^2}{c^2} \right) \left( \frac{\partial X_\mu}{\partial s} \right)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = -T_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{\partial X_\mu}{\partial s}. \quad (2.78)$$

In notazione vettoriale compatta per tutta la parte spaziale del vettore di stringa, tenendo conto che valgono condizioni agli estremi di tipo Neumann, risulta che

$$\vec{\mathcal{P}}^\sigma = -T_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} = 0. \quad (2.79)$$

L'unico modo perchè l'equazione sia soddisfatta è che sia

$$v^2 = c^2. \quad (2.80)$$

Questo prova che gli estremi si muovono alla velocità della luce.

## Capitolo 3

# Parametrizzazione e moto di una stringa

*In questo capitolo studiamo le equazioni del moto per la stringa relativistica in una particolare parametrizzazione, che completa la richiesta, fatta nel capitolo precedente, che il parametro  $\tau$  coincida con il tempo. Studiamo, quindi, le proprietà delle soluzioni delle equazioni del moto, concludendo con la discussione di una semplice applicazione.*

### 3.1 Parametrizzazione nel *gauge statico*

Per risolvere le equazioni del moto, è necessario definire completamente la parametrizzazione del world-sheet<sup>1</sup>. Nel capitolo precedente abbiamo solo imposto, scegliendo il cosiddetto *gauge statico*, che fosse  $t = \tau$ , senza alcuna condizione su  $\sigma$ . Ora, date le complicate espressioni (2.42) e (2.43) di  $\mathcal{P}_\mu^\tau$  e di  $\mathcal{P}_\mu^\sigma$  che abbiamo ricavato, è lampante che l'equazione sarà, in generale, estremamente ostica. Per semplificarla il più possibile, magari linearizzarla, è necessario imporre una parametrizzazione conveniente, che semplifichi queste espressioni. Discutiamo ora quella più semplice. Nel capitolo 5 la generalizzeremo. Richiediamo che le curve definite da  $\tau = \text{costante}$  siano ortogonali alle curve definite da  $\sigma = \text{costante}$ . Concretamente, la costruzione della superficie si può immaginare come segue, riferendosi alla figura 3.1. Si supponga di fissare la configurazione della stringa ad un dato istante, diciamo a  $t = 0 : \sigma \in [0, \sigma_1]$ .

All'istante successivo  $\Delta t$ , infinitesimo, costruiamo la curva  $t = \Delta t$ , imponendo che il punto di coordinata  $\sigma = \sigma_c \in [0, \sigma_1]$  si trovi lungo la perpendicolare alla stringa, nella sua configurazione a  $t = 0$ , nel punto  $\sigma = \sigma_c$ , distante dal piede per un infinitesimo. Iterando questa costruzione fra l'istante iniziale e finale, si ottiene la superficie che, al passare del tempo, la stringa descrive

---

<sup>1</sup>Per questo capitolo, il riferimento è [5, cap.7]

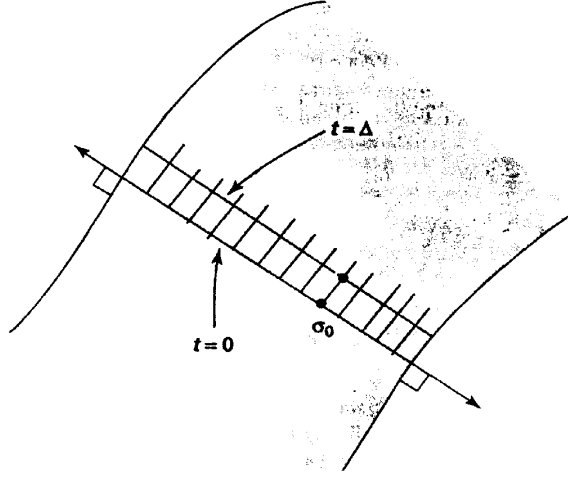


Figura 3.1: Costruzione della stringa al tempo  $\Delta t$  a partire da quella al tempo  $t = 0$

nello spazio. Si noti che questa non coincide col world-sheet, che è un'entità dello spazio-tempo di Minkowski, ma si può immaginare come una scia lasciata nello spazio euclideo dalla stringa in movimento. Matematicamente, questa costruzione si esprime mediante la seguente condizione:

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = 0. \quad (3.1)$$

È una relazione che coinvolge solo le parti spaziali del quadrivettore di stringa  $X^\mu$ , dal momento che, essendo  $X^0 = ct$ , la sua derivata rispetto a  $\sigma$  è nulla. Inoltre, essendo, per costruzione,  $\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}$  ortogonale alle linee  $t = \text{costante}$ , cioè alle stringhe come sono rappresentate nel gauge statico, è

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = v_\perp. \quad (3.2)$$

Le espressioni di  $\mathcal{P}^{\sigma\mu}$  e  $\mathcal{P}^{\tau\mu}$  si riducono a

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{T_0}{c^2} \frac{c^2 \left( \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}} \right)^2 \frac{\partial X^\mu}{\partial s}}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}} = -T_0 \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}} \frac{\partial X^\mu}{\partial s}; \quad (3.3)$$

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = -\frac{T_0}{c} \frac{-\left(\frac{ds}{d\sigma}\right)^2 \frac{\partial X^\mu}{\partial t}}{c \left(\frac{ds}{d\sigma}\right) \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}} = \frac{T_0}{c^2} \frac{\left(\frac{ds}{d\sigma}\right)}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}} \frac{\partial X^\mu}{\partial t}. \quad (3.4)$$

Infatti, valutando il prodotto scalare  $\dot{X} \cdot X'$ ,

$$\dot{X} \cdot X' = c \cdot 0 - \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = 0, \quad (3.5)$$

$$\dot{X}^2 = c^2 - \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 = c^2 - v_\perp^2, \quad (3.6)$$

$$X'^2 = - \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2 = - \left( \frac{ds}{d\sigma} \right)^2. \quad (3.7)$$

Richiamiamo l'equazione del moto:

$$\frac{\partial \mathcal{P}^{\tau\mu}}{\partial t} = - \frac{\partial \mathcal{P}^{\sigma\mu}}{\partial \sigma}. \quad (3.8)$$

La componente  $\mu = 0$  dell'equazione, poichè  $\mathcal{P}^{\sigma 0} = 0$ , è semplicemente

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\frac{ds}{d\sigma} T_0}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}} \right) = 0. \quad (3.9)$$

Per interpretare fisicamente questo risultato, calcoliamo la densità di energia di una stringa relativistica. Questa è nient'altro che la densità di hamiltoniana, che si può ricavare calcolando la densità di momento canonico  $\vec{\mathcal{P}}(\tau, \sigma) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \vec{X})}$ . Dall'espressione della densità di lagrangiana,

$$\mathcal{L} = -\frac{T_0}{c} \sqrt{\left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2 + c^2 \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2 - \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2}, \quad (3.10)$$

otteniamo

$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{P}}(\sigma, t) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \vec{X})} \\ &= -\frac{T_0}{c} \frac{\left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right) \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} - \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2 \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}}{\sqrt{\left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2 + c^2 \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2 - \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2}} \\ &= \frac{T_0}{c} \frac{\left( \frac{ds}{d\sigma} \right)^2 \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right) \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} + \frac{\partial \vec{X}}{\partial t}}{\left( \frac{ds}{d\sigma} \right) \sqrt{\left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right)^2 + c^2 - \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2}} \\ &= \frac{T_0}{c^2} \left( \frac{ds}{d\sigma} \right) \frac{\vec{v}_\perp}{\sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}}}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Applicando la trasformazione di Legendre, vediamo che la densità di hamiltoniana per la stringa è

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \vec{\mathcal{P}} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} - \mathcal{L} = \frac{T_0}{c^2} \left( \frac{ds}{d\sigma} \right) \frac{v_{\perp}^2}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}} - \mathcal{L} \\ &= T_0 \left( \frac{ds}{d\sigma} \right) \frac{\frac{v_{\perp}^2}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}} + T_0 \left( \frac{ds}{d\sigma} \right) \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}} = T_0 \left( \frac{ds}{d\sigma} \right) \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}}. \quad (3.12)\end{aligned}$$

L'hamiltoniana complessiva del sistema, cioè la sua energia totale, in un generico istante  $t$ , si ottiene integrando la densità su tutta la stringa:

$$H = \int_0^{\sigma_1} \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}} \left( \frac{ds}{d\sigma} \right) d\sigma. \quad (3.13)$$

Eliminato il fattore  $d\sigma$ , la densità di energia della stringa si semplifica a

$$\frac{T_0 ds}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}}. \quad (3.14)$$

Interpretare (3.9) è ora immediato: moltiplicando l'argomento della derivata per la costante  $d\sigma$ , non cambia nulla. Quindi, l'equazione stabilisce che l'energia si conserva in ogni tratto  $d\sigma$  della stringa.

Venendo alla parte spaziale dell'equazione, le espressioni di  $\vec{\mathcal{P}}^{\tau}$  e di  $\vec{\mathcal{P}}^{\sigma}$  sono:

$$\vec{\mathcal{P}}^{\tau} = \frac{T_0}{c^2} \frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}} \vec{v}_{\perp}; \quad (3.15)$$

$$\vec{\mathcal{P}}^{\sigma} = -T_0 \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}} \frac{\partial \vec{X}}{\partial s}. \quad (3.16)$$

L'equazione del moto per la parte spaziale ( $\mu \neq 0$ ) è, invece,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial \sigma} \left( T_0 \sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}} \frac{\partial \vec{X}}{\partial s} \right) &= \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{T_0}{c^2} \frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}} \vec{v}_{\perp} \right) \\ &= \frac{T_0}{c^2} \frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}} \frac{\partial \vec{v}_{\perp}}{\partial t}.\end{aligned} \quad (3.17)$$

Nell'ultimo passaggio si è utilizzata la conservazione locale dell'energia stabilita dalla componente  $\mu = 0$  dell'equazione del moto.

### 3.2 Imposizione della parametrizzazione iniziale e vincoli

Il procedimento euristico utilizzato sopra per parametrizzare una stringa nel gauge statico al tempo  $t + \Delta t$ , se è nota la sua configurazione al tempo  $t$ , presuppone che siano note le coordinate di tutti i punti della stringa ad un dato istante iniziale, dal quale iniziare la costruzione degli stati successivi. La legge di conservazione della densità di energia fornisce uno spunto prezioso per imporre la parametrizzazione iniziale. Riscriviamo l'equazione del moto come

$$\frac{1}{c^2} \left[ \frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}} \right] \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial \sigma} \left[ \frac{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}}{\left(\frac{ds}{d\sigma}\right)} \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right], \quad (3.18)$$

e definiamo  $A(\sigma)$  come

$$A(\sigma) \equiv \frac{\frac{ds}{d\sigma}}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}}, \quad (3.19)$$

che è una quantità indipendente dal tempo. A questo punto, effettuata la sostituzione  $d\sigma \rightarrow d\sigma' = A(\sigma) d\sigma$ , (3.18) diviene

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial \sigma'^2}, \quad (3.20)$$

che è un'equazione d'onda. Si verifica subito che la condizione di ortogonalità imposta all'inizio del capitolo è preservata:

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} = \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma'} \frac{d\sigma'}{d\sigma} = 0, \quad (3.21)$$

che implica

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma'} = 0, \quad (3.22)$$

che è chiaro intuitivamente: la parametrizzazione mediante ascissa curvilinea è stata cambiata per un fattore localmente costante nel tempo, quindi la direzione, nello spazio, della tangente alla stringa in ogni punto non cambia. Scriviamo esplicitamente la definizione di  $d\sigma'$ .

$$d\sigma' = \frac{ds}{\sqrt{1 - \frac{v_{\perp}^2}{c^2}}} = \frac{dE}{T_0} : \quad (3.23)$$

la densità lineare di energia è costante ed uguale alla tensione della stringa. Quindi, se ad un estremo di una stringa aperta facciamo corrispondere il punto  $\sigma' = 0$ , integrando (3.23) otteniamo

$$\sigma'(P) = \frac{E(P)}{T_0}, \quad (3.24)$$

dove  $P$  è un punto della stringa. Ovviamente

$$\sigma' \in [0, \sigma_1], \quad \sigma_1 = \frac{E}{T_0}, \quad (3.25)$$

con  $E$  energia totale della stringa.

Riaggiustando (3.23) si ottiene un'altra equazione vincolare:

$$\left( \frac{ds}{d\sigma'} \right)^2 + \frac{v_\perp^2}{c^2} = 1, \quad (3.26)$$

che si riscrive, grazie a (3.2) e a (3.7), in termini di  $\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma'}$  e di  $\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}$ ,

$$\left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma'} \right)^2 + \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 = 1. \quad (3.27)$$

L'ultimo vincolo sono le condizioni ai limiti. Sappiamo che

$$\vec{P}^\sigma = -T_0 \sqrt{1 - \frac{v_\perp^2}{c^2}} \frac{d\sigma'}{ds} \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma'} = -T_0 \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma'}, \quad (3.28)$$

per la definizione di  $d\sigma'$ . Quindi la condizione ai limiti di Neumann diventa:

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma'} = 0. \quad (3.29)$$

Pertanto, in questo caso, la condizione ai limiti, essendo espressa in termini di derivata delle coordinate, assume la stessa forma che in meccanica classica per la prima volta dall'inizio della discussione relativistica. Stabilendo di chiamare, d'ora in avanti, il parametro  $\sigma'$  semplicemente  $\sigma$ , il sistema di equazioni diventa

$$\frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial \sigma^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial t^2} = 0, \quad (3.30)$$

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} = 0, \quad (3.31)$$

$$\left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2 + \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 = 1, \quad (3.32)$$

$$\left. \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=0/\sigma_1} = 0. \quad (3.33)$$

### 3.3 La soluzione generale dell'equazione d'onda

Come è ben noto e come si è già ricordato discutendo il caso classico, la soluzione dell'equazione d'onda è una sovrapposizione di un'onda progressiva e di un'onda regressiva<sup>2</sup>:

$$\vec{X}(t, \sigma) = \frac{1}{2} \left[ \vec{F}(ct + \sigma) + \vec{G}(ct - \sigma) \right]. \quad (3.34)$$

Derivando rispetto all'argomento, otteniamo, per la prima delle condizioni ai limiti :

$$\left. \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=0} = 0 \quad (3.35)$$

che implica

$$\vec{F}'(ct) - \vec{G}'(ct) = 0. \quad (3.36)$$

Quindi  $\vec{F}$  e  $\vec{G}$  differiscono per un vettore costante, che chiamiamo  $\vec{a}$ . La soluzione si riscrive ora in termini della sola  $\vec{F}$ :

$$\begin{aligned} \vec{X}(t, \sigma) &= \frac{1}{2} \left[ \vec{F}(ct + \sigma) + \vec{F}(ct - \sigma) + \vec{a} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[ \vec{F}(ct + \sigma) + \vec{F}(ct - \sigma) \right], \end{aligned} \quad (3.37)$$

dove il vettore costante  $\frac{\vec{a}}{2}$  è stato assorbito nella definizione di  $\vec{F}$ . Sfruttando la seconda delle condizioni ai limiti, invece,

$$\left. \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=\sigma_1} = 0; \text{ da cui } \vec{F}'(ct + \sigma_1) - \vec{F}'(ct - \sigma_1) = 0. \quad (3.38)$$

Poichè il tempo  $t$  è arbitrario, anche questa equazione sussiste per qualunque valore dell'argomento di  $\vec{F}$ , diciamo  $Q$ , e allora

$$\vec{F}'(Q + 2\sigma_1) = \vec{F}'(Q); \text{ quindi } \vec{F}(Q + 2\sigma_1) = \vec{F}(Q) + 2\sigma_1 \frac{\vec{v}_0}{c}, \quad (3.39)$$

dove  $\vec{v}_0$  è un vettore costante. Questa scrittura mette in evidenza la quasi-periodicità della soluzione:  $\frac{2\sigma_1}{c}$  è un tempo,  $\vec{v}_0$  una velocità costante. Si evince subito che, dopo un tempo  $\Delta t = \frac{2\sigma_1}{c}$ , la posizione di un qualunque punto della stringa cambia di  $\vec{v}_0 \Delta t$ . Dunque,  $\vec{v}_0$  è la velocità media di ogni punto della stringa in un intervallo di tempo  $\frac{2\sigma_1}{c}$ .

Adesso, sommando e sottraendo membro a membro le equazioni (3.31) e (3.32) si ottiene

$$\left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \right)^2 \pm \frac{2}{c} \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 = 1, \text{ perciò } \left( \frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \pm \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} \right)^2 = 1. \quad (3.40)$$

---

<sup>2</sup>Cf. [4, pagg.147-150]

Valutando  $\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma}$  e  $\frac{\partial \vec{X}}{\partial t}$  in termini di  $\vec{F}(ct \pm \sigma)$  :

$$\frac{\partial \vec{X}}{\partial \sigma} \pm \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{X}}{\partial t} = \pm \vec{F}'(ct \pm \sigma) \quad (3.41)$$

da cui

$$\vec{F}' \cdot \vec{F}' = |\vec{F}'|^2 = 1. \quad (3.42)$$

Possiamo riassumere le espressioni delle equazioni del moto e dei vincoli in termini di  $\vec{F}$  nel seguente sistema:

$$\vec{X}(t, \sigma) = \frac{1}{2} [\vec{F}(ct + \sigma) + \vec{F}(ct - \sigma)]; \quad (3.43)$$

$$\left| \frac{d\vec{F}(Q)}{dQ} \right|^2 = 1; \quad (3.44)$$

$$\vec{F}(u + 2\sigma_1) = \vec{F}(Q) + 2\sigma_1 \frac{\vec{v}_0}{c}. \quad (3.45)$$

Ora, posto  $\sigma = 0$  nell'argomento di  $\vec{F}$ , otteniamo che

$$\vec{X}(t, 0) = \vec{F}(ct). \quad (3.46)$$

$\vec{F}(Q)$  è la posizione del punto  $\sigma = 0$ , estremo della stringa, all'istante  $t = \frac{Q}{c}$ . Poichè  $\vec{F}$  è, inoltre, quasi-periodica, con periodo  $T = \frac{2\sigma_1}{c}$ , per ricostruire completamente il moto della stringa è sufficiente seguire il moto dell'estremo  $\sigma = 0$  per un tempo  $\Delta t = T = \frac{2\sigma_1}{c} = \frac{2E}{cT_0}$ .

### 3.4 Applicazione: il rotatore rigido

Consideriamo una stringa di lunghezza  $l$ , che ruota nel piano  $(x, y)$  con pulsazione  $\omega$  attorno al punto  $(0, 0)$ , coincidente con il suo centro, come in figura 3.2.

Sappiamo che il moto delle coordinate dell'estremo  $\sigma = 0$ , come si vede dalla figura, è descritto dal vettore

$$\vec{X}(t, 0) = \frac{l}{2} (\cos \omega t, \sin \omega t). \quad (3.47)$$

Poichè  $\vec{F}(ct) = \vec{X}(t, 0)$ , concludiamo che

$$\vec{F}(Q) = \frac{l}{2} \left( \cos \frac{\omega Q}{c}, \sin \frac{\omega Q}{c} \right). \quad (3.48)$$

Dalla periodicità del moto si conclude che

$$\frac{2\pi c}{\omega} = 2\sigma_1; \text{ quindi } \frac{\omega}{c} = \frac{\pi}{\sigma_1} = \frac{\pi T_0}{E}. \quad (3.49)$$

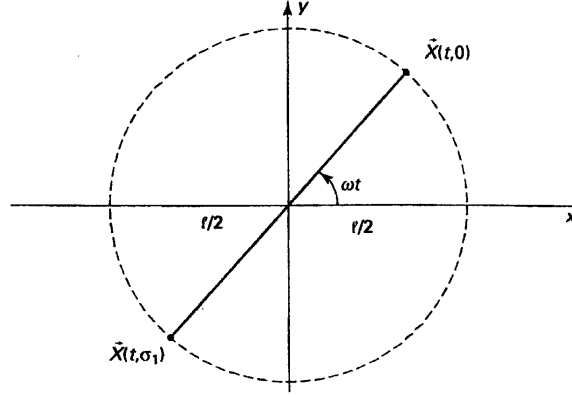


Figura 3.2: Stringa che ruota rigidamente nel piano attorno all'origine

La condizione (3.44) implica che il modulo quadro della derivata sia 1.

$$\frac{d\vec{F}}{dQ} = \frac{\omega l}{2c} \left( -\sin \frac{\pi Q}{\sigma_1}, \cos \frac{\pi Q}{\sigma_1} \right)$$

da cui  $\left( \frac{\omega l}{2c} \right)^2 = 1$  quindi  $\frac{2c}{\omega} = \frac{2\sigma_1}{\pi} = \frac{2}{\pi} \frac{E}{T_0}$ . (3.50)

L'espressione completa di  $\vec{X}(t, \sigma)$  è

$$\begin{aligned} \vec{X}(t, \sigma) &= \frac{\sigma_1}{2\pi} \left( \cos \frac{\pi(ct + \sigma)}{\sigma_1} + \cos \frac{\pi(ct - \sigma)}{\sigma_1}, \right. \\ &\quad \left. \sin \frac{\pi(ct + \sigma)}{\sigma_1} + \sin \frac{\pi(ct - \sigma)}{\sigma_1} \right). \end{aligned} \quad (3.51)$$

Questa diventa, con qualche aggiustamento,

$$\vec{X}(t, \sigma) = \frac{\sigma_1}{\pi} \cos \frac{\pi\sigma}{\sigma_1} \left( \cos \frac{\pi ct}{\sigma_1}, \sin \frac{\pi ct}{\sigma_1} \right). \quad (3.52)$$

Supponiamo, adesso, di parametrizzare la stringa con  $s \in [-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}]$ , scegliendo  $s = 0$  nel punto  $(0, 0)$ . Sia  $E(s)$  l'energia per unità di lunghezza della stringa. Come è noto dal calcolo precedente della densità di hamiltoniana:

$$E(\sigma) = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} \frac{ds}{d\sigma} \rightarrow \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{v_1^2}{c^2}}} = E(s). \quad (3.53)$$

Poichè, per un moto circolare, come quello seguito da tutti i punti della stringa, la velocità è

$$v = v_{\perp} = \omega s, \quad (3.54)$$

e poichè gli estremi, per il primo dei quali  $s = \frac{l}{2}$ , si muovono sempre alla velocità della luce,

$$v = c, s = \frac{l}{2}, \text{ che implica } \omega = \frac{2c}{l}. \quad (3.55)$$

La densità di energia, in termini di  $s$ , è allora

$$E(s) = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{4s^2}{l^2}}}. \quad (3.56)$$

Notiamo che la densità di energia diverge agli estremi. Tuttavia, l'energia totale della stringa è finita, come si dimostra con un'integrazione elementare:

$$E = \int_{-\frac{l}{2}}^{+\frac{l}{2}} \frac{T_0 ds}{\sqrt{1 - \frac{4s^2}{l^2}}} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{T_0 l \cos \theta}{2 \cos \theta} d\theta = \frac{\pi T_0 l}{2}, \quad (3.57)$$

dopo avere effettuato la sostituzione

$$s = \frac{l}{2} \sin \theta, \quad (3.58)$$

risultato in accordo con l'equazione (3.4).

## Capitolo 4

# Leggi di conservazione e correnti di world-sheet

*Esaminiamo, in questo quarto capitolo, le leggi di conservazione del momento lineare della stringa relativistica e quelle legate al suo tensore energia-impulso. Cominciamo richiamando dei risultati generali, ottenuti dalla meccanica lagrangiana, quindi passiamo a discutere il problema che riguarda da vicino questo lavoro.*

*Concludiamo sfruttando il rotatore rigido, discusso nel capitolo precedente, per introdurre un parametro significativo in teoria delle stringhe:  $\alpha'$ .*

### 4.1 Risultati della meccanica Lagrangiana

In questo capitolo si derivano le leggi di conservazione fondamentali per le stringhe relativistiche, con il formalismo ed i metodi della meccanica analitica lagrangiana<sup>1</sup>. Ricordiamo, a proposito, come si individua, in quest'ambito, una quantità che si conserva nel tempo. Supponiamo che, variando la lagrangiana del sistema  $L(q, \dot{q}, t)$ , mediante una trasformazione infinitesima della coordinata  $q(t)$  del tipo di

$$q(t) \rightarrow q(t) + \delta q(t) , \quad (4.1)$$

con

$$\delta q(t) = \epsilon h(q, \dot{q}, t) , \quad (4.2)$$

dove  $\epsilon$  è una costante infinitesima e  $h$  una funzione, questa si modifichi al più per una derivata totale rispetto al tempo:

$$\delta L = \frac{d}{dt}(\epsilon \Lambda) . \quad (4.3)$$

---

<sup>1</sup>Per il legame fra simmetrie e leggi di conservazione, cf. [3, cap. 2] e [1, cap. 52]

La variazione della velocità è

$$\dot{q}(t) \rightarrow \dot{q}(t) + \frac{d}{dt}[\delta q(t)]. \quad (4.4)$$

Se la variazione della lagrangiana, che può essere arrestata a termini del primo ordine, dato che  $\epsilon$  è infinitesimo, è come sopra, allora la quantità  $Q$ , definita da

$$\epsilon Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q - \epsilon \Lambda, \quad (4.5)$$

si conserva lungo la traiettoria seguita realmente dal sistema nello spazio delle fasi. Derivando rispetto al tempo, infatti, otteniamo

$$\epsilon \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \frac{d}{dt} \delta q - \frac{d}{dt} (\epsilon \Lambda). \quad (4.6)$$

Consideriamo le equazioni di Eulero-Lagrange,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} = 0. \quad (4.7)$$

L'equazione (4.6), sostituendovi (4.7) diventa

$$\epsilon \frac{dQ}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} - \frac{d}{dt} (\epsilon \Lambda) = \delta L - \delta L = 0. \quad (4.8)$$

Il caso  $\lambda = 0$  (lagrangiana invariante sotto la trasformazione) è un caso particolare di questa situazione più generale.

Consideriamo due esempi.

Sia  $L = L(\dot{q})$  la lagrangiana di un punto materiale e  $q(t) \rightarrow q(t) + \epsilon$ , con  $\epsilon$  costante, la trasformazione di coordinate. Poichè  $\dot{q}$  non varia sotto questa trasformazione, la lagrangiana resta invariata. Ora,  $\delta q = \epsilon$ , quindi risulta

$$\epsilon Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \epsilon \text{ quindi } Q = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}. \quad (4.9)$$

Riconosciamo subito, in questa espressione, la legge di conservazione del momento lineare della particella.

Sia, invece,  $L = L(q(t), \dot{q}(t))$  la lagrangiana dello stesso sistema, non dipendente esplicitamente dal tempo, e  $q(t) \rightarrow q(t) + \epsilon \dot{q}(t)$  la trasformazione di coordinate. Allora

$$\delta q = \epsilon \dot{q}; \quad (4.10)$$

$$\delta \dot{q} = \epsilon \ddot{q}. \quad (4.11)$$

La variazione totale della lagrangiana è

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial q} \delta q + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} = \epsilon \left( \frac{\partial L}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \ddot{q} \right) = \epsilon \frac{dL}{dt} \text{ che implica } \Lambda = L. \quad (4.12)$$

Per quanto sopra, la carica conservata si scrive come

$$\epsilon Q = \epsilon \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \dot{q} - \epsilon \Lambda = \epsilon (p\dot{q} - L) , \quad (4.13)$$

espressione in cui si riconosce l'energia del punto materiale di coordinata  $q$  e momento  $p$ .

Consideriamo, ora, lo stesso problema per un sistema continuo, descritto in termini di una densità di lagrangiana  $\mathcal{L}$ , tale che l'azione si scriva

$$S = \int d\xi_0 \dots d\xi_k \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\alpha \phi_a) . \quad (4.14)$$

Precisiamo, anzitutto, che

$$\partial_\alpha \stackrel{def}{=} \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} . \quad (4.15)$$

Qui  $k$  è il numero di dimensioni dello spazio in cui si lavora (per esempio, potrebbe essere  $\mathbb{R}^3$  in meccanica classica, lo spazio di Minkowski quadridimensionale in elettrodinamica relativistica e così via). Le quantità  $\phi_a = \phi_a(\xi)$  sono i *campi*, funzioni scalari definite su tutto il dominio di integrazione insieme con le loro derivate. Consideriamo le trasformazioni infinitesime

$$\phi_a(\xi) \rightarrow \phi_a(\xi) + \delta\phi_a(\xi) , \quad (4.16)$$

con

$$\delta\phi_a(\xi) = \epsilon^i h_{ia}(\phi, \partial\phi) . \quad (4.17)$$

Chiariamo le notazioni:

1. il prodotto di due grandezze con lo stesso indice, una volta in alto e una in basso, indica somma rispetto a quell'indice. Se non ci si trova in ambito relativistico, la posizione dell'indice è solo una convenzione; in ambito relativistico, denota che una delle grandezze è covariante, l'altra controvariante;
2. l'indice  $i$  indica il numero di parametri da cui dipende la trasformazione;
3. l'indice  $a$  si riferisce al campo che viene variato;
4. l'indice  $\alpha$ , introdotto prima, marca le coordinate dello spazio e, per nostra convenzione, varia tra 0 e  $k$ .

Ora, se  $\mathcal{L}$  varia, sotto la trasformazione (4.16) di uno dei campi  $\phi_a$ , per una derivata totale del tipo

$$\delta\mathcal{L} = \partial_\alpha (\epsilon^i \Lambda_i^\alpha) , \quad (4.18)$$

allora le grandezze  $j_i^\alpha$ , dette *correnti*, definite da

$$\epsilon^i \mathbf{j}_i^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi_a)} \delta\phi_a - \epsilon^i \Lambda_i^\alpha , \quad (4.19)$$

si conservano durante il moto del sistema. Naturalmente, il caso  $\Lambda_\alpha^i = 0$ , come  $\Lambda = 0$  per un sistema discreto, è un caso particolare di questa situazione più generale. L'affermazione di conservazione va intesa in questo senso:

$$\partial_\alpha \mathbf{j}_1^\alpha = \mathbf{0}. \quad (4.20)$$

Come si nota subito, la legge, espressa tramite la divergenza in  $k$  dimensioni, richiama la legge di conservazione della carica in elettrodinamica. Viene naturale, per analogia con il caso suddetto, definire la carica associata alla corrente  $j$  come l'integrale su tutto lo spazio dei parametri (componente 0 esclusa) della sua componente 0:

$$Q^i = \int d\xi_1 \dots d\xi_k j_0^i. \quad (4.21)$$

Ricordando che l'indice  $i$  denota i parametri della trasformazione, è chiaro che le cariche conservate sono tante quanti sono questi ultimi. Proviamo la legge di conservazione, richiamando, intanto, le equazioni di Eulero-Lagrange per il campo  $\phi_a$  e la condizione di invarianza di  $\mathcal{L}$ :

$$\partial_\alpha \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi_a)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} = 0; \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \delta \phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi_a)} \partial_\alpha (\delta \phi_a) = 0. \quad (4.23)$$

Da (4.19) e da (4.20):

$$\begin{aligned} \epsilon^i \partial_\alpha j_i^\alpha &= \partial_\alpha \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi_a)} \right) \delta \phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi_a)} \partial_\alpha \delta \phi_a - \epsilon^i \partial_\alpha \Lambda_i^\alpha \\ &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \delta \phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi_a)} \partial_\alpha \delta \phi_a - \delta \mathcal{L} = \delta \mathcal{L} - \delta \mathcal{L} = 0. \end{aligned} \quad (4.24)$$

Proponiamo un esempio.

Sia  $\phi_a \rightarrow \phi_a + \epsilon^\beta \partial_\beta \phi_a$ , con  $\epsilon^\beta$  costanti infinitesime arbitrarie. È evidente che

$$\delta \phi_a = \epsilon^\beta \partial_\beta \phi_a; \quad (4.25)$$

$$\partial_\alpha (\delta \phi_a) = \epsilon^\beta \partial_\beta \partial_\alpha \phi_a. \quad (4.26)$$

Supponiamo che la densità di lagrangiana non dipenda esplicitamente dalla coordinata  $\xi^\alpha$ :  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\alpha \phi_a)$ . Allora la sua variazione si scrive

$$\delta \mathcal{L}(\phi_a, \partial_\alpha \phi_a) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_a} \epsilon^\beta \partial_\beta \phi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi_a)} \partial_\alpha (\epsilon^\beta \partial_\beta \phi_a) = \partial_\alpha (\epsilon^\beta \delta_\beta^\alpha \mathcal{L}). \quad (4.27)$$

L'ultimo passaggio si può verificare con un ragionamento diretto, che parte dalla considerazione che solo  $\phi_a$ , tra i campi, varia, e con qualche aggiustamento degli indici muti. L'equazione che definisce le correnti che si conservano è allora

$$\epsilon^\beta j_\beta^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi_a)} \epsilon^\beta \partial_\beta \phi_a - \epsilon^\beta \delta_\beta^\alpha \mathcal{L}. \quad (4.28)$$

La grandezza definita è il tensore energia-impulso del sistema<sup>2</sup>, le cui componenti sono

$$j_\beta^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \phi_a)} \partial_\beta \phi_a - \delta_\beta^\alpha \mathcal{L}. \quad (4.29)$$

La componente  $j_0^0$ , in particolare, è

$$j_0^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \phi_a)} \partial_0 \phi_a - \mathcal{L}. \quad (4.30)$$

Si riconosce, in questa espressione, la densità di hamiltoniana.

## 4.2 Correnti di momento lineare e di Lorentz sul world-sheet

### 4.2.1 Il momento lineare

Sfrutteremo la parametrizzazione imposta nel capitolo precedente per trovare delle leggi di conservazione per le stringhe<sup>3</sup>. Anzitutto, adottando la notazione della sezione precedente, l'azione di Nambu-Goto si scrive implicitamente nel modo seguente:

$$S = \int d\xi_0 d\xi_1 \mathcal{L}(\partial_0 X^\mu, \partial_1 X^\mu), \quad \text{con } (\xi_0, \xi_1) = (\tau, \sigma). \quad (4.31)$$

In questo caso,  $\alpha = 1, 2$ ;  $X^\mu$  sono i campi, ovvero, rispetto al paragrafo precedente, c'è stato il cambiamento di indice:  $a \rightarrow \mu$ . Osservando che la densità di lagrangiana dipende solo dalle derivate dei campi, consideriamo la variazione per cui  $\delta X^\mu = \epsilon^\mu = \text{costante}$ .  $\mathcal{L}$  non varia, quindi alla trasformazione è associata una corrente definita dall'equazione

$$\epsilon^\mu j_\mu^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha X^\mu)} \delta X^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha X^\mu)} \epsilon^\mu. \quad (4.32)$$

Quindi le correnti sono

$$j_\mu^\alpha = (j_\mu^0, j_\mu^1) = \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^\mu}, \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^{\mu'}} \right) = (\mathcal{P}_\mu^\tau, \mathcal{P}_\mu^\sigma). \quad (4.33)$$

Scrivendo le quattro leggi di conservazione, otteniamo le equazioni del moto della stringa già incontrate precedentemente,

$$\partial_\alpha \mathcal{P}_\mu^\alpha = \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} = 0. \quad (4.34)$$

---

<sup>2</sup>Per la trattazione del tensore energia-impulso, in generale e per il campo elettromagnetico, cf. [4, pagg. 109-118]

<sup>3</sup>Il riferimento per il resto del capitolo è [5, cap. 8]

Seguendo la definizione di carica data nella sezione precedente, è naturale definire

$$p_\mu(\tau) = \int_0^{\sigma_1} \mathcal{P}_\mu^\tau(\tau, \sigma) d\sigma. \quad (4.35)$$

Il significato dell'integrale è particolarmente chiaro nel gauge statico: poichè è calcolato a  $\tau = t$  fissato e poichè l'integrando è, dimensionalmente, una densità di momento, l'integrale è il momento lineare della stringa. Verifichiamo che si tratta di una costante, derivando rispetto a  $\tau$ ,

$$\frac{dp_\mu}{d\tau}(\tau) = \int_0^{\sigma_1} \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} d\sigma = - \int_0^{\sigma_1} d\sigma \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} = [-\mathcal{P}_\mu^\sigma]_0^{\sigma_1}, \quad (4.36)$$

che è zero se valgono condizioni ai limiti di Neumann, cioè se gli estremi della stringa sono liberi di muoversi nello spazio, senza vincoli. Ma questa è proprio la condizione necessaria perchè il sistema sia isolato: altrimenti detto, la stringa non è vincolata ad una D-brana. Proveremo, ora, che il momento  $p^\mu$  può essere calcolato in modo più generale. L'integrale che, in (4.35), definisce il momento è, di fatto, il flusso di  $\mathcal{P}_\mu^\alpha$  attraverso una curva  $\tau = \text{costante}$ . Ora, consideriamo una qualunque curva chiusa  $\Gamma$  nel world sheet, che è un mondo bidimensionale. Il generico vettore tangente alla curva in un suo punto è del tipo  $(d\tau, d\sigma)$ . Il corrispondente vettore ortogonale è  $(d\sigma, -d\tau)$ . Il flusso del campo  $\mathcal{P}_\mu^\alpha$  attraverso la curva è

$$p_\mu(\Gamma) = \oint_\Gamma (\mathcal{P}_\mu^\tau d\sigma - \mathcal{P}_\mu^\sigma d\tau), \quad (4.37)$$

cioè l'integrale esteso alla curva del prodotto scalare della corrente per il campo vettoriale ad essa ortogonale. Detto  $\mathcal{O}$  il dominio racchiuso dalla curva, per il teorema della divergenza in due dimensioni vediamo che

$$p_\mu(\Gamma) = \int_{\mathcal{O}} \left( \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}_\mu^\sigma}{\partial \sigma} \right) d\tau d\sigma = 0. \quad (4.38)$$

Il risultato è intuitivamente chiaro: non ci sono pozzi o sorgenti di momento sul world-sheet, così come in una regione spaziale priva di cariche non ci sono sorgenti di linee di forza del campo elettrostatico. Adesso, consideriamo una stringa aperta libera (condizioni di Neumann soddisfatte da tutte le componenti del moto di entrambi gli estremi), una curva  $\Gamma$  sul world-sheet suddivisibile in quattro tratti, di cui due,  $\alpha$  e  $\beta$ , giacenti lungo le curve  $\sigma = 0, \sigma = \sigma_1$ , le linee di universo degli estremi. Poichè il dominio delimitato dalla curva è semplicemente connesso, uno dei due tratti rimanenti può scegliersi con la condizione  $\tau = \text{costante}$ . Chiameremo questo tratto  $\tilde{\gamma}$ ,  $\gamma$  il rimanente. Orientiamo la curva in senso antiorario come in figura 4.1, dove è rappresentato, beninteso, il dominio di integrazione.

Definiamo

$$p_\mu(\Gamma) = \int_\Gamma (\mathcal{P}_\mu^\tau d\sigma - \mathcal{P}_\mu^\sigma d\tau)$$

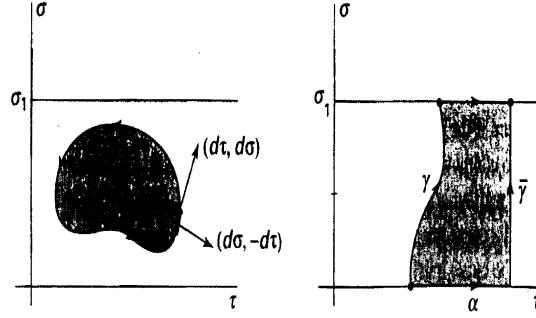


Figura 4.1: La superficie del dominio corrispondente alla curva chiusa sul world-sheet e, a destra, una regione delimitata dai due tratti ( $\sigma = 0/\sigma = \sigma_1$ ) e da due curve, di cui una (quella più a destra) corrisponde ad una stringa nel nostro gauge statico.

$$= \int_{\alpha} + \int_{\bar{\gamma}} - \int_{\beta} - \int_{\gamma} (\mathcal{P}_{\mu}^{\tau} d\sigma - \mathcal{P}_{\mu}^{\sigma} d\tau) = 0. \quad (4.39)$$

Ora,  $d\sigma = 0$  su  $\alpha$  e  $\beta$ , dove  $\mathcal{P}_{\mu}^{\sigma} = 0$ , quindi due dei quattro contributi sono nulli. Allora

$$\int_{\bar{\gamma}} \mathcal{P}_{\mu}^{\tau} d\sigma = \int_{\gamma} (\mathcal{P}_{\mu}^{\tau} d\sigma - \mathcal{P}_{\mu}^{\sigma} d\tau) = p_{\mu}. \quad (4.40)$$

Resta dimostrato che il momento lineare è dato dal flusso del campo  $\mathcal{P}_{\mu}^{\alpha}$  attraverso una qualsiasi curva che connetta gli estremi del world-sheet. Poiché la prova è stata ottenuta senza riferimenti alla parametrizzazione della stringa, la sua validità è del tutto generale. Lo stesso ragionamento si applica nel caso di una stringa chiusa, sostituendo il *lenzuolo* descritto dalla stringa aperta con un *tubo*, con la differenza che non è necessario considerare le curve  $\alpha$  e  $\beta$ , come si vede considerando la figura 4.2.

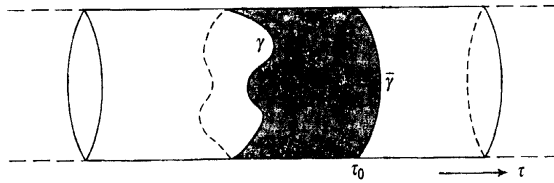


Figura 4.2: La regione di world-sheet di una stringa chiusa attraverso la quale il flusso del momento lineare è nullo

### 4.2.2 Le correnti di Lorentz

L'azione di Nambu-Goto è scritta in termini di prodotti scalari in metrica di Minkowski, definita in (2.27), del tipo  $g_{\mu\nu}X^\mu X^\nu$ . Per costruzione, quest'azione è invariante per trasformazioni di Lorentz. Costruiamo la trasformazione di Lorentz infinitesima, per individuare le cariche conservate.

Sia  $X^\mu \rightarrow X^\mu + \delta X^\mu$ , la trasformazione, con

$$\delta X^\mu = \epsilon^{\mu\nu} X_\nu. \quad (4.41)$$

$\epsilon^{\mu\nu}$  è la matrice infinitesima che parametrizza la trasformazione. Imponendo che il prodotto scalare non vari, troviamo

$$\delta(g_{\mu\nu}X^\mu X^\nu) = 0 \text{ da cui}$$

$$2g_{\mu\nu}(\delta X^\mu)X^\nu = 2g_{\mu\nu}(\epsilon^{\mu\sigma}X_\sigma)X^\nu = 2\epsilon^{\nu\sigma}X_\sigma X_\nu = 2\epsilon^{\mu\nu}X_\mu X_\nu = 0 \quad (4.42)$$

Poichè  $X_\mu$  e  $X_\mu$  sono numeri, quindi commutano, è necessario, dato che i valori delle componenti possono essere arbitrari, che la matrice  $\epsilon^{\mu\nu}$  sia antisimmetrica.

$$\epsilon^{\mu\nu} = -\epsilon^{\nu\mu}. \quad (4.43)$$

Verifichiamo esplicitamente l'invarianza dei prodotti scalari che entrano nella densità lagrangiana per una stringa relativistica:

$$\begin{aligned} \delta \left( g_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} \right) &= g_{\mu\nu} \left( \frac{\partial \delta X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} + \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial \delta X^\nu}{\partial \xi^\beta} \right); \\ &= g_{\mu\nu} \left( \epsilon^{\mu\sigma} \frac{\partial X_\sigma}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} + \epsilon^{\nu\sigma} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X_\sigma}{\partial \xi^\beta} \right); \quad (4.44) \\ &= \epsilon_{\nu\sigma} \frac{\partial X^\sigma}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} + \epsilon_{\mu\sigma} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\sigma}{\partial \xi^\beta}. \end{aligned}$$

Cambiando i nomi degli indici muti,  $\mu \rightarrow \sigma$  e  $\sigma \rightarrow \nu$ , otteniamo

$$\delta \left( g_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^\beta} \right) = (\epsilon_{\nu\sigma} + \epsilon_{\sigma\nu}) \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial X^\sigma}{\partial \xi^\beta} = 0. \quad (4.45)$$

L'invarianza della lagrangiana risulta così provata esplicitamente. Possiamo scrivere ora l'espressione delle correnti di Lorentz, usando l'equazione di definizione,

$$\epsilon^{\mu\nu} j_{\mu\nu}^\alpha = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha X^\mu)} \delta X^\mu = \mathcal{P}_\mu^\alpha \epsilon^{\mu\nu} X_\nu. \quad (4.46)$$

Le componenti della corrente, in questo caso, sono tensori di rango 4 antisimmetrici, perchè ogni tensore può scomporsi nella somma di un tensore simmetrico e di uno antisimmetrico, ma il contributo di un tensore simmetrico nell'equazione (4.46), essendo moltiplicato per una matrice antisimmetrica,

sarebbe nullo. Ora, gli elementi della matrice  $\epsilon^{\mu\nu}$ , a meno del vincolo di antisimmetria, sono arbitrari. Possiamo allora isolare le correnti come

$$\mathcal{M}_{\mu\nu}^\alpha = \mathbf{X}_\mu \mathcal{P}_\nu^\alpha - \mathbf{X}_\nu \mathcal{P}_\mu^\alpha. \quad (4.47)$$

L'equazione cui soddisfano le correnti è

$$\frac{\partial \mathcal{M}_{\mu\nu}^\tau}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{M}_{\mu\nu}^\sigma}{\partial \sigma} = 0. \quad (4.48)$$

La carica associata, che chiamiamo  $\mathcal{M}_{\mu\nu}$  e che abbiamo definito come l'integrale sullo spazio (in questo caso, sulla stringa) della componente 0 della corrente, per gli stessi ragionamenti sviluppati sulla corrente di momento lineare, può scriversi come

$$\mathcal{M}_{\mu\nu} = \int_\gamma (M_{\mu\nu}^\tau d\sigma - \mathcal{M}_{\mu\nu}^\sigma d\tau). \quad (4.49)$$

Ciò vale per le stringhe con estremi liberi, sia chiuse, sia aperte. Per quest'ultime, tuttavia, affinché il ragionamento sia valido, è necessario che  $\mathcal{M}_{\mu\nu}^\sigma = 0$  per  $\sigma = 0, \sigma = \sigma_1$ , ma questo è ovvio, perchè  $\mathcal{M}_{\mu\nu}^\sigma = X_\mu \mathcal{P}_\nu^\sigma - X_\nu \mathcal{P}_\mu^\sigma$ , e  $\vec{\mathcal{P}}^\sigma = 0$  agli estremi (condizioni di Neumann). Anche le cariche sono, chiaramente, antisimmetriche, dunque sono 6 quelle conservate. In particolare, essendo  $\vec{\mathcal{P}}^\tau$  un momento lineare,  $\mathcal{M}_{ij}^\tau$ , con  $i, j = 1, 2, 3$ , è evidentemente la densità di momento angolare della stringa.

### 4.3 Il parametro di curvatura $\alpha'$

Introduciamo brevemente una grandezza che sarà sfruttata nelle notazioni del prossimo capitolo, che denotiamo  $\alpha'$ . Per una stringa rigida rotante in un piano sussiste la relazione:

$$\frac{J}{\hbar} = \alpha' E^2, \quad (4.50)$$

con  $J$  momento angolare della stringa ed  $E$  la sua energia. Si vede che  $\alpha'$  ha le dimensioni del reciproco di un'energia al quadrato. Proviamo (4.50). Per una stringa che ruota nel piano  $(x, y)$ , la sola componente del momento angolare è quella lungo  $\hat{z}$ , ovvero, per i risultati di cui sopra,

$$\mathcal{M}_{12} = \int_0^{\sigma_1} (X_1 \mathcal{P}_2^\tau - X_2 \mathcal{P}_1^\tau) d\sigma. \quad (4.51)$$

Ricordando (3.52), (3.3) e (3.4), dalla definizione di  $d\sigma'$ , (3.23):

$$\vec{X}(t, \sigma) = \frac{\sigma_1}{\pi} \cos \frac{\pi \sigma}{\sigma_1} \left( \cos \frac{\pi c t}{\sigma_1}, \sin \frac{\pi c t}{\sigma_1} \right); \quad (4.52)$$

$$\vec{\mathcal{P}}^\tau = \frac{T_0}{c} \cos \frac{\pi \sigma}{\sigma_1} \left( -\sin \frac{\pi c t}{\sigma_1}, \cos \frac{\pi c t}{\sigma_1} \right). \quad (4.53)$$

Il momento angolare diventa così

$$\mathcal{M}_{12} = \frac{\sigma_1}{\pi} \frac{T_0}{c} \int_0^{\sigma_1} \cos^2 \frac{\pi\sigma}{\sigma_1} d\sigma = \frac{\sigma_1^2 T_0}{2\pi c}. \quad (4.54)$$

Poichè, nella parametrizzazione (3.23), è

$$\sigma_1 = \frac{E}{T_0}, \quad (4.55)$$

se poniamo  $J = \mathcal{M}_{12}$ :

$$J = \frac{E^2}{2\pi T_0 c}; \text{ quindi } \frac{J}{\hbar} = \frac{E^2}{2\pi T_0 \hbar c}. \quad (4.56)$$

Abbiamo trovato che

$$\alpha' = \frac{1}{2\pi \mathbf{T}_0 \hbar \mathbf{c}}. \quad (4.57)$$

Il parametro  $\alpha'$  è una quantità sperimentalmente misurabile, ed è in questo che risiede la sua utilità in teoria delle stringhe:  $\alpha'$  è il coefficiente della relazione lineare che sussiste fra il momento angolare intrinseco delle risonanze adroniche e il quadrato della loro energia, cui si è detto nell'introduzione. Il valore di  $\alpha'$ , misurato negli esperimenti con adroni, è approssimativamente

$$\alpha' \simeq 0.95 \frac{GeV}{c^2}. \quad (4.58)$$

## Capitolo 5

# Moto di una stringa nel *gauge-cono luce*

*Di seguito, generalizziamo la parametrizzazione scelta nel capitolo 3 per poi scrivere esplicitamente la soluzione dell'equazione d'onda per la stringa sotto forma di serie di Fourier, introducendo i modi di oscillazione di Virasoro, che giocano un ruolo importante nella teoria quantistica. Concludiamo la discussione relativistica calcolando la massa di una stringa arbitraria. Nell'ultimo paragrafo, accenniamo alla quantizzazione della stringa aperta.*

### 5.1 Parametrizzazione e cambio di unità di misura

#### 5.1.1 Parametrizzazione $\tau$

Utilizzando il gauge statico e la parametrizzazione a densità locale di energia costante lungo la stringa<sup>1</sup>, abbiamo ottenuto delle condizioni sulla funzione che descrive la stringa nello spazio-tempo, senza, però, scrivere esplicitamente la soluzione. Introduciamo qui una parametrizzazione che servirà allo scopo<sup>2</sup>. Imporremo che  $\tau$  sia una combinazione lineare delle coordinate di stringa, ovvero

$$n_\mu X^\mu(\tau, \sigma) = \lambda \tau. \quad (5.1)$$

L'equazione (5.1) definisce, nello spazio-tempo D-dimensionale, un iperpiano i cui vettori sono ortogonali al vettore  $n_\mu$ , come possiamo verificare sottraendo membro a membro due equazioni di questo tipo soddisfatte da due vettori qualsiasi (diversi):

$$n_\mu (X_1^\mu - X_2^\mu) = 0. \quad (5.2)$$

Si veda, a proposito, la figura 5.1.

---

<sup>1</sup>Cf. il paragrafo 3.1

<sup>2</sup>Cf.[5, cap. 9]

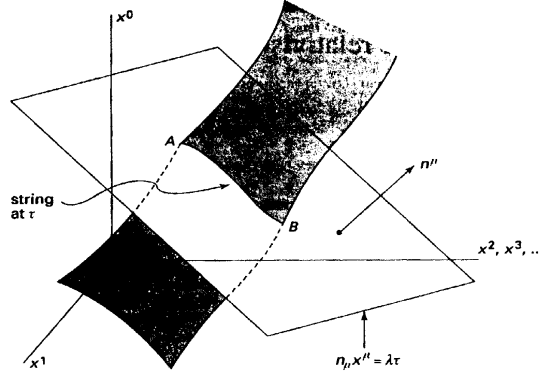


Figura 5.1: Una stringa nel gauge  $n_\mu X^\mu = \lambda \tau$

Con riferimento alla figura, si osservi che il gauge statico del paragrafo 2.5 non è che un caso particolare di questa parametrizzazione:

$$n^\mu = (1, \vec{0}) . \quad (5.3)$$

In tal caso, l'iperpiano in figura 5.1 sarebbe ortogonale all'asse del tempo. É chiaro che questa è anche la scelta che appare più naturale, perchè permette di immaginare il moto della stringa come una successione di fotogrammi nello spazio euclideo, dai quali la quarta dimensione è tagliata fuori, conformemente all'esperienza quotidiana. Tuttavia, matematicamente questo fatto è di poca importanza, come mostreremo. Torniamo al caso generale: ogni vettore che collega due punti che soddisfano l'equazione è ortogonale a  $n_\mu$ . Le stringhe, in questa parametrizzazione, giaceranno sugli iperpiani definiti da (5.1); saranno, cioè, gli insiemi di punti  $\vec{X}(\tau, \sigma)$ , con  $\tau$  costante, che soddisfano l'equazione. Supponiamo, ora, che le stringhe restino, come nel gauge statico, degli oggetti di tipo-spazio, come ci aspettiamo intuitivamente. Cominciamo provando che

1. se  $n_\mu$  è un vettore di tipo luce ( $n^\mu n_\mu = 0$ ) a componenti non tutte nulle, allora un vettore  $b^\mu$  tale che  $b^\mu n_\mu = 0$  è di tipo spazio o di tipo luce;
2. se  $b^\mu b_\mu = 0$  e  $b^\mu n_\mu = 0$ , allora  $b^\mu = \lambda n^\mu$ .

Supponiamo, infatti, che  $b^\mu b_\mu > 0$ ; poichè, come è noto dalla relatività speciale, è sempre possibile individuare un osservatore di Lorentz per il quale

$$b^0 = |b^\mu|, \quad b^i = 0, \quad i \neq 0, \quad (5.4)$$

in quel sistema di riferimento:  $b^\mu n_\mu = b^0 n_0 = 0$ ; ne segue  $n_0 = 0$ . Ma questo comporta che anche tutte le restanti componenti di  $n^\mu$  siano nulle,

contrariamente all'ipotesi iniziale. Segue quindi, la prima tesi. Per provare la seconda, scegliamo un osservatore di Lorentz per cui  $n^\mu = (n^0, n^1, \vec{0})$ . Allora

$$n^\mu b_\mu = n^0 b_0 - n^1 b_1 = 0; \text{ quindi } n^0 b_0 = n^1 b_1; \text{ ne segue } \frac{n^0}{n^1} = \frac{b_1}{b_0}. \quad (5.5)$$

Notiamo anzitutto che, essendo  $b^\mu b_\mu = 0$ , sarebbe possibile che la prima componente spaziale fosse nulla. Tuttavia il vincolo di essere ortogonale a  $n^\mu$ , in questo caso, lo esclude, altrimenti sarebbe  $n^0 b_0 = 0$ , il che implicherebbe  $b^0 = 0$ , contro l'ipotesi che sia un vettore di tipo luce a componenti non tutte nulle. Le frazioni, dunque, sono ben definite. Soluzione dell'equazione è, allora, proprio  $b^\mu = \lambda n^\mu$ . Poichè questa è una relazione lineare, in un qualunque altro sistema di riferimento è soddisfatta, perchè le trasformazioni di Lorentz sono lineari. Ciò prova la seconda tesi. Noi supporremo che  $n^\mu$  in (5.1) sia di tipo luce, così che ogni tratto  $dX(\tau, \sigma)$  lungo le stringhe ( $\tau$  fissato) sia di tipo spazio. Modifichiamo leggermente (5.1) così:

$$n^\mu X_\mu = \lambda(n \cdot p)\tau, \quad (5.6)$$

dove  $\cdot$  indica il prodotto relativistico e supporremo che  $(n \cdot p)$  si conservi.

Stabiliamo, ora, delle convenzioni sulle unità di misura:  $n^\mu$ ,  $\tau$  e  $\sigma$  saranno adimensionali. Perciò  $\lambda$  sarà una velocità su una forza. Poniamo, in modo naturale,

$$\lambda \sim \frac{c}{T_0} = 2\pi\alpha'\hbar c^2. \quad (5.7)$$

Introducendo le unità naturali

$$\hbar = c = 1, \quad (5.8)$$

le lunghezze diventano della stessa unità dei tempi e del reciproco delle masse. Quindi

$$[\alpha'] = [L^2]. \quad (5.9)$$

Imponendo, per le stringhe aperte,  $\lambda = 2\alpha'$ , l'equazione della scelta di gauge diviene finalmente

$$n \cdot X(\tau, \sigma) = 2\alpha'(n \cdot p)\tau. \quad (5.10)$$

### 5.1.2 Parametrizzazione $\sigma$

Premettiamo subito che, da questo punto, si intenderà sempre che le stringhe siano soggette a condizioni ai limiti di tipo Neumann ad entrambi gli estremi. Nel gauge statico, la parametrizzazione della stringa rispetto a  $\sigma$  è stata scelta imponendo la costanza della densità di energia  $E(\sigma) = \mathcal{P}^{\tau 0}$ . Poichè, in quel caso,  $n^\mu = (1, \vec{0})$ , la naturale generalizzazione di quella parametrizzazione è richiedere che sia costante la proiezione della densità di momento della stringa sull'iperpiano definito da (5.10):  $n \cdot \mathcal{P}^\tau$ . L'equazione che

permette di soddisfare questa richiesta è

$$(n \cdot p) \sigma = \pi \int_0^{\sigma_1} d\tilde{\sigma} n \cdot \mathcal{P}^\tau(\tau, \tilde{\sigma}) . \quad (5.11)$$

Questa equazione afferma che  $\sigma$ , per qualsiasi punto della stringa, è proporzionale all'integrale della densità di momento lungo la stringa fra 0 e  $\sigma$  stesso. Differenziando ambo i membri, otteniamo

$$(n \cdot p) d\sigma = \pi n \cdot \mathcal{P}^\tau(\tau, \sigma) d\sigma ; . \quad (5.12)$$

Cancellando  $d\sigma$  da ambo i membri, poichè  $(n \cdot p)$  è costante per ipotesi, concludiamo che

$$\mathbf{n} \cdot \mathcal{P}^\tau(\tau, \sigma) = \text{costante} . \quad (5.13)$$

Inoltre, integrando fra 0 e  $\sigma_1$ , vediamo che

$$(n \cdot p) \sigma_1 = \pi n_\mu \int_0^{\sigma_1} d\tilde{\sigma} \mathcal{P}^{\tau\mu}(\tau, \tilde{\sigma}) = n^\mu p_\mu = \pi (n \cdot p) , \quad (5.14)$$

da cui

$$\sigma_1 = \pi . \quad (5.15)$$

Ora, proiettando l'equazione del moto per la stringa lungo  $n$ , otteniamo

$$\partial_\tau \mathcal{P}_\mu^\tau + \partial_\sigma \mathcal{P}_\mu^\sigma = 0 , \quad (5.16)$$

che diventa, moltiplicando scalarmente per  $n$ :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (n^\mu \mathcal{P}_\mu^\tau) + \frac{\partial}{\partial \sigma} (n^\mu \mathcal{P}_\mu^\sigma) = 0 . \quad (5.17)$$

Poichè  $n^\mu \mathcal{P}_\mu^\tau$  è una costante, questa equazione si riduce a

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} (n^\mu \mathcal{P}_\mu^\sigma) = 0 . \quad (5.18)$$

Poichè  $\mathcal{P}^\sigma = 0$  agli estremi della stringa, l'equazione dice che

$$n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0 , \text{ lungo tutta la stringa, se questa è aperta.} \quad (5.19)$$

Se la stringa è chiusa, imponiamo che sia

$$(n \cdot p) \sigma = 2\pi \int_0^\sigma d\tilde{\sigma} n \cdot \mathcal{P}^\tau(\tau, \tilde{\sigma}) . \quad (5.20)$$

Questo permette che  $\sigma \in [0, 2\pi]$ , come ci si aspetta per una curva chiusa, e che  $n \cdot \mathcal{P}^\tau$  sia costante anche lungo il world-sheet della stringa chiusa. Per motivi di notazione, tuttavia, scriviamo la scelta di gauge per la stringa chiusa come

$$n \cdot X(\tau, \sigma) = \alpha' (n \cdot p) \tau . \quad (5.21)$$

Riassumiamo qui le notazioni:

$$n \cdot X(\tau, \sigma) = \beta \alpha' (n \cdot p) \tau, \quad (5.22)$$

$$(n \cdot p) \sigma = \frac{2\pi}{\beta} \int_0^{\sigma_1} d\tilde{\sigma} n \cdot \mathcal{P}^\tau(\tau, \tilde{\sigma}), \quad (5.23)$$

con  $\beta = 1, 2$  se la stringa è, rispettivamente, chiusa o aperta. Ora è chiaro il vantaggio della scelta dei fattori nelle imposizioni del gauge: le condizioni di parametrizzazione si scrivono in una stessa forma, valida sia per la stringa aperta sia per quella chiusa, secondo il valore del parametro  $\beta$ .

L'equazione (5.18) vale anche per una stringa chiusa, ma, non avendo questa degli estremi per cui valgano condizioni di Neumann, non c'è alcun riferimento per concludere che sia  $n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0$ . Ciò che si conviene, per dimostrare che ciò è vero, allora, è di scegliere un punto parametrizzato dalla condizione  $\sigma = 0$  su una stringa (intesa sempre come intersezione del world-sheet con l'iperpiano definito da (5.10)), scegliendolo poi sulle altre in modo che per esse sia  $n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0$ , lasciando un'indeterminazione che è di principio, essendo l'assenza di un punto privilegiato connaturata ad una curva chiusa. Mostriamo che quanto affermato è possibile, riferendoci alla figura 5.2 e richiamando l'espressione di  $\mathcal{P}^{\sigma\mu}$ ,

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\dot{X} \cdot X') \dot{X}^\mu - (\dot{X})^2 X'^\mu}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}. \quad (5.24)$$

Quindi

$$n \cdot \mathcal{P}^\sigma = n_\mu \mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\dot{X} \cdot X') \partial_\tau (n \cdot X) - (\dot{X})^2 \partial_\sigma (n \cdot X)}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}. \quad (5.25)$$

Poichè, per l'equazione (5.10),  $\frac{\partial}{\partial \sigma} (n \cdot X) = 0$  e  $\frac{\partial}{\partial \tau} (n \cdot X) = (n \cdot p) = \text{costante} (\equiv c)$ , possiamo scrivere

$$n_\mu \mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{(\dot{X} \cdot X') c}{\sqrt{(\dot{X} \cdot X')^2 - (\dot{X})^2 (X')^2}}. \quad (5.26)$$

Si deve mostrare di poter annullare  $(\dot{X} \cdot X')$  su ciascuna stringa, sia essa aperta o chiusa. Nel primo caso il risultato è già stato ottenuto: poichè  $\mathcal{P}^{\sigma\mu} = 0$  negli estremi, per le condizioni di Neumann, dall'espressione di  $\mathcal{P}^{\sigma\mu}$  precedente si conclude subito che  $(\dot{X} \cdot X') = 0$ . Analizziamo la questione per una stringa chiusa. Sia  $P$ , di coordinate  $X^\mu$ , un punto di una stringa e supponiamo di imporre  $\sigma(P) = 0$ . Il world-sheet, in qualsiasi suo punto, come spiegato nel capitolo 2, ammette uno spazio tangente definito da un vettore di tipo tempo e da uno di tipo spazio. Ora, per definizione del gauge

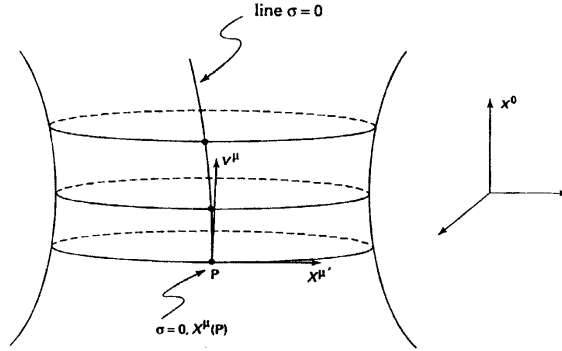


Figura 5.2: Costruzione della linea  $\sigma = 0$  lungo il world-sheet di una stringa chiusa

cono-luce,  $X^{\mu'}$  è ortogonale alle linee  $\tau = \text{costante}$ . Sia  $T^\mu$  il vettore di tipo tempo tangente al world-sheet in  $P$ . Allora ogni vettore  $v^\mu$  tangente alla stringa in  $P$  si scrive come

$$v^\mu = T^\mu + \theta X^{\mu'}, \quad (5.27)$$

con  $X^{\mu'}$  ottenuto nel limite per  $\theta \rightarrow \infty$ . Imponendo che  $v^\mu X'_\mu = 0$ , si determina che

$$\theta = -\frac{t^\mu X'_\mu}{X^{\mu'} X'_\mu}; \text{ ne segue } v^\mu = t^\mu - \frac{t^\mu X'_\mu}{X^{\mu'} X'_\mu} X^{\mu'}. \quad (5.28)$$

Il punto  $\sigma = 0$  nelle immediate vicinanze si individua come

$$X^\mu + \epsilon v^\mu, \quad (5.29)$$

con  $\epsilon$  infinitesimo. Procedendo così, si costruisce la linea  $\sigma = 0$  lungo tutto il world sheet della stringa, preservando la condizione di ortogonalità. Resta dimostrato che, in ogni punto, è  $\dot{X} \cdot X' = 0$ . Poichè, inoltre,  $\frac{\partial}{\partial \sigma} (n \cdot \mathcal{P}^\sigma) = 0$ , concludiamo che

$$n \cdot \mathcal{P}^\sigma = 0 \quad (5.30)$$

per entrambi i tipi di stringhe.

## 5.2 Equazione d'onda nel *gauge cono-luce*

Abbiamo ottenuto il vincolo

$$\dot{X} \cdot X' = 0 \quad (5.31)$$

per il moto delle stringhe aperte e chiuse. Questo è tutto il vantaggio nell'uso del gauge cono-luce: le radici quadrate nell'azione di Nambu-Goto scompaiono, il che semplificherà notevolmente l'equazione del moto; infatti

$$\mathcal{P}_\mu^\tau = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{X'^2 \dot{X}^\mu}{\sqrt{-\dot{X}^2 X'^2}}; \quad (5.32)$$

$$\mathcal{P}_\mu^\sigma = \frac{1}{2\pi\alpha'} \frac{\dot{X}^2 X^{\mu'}}{\sqrt{-\dot{X}^2 X'^2}}. \quad (5.33)$$

Da (5.23), differenziando e usando (5.32), otteniamo

$$n \cdot p = \frac{1}{\beta\alpha'} \frac{X'^2 (n \cdot \dot{X})}{\sqrt{-\dot{X}^2 X'^2}}. \quad (5.34)$$

Poichè, da (5.22),

$$n \cdot \dot{X} = \beta\alpha' (n \cdot p), \quad (5.35)$$

otteniamo

$$1 = \frac{X'^2}{\sqrt{-\dot{X}^2 X'^2}}, \text{ che implica } \dot{X}^2 + X'^2 = 1, \quad (5.36)$$

che può essere riassunto, insieme con (5.31), dall'equazione vincolare

$$(\dot{X} \pm X')^2 = 0. \quad (5.37)$$

A questo punto, la radice quadrata a denominatore diventa

$$\sqrt{-\dot{X}^2 X'^2} = \sqrt{X'^4} = X'^2 \text{ oppure } \sqrt{\dot{X}^4} = \dot{X}^2, \quad (5.38)$$

da cui

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu; \quad (5.39)$$

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} X^{\mu'}. \quad (5.40)$$

Finalmente, l'equazione del moto,  $\frac{\partial \mathcal{P}^{\tau\mu}}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathcal{P}^{\sigma\mu}}{\partial \sigma} = 0$ , assume la forma definitiva

$$\ddot{X}^\mu - X^{\mu''} = 0. \quad (5.41)$$

### 5.3 Soluzione dell'equazione del moto

Abbiamo ottenuto, per il moto della stringa nel gauge cono-luce, un'equazione d'onda. Sia la stringa, per ipotesi, aperta. Supponendo che siano fissate condizioni ai limiti di tipo Neumann :

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu}(\tau, 0) = \mathcal{P}^{\sigma\mu}(\tau, \pi) = \left. \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma} \right|_{\sigma=0/\pi} = 0. \quad (5.42)$$

É noto che la soluzione generale, detta  $f(u)$  una funzione arbitraria sufficientemente regolare, si scrive così :

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2} (f^\mu(\tau + \sigma) + g^\mu(\tau - \sigma)). \quad (5.43)$$

Dalla condizione in  $\sigma = 0$ ,

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}(\tau, 0) = \frac{1}{2} (f^{\mu'}(\tau) - g^{\mu'}(\tau)) = 0, \quad (5.44)$$

si conclude che  $f$  e  $g$  differiscono al più per una costante, che si può incorporare nella loro definizione, ottenendo quindi

$$X^\mu(\tau, \sigma) = \frac{1}{2} (f^\mu(\tau + \sigma) + f^\mu(\tau - \sigma)). \quad (5.45)$$

Dalla condizione in  $\sigma = \sigma_1 = \pi$ , ricaviamo

$$\frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}(\tau, \pi) = \frac{1}{2} (f^{\mu'}(\tau + \pi) - f^{\mu'}(\tau - \pi)) = 0. \quad (5.46)$$

Poichè  $\tau$  può assumere qualsiasi valore, concludiamo che  $f'$  è periodica di periodo  $2\pi$ . Sviluppandola in serie di Fourier in funzione dell'argomento, diciamo  $u$ ,

$$f^{\mu'}(u) = f_1^\mu + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^\mu \cos nu + b_n^\mu \sin nu). \quad (5.47)$$

Integrando, otteniamo per  $f$  l'espressione

$$f^\mu = f_0^\mu + f_1^\mu u + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^\mu \cos nu + B_n^\mu \sin nu). \quad (5.48)$$

Sostituendo in (5.45), con qualche manipolazione trigonometrica, risulta

$$X^\mu(\tau, \sigma) = f_0^\mu + f_1^\mu \tau + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^\mu \cos n\tau + B_n^\mu \sin n\tau) \cos n\sigma. \quad (5.49)$$

Quindi, derivandola rispetto a  $\tau$ :

$$\mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu = \frac{1}{2\pi\alpha'} f_1^\mu + \sum_{n=1}^{\infty} (\dots) \cos n\sigma. \quad (5.50)$$

Integrando fra 0 e  $\sigma$ , per determinare il momento della stringa, il contributo dei termini proporzionali a  $\cos \pi \sigma$  si annulla e resta

$$p^\mu = \frac{1}{2\pi\alpha'} \pi f_1^\mu; \text{ da cui } f_1^\mu = 2\alpha' p^\mu. \quad (5.51)$$

Il coefficiente  $f_1^\mu$  è proporzionale al quadrimomento della stringa. Poniamo, quindi, in modo naturale,

$$f_0^\mu = x_0^\mu. \quad (5.52)$$

È chiaro, ora, che i primi due termini corrispondono, rispettivamente, alla posizione e al momento lineare iniziali della stringa. Possiamo riscrivere i coefficienti dello sviluppo di Fourier di  $X^\mu(\tau, \sigma)$  sfruttando proprietà elementari dei numeri complessi:

$$\begin{aligned} 2A_n^\mu \cos(n\tau) + 2B_n^\mu \sin(n\tau) &= (-i) [(B_n^\mu + iA_n^\mu) e^{in\tau} - (B_n^\mu - iA_n^\mu) e^{-in\tau}] \\ &\equiv i (a_n^{\mu*} e^{in\tau} - a_n^\mu e^{-in\tau}) \frac{\sqrt{2\alpha'}}{\sqrt{n}}. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Il simbolo  $*$  denota i complessi coniugati, chiaramente. A questo punto  $X^\mu(\tau, \sigma)$  diventa

$$X^\mu(\tau, \sigma) = x_0^\mu + 2\alpha' p^\mu \tau - i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^{\mu*} e^{in\tau} - a_n^\mu e^{-in\tau}) \frac{\cos n\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (5.54)$$

Introduciamo le notazioni:

$$\alpha_0^\mu = \sqrt{2\alpha'} p^\mu; \quad (5.55)$$

$$\alpha_n^\mu = a_n^\mu \sqrt{n}, \quad n \geq 1 \quad (5.56)$$

$$\alpha_{-n}^\mu = a_n^{\mu*} \sqrt{n}, \quad n \geq 1. \quad (5.57)$$

Si noti che i coefficienti  $\alpha_n^\mu$  sono definiti per qualunque intero, con

$$\alpha_{-n}^\mu = (\alpha_n^\mu)^*. \quad (5.58)$$

Da qui, (5.49) diventa

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^\mu(\tau, \sigma) &= \mathbf{x}_\mu^0 + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau - i\sqrt{2\alpha'} \sum_{\mathbf{n}=1}^{\infty} \frac{1}{\mathbf{n}} (\alpha_{-\mathbf{n}}^\mu e^{i\mathbf{n}\tau} - \alpha_{\mathbf{n}}^\mu e^{-i\mathbf{n}\tau}) \cos \mathbf{n}\sigma \\ &= \mathbf{x}_0^\mu + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^\mu \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{\mathbf{n} \neq 0} \frac{1}{\mathbf{n}} \alpha_{\mathbf{n}}^\mu e^{-i\mathbf{n}\tau} \cos \mathbf{n}\sigma. \end{aligned} \quad (5.59)$$

A questo punto, si calcolano facilmente le derivate,  $X^{\mu'}$  e  $\dot{X}^\mu$ :

$$\dot{X}^\mu = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu \cos n\sigma e^{-in\tau}, \quad (5.60)$$

$$X^{\mu'} = -i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu \sin n\sigma e^{-in\tau}. \quad (5.61)$$

Sommando e sottraendo membro a membro, ricaviamo

$$\dot{X}^\mu \pm X^{\mu'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^\mu e^{-in(\tau \pm \sigma)}. \quad (5.62)$$

Ora, è necessario specificare i coefficienti  $\alpha_n^\mu$  in modo che (5.37) sia soddisfatta. Imponiamo, per cominciare, che

$$n^\mu = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \dots, 0 \right). \quad (5.63)$$

La condizione imposta definisce il gauge cono-luce, nel quale, alle coordinate  $X^0$  e  $X^1$  sono sostituite le combinazioni lineari

$$X^+ = \frac{X^0 + X^1}{\sqrt{2}}; \quad (5.64)$$

$$X^- = \frac{X^0 - X^1}{\sqrt{2}}. \quad (5.65)$$

La trasformazione che lega i due set di coordinate, come è elementare verificare, non è di Lorentz. La metrica, dunque, cambia, al prezzo della perdita della covarianza delle leggi<sup>3</sup>. Poichè

$$2dx^+ dx^- = (dx^0)^2 - (dx^1)^2, \quad (5.66)$$

allora

$$ds^2 = 2dx^+ dx^- - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 = \hat{g}^{\mu\nu}, \quad (5.67)$$

dove

$$\hat{g}^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (5.68)$$

è il tensore metrico nella rappresentazione di cono-luce. Come diventano le condizioni di gauge per la stringa in questa rappresentazione? In ragione delle seguenti espressioni delle proiezioni di  $X$  e di  $p$  sull'iperpiano ortogonale al vettore  $n$ ,

$$n \cdot X = \frac{X^0 + X^1}{\sqrt{2}} = X^+, \quad n \cdot p = \frac{p^0 + p^1}{\sqrt{2}}. \quad (5.69)$$

segue che

$$X^+(\tau, \sigma) = \beta \alpha' p^+ \tau, \quad p^+ \sigma = \frac{2\pi}{\beta} \int_0^\sigma d\tilde{\sigma} \mathcal{P}^{\tau+}(\tau, \tilde{\sigma}). \quad (5.70)$$

---

<sup>3</sup>Cf. [4, cap.1]

Poichè, come discusso nel capitolo 4,  $p^\mu$  si conserva, la seconda equazione stabilisce che la densità di momento lungo la stringa è costante. Sviluppando l'equazione (5.37) con la metrica  $\hat{g}^{\mu\nu}$ , si trova

$$2 \left( \dot{X}^+ \pm X^{+'} \right) \left( \dot{X}^- \pm X^{-'} \right) + \left( \dot{X}^I \pm X^{I'} \right) = 0, , \quad (5.71)$$

con  $I = 2, 3, \dots, D$  e con la solita convenzione che gli indici ripetuti si intendono sommati. Poichè, dalla condizione di gauge sappiamo che

$$\dot{X}^+ = \beta \alpha' p^+; \quad (5.72)$$

$$X^{+'} = 0, \quad (5.73)$$

troviamo

$$\dot{X}^- \pm X^{-'} = \frac{1}{2\beta \alpha' p^+} \left( \dot{X}^I \pm X^{I'} \right)^2. \quad (5.74)$$

L'unica difficoltà di questa equazione è l'eventualità che  $p^+$  sia nullo, che può realizzarsi solo per una particella che viaggia alla velocità della luce lungo l'asse  $x$  nel verso negativo. Questo è l'inconveniente della rappresentazione di cono-luce, insieme, naturalmente, con la perdita della covarianza delle leggi fisiche, non essendo il sistema di riferimento di Lorentz, come abbiamo già notato. Nonostante ciò, ad oggi questo è l'unico gauge nel quale si sappiano affrontare calcoli non banali in teoria delle stringhe.

Abbiamo mostrato che

1. Le soluzioni cercate possono trovarsi sotto forma di serie di Fourier.
2.  $X^+$  non presenta dinamica. Infatti  $X^+ = 2\alpha' \beta p^+ \tau \equiv \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^+ \tau$ . Tutti i modi di oscillazione sono nulli.
3. La dinamica di  $X^-$  è completamente determinata dal moto delle rimanenti D-1 coordinate.

Supponiamo, adesso, di voler determinare la soluzione delle equazioni per una stringa aperta, con condizioni ai limiti di Neumann. Allora

$$X^I(\tau, \sigma) = x_0^I + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^I \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n} \alpha_n^I e^{-in\tau} \cos n\sigma. \quad (5.75)$$

Ora,  $X^-$  è una combinazione lineare di due coordinate che soddisfano condizioni ai limiti di Neumann ed un'equazione d'onda lineare. Ne segue che lo stesso varrà per  $X^-$ , che potrà ugualmente essere sviluppato in serie di Fourier, cioè

$$X^-(\tau, \sigma) = x_0^- + \sqrt{2\alpha'} \alpha_0^- \tau + i\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n} \alpha_n^- e^{-in\tau} \cos n\sigma. \quad (5.76)$$

Per (5.62),

$$\dot{X}^- \pm X^{-'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^- e^{-in(\tau \pm \sigma)}, \quad (5.77)$$

$$\dot{X}^I \pm X^{I'} = \sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^I e^{-in(\tau \pm \sigma)}. \quad (5.78)$$

Per queste equazioni e per (5.74) ricaviamo questa espressione:

$$\sqrt{2\alpha'} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \alpha_n^- e^{-in(\tau \pm \sigma)} = \frac{1}{2p^+} \sum_{p, q \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_q^I e^{-i(p+q)(\tau \pm \sigma)}, \quad (5.79)$$

$$= \frac{1}{2p^+} \sum_{n, p \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I e^{-in(\tau \pm \sigma)}, \quad (5.80)$$

$$= \frac{1}{2p^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left( \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_p^I \alpha_{n-p}^I \right) e^{-in(\tau \pm \sigma)}. \quad (5.81)$$

Ne segue l'identità:

$$\sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{1}{2p^+} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I. \quad (5.82)$$

Questa equazione lega i coefficienti dello sviluppo di  $X^I$  a quelli di  $X^-$ , determinando completamente ed esplicitamente la soluzione, una volta che siano stati fissati:  $\alpha_n^I$  per ogni  $I$  ed  $n$ ,  $p^+$ ,  $x_0^I$ ,  $x_0^-$ . I coefficienti dello sviluppo di  $X^-$ , data l'importanza che assumono nella teoria quantistica, hanno un nome: sono i *modi trasversi di Virasoro*. Per definizione, l' $n$ -esimo modo è dato da

$$\sqrt{2\alpha'} \alpha_n^- = \frac{1}{p^+} L_n^\perp, \quad (5.83)$$

dove

$$L_n^\perp \stackrel{def}{=} \frac{1}{2} \sum_{p \in \mathbb{Z}} \alpha_{n-p}^I \alpha_p^I. \quad (5.84)$$

Da questa definizione e dall'equazione (5.77) si determina che

$$\dot{X}^- \pm X^{-'} = \frac{1}{p^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}} L_n^\perp e^{-in(\tau \pm \sigma)}. \quad (5.85)$$

Prendendo la semisomma, integrando rispetto a  $\tau$  e considerando le condizioni iniziali, si ottiene questa soluzione finale:

$$X^-(\tau, \sigma) = x_0^- + \frac{1}{p^+} L_0^+ \tau + \frac{i}{p^+} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{n} L_n^\perp e^{-in\tau} \cos n\sigma. \quad (5.86)$$

Calcoliamo, per concludere la trattazione, la massa della stringa, sfruttando la relazione relativistica che lega la massa al quadrimomento,

$$M^2 = p^2 = 2p^+ p^- - p^I p^I. \quad (5.87)$$

Poichè, dall'equazione (5.83),

$$\sqrt{2\alpha'}\alpha_0^- = 2\alpha'p^- = \frac{1}{p^+}L_0^\perp, \quad (5.88)$$

che implica

$$2p^+p^- = \frac{1}{\alpha'}L_0^\perp. \quad (5.89)$$

Dalla definizione dei modi di Virasoro (5.84)

$$2p^+p^- = \frac{1}{\alpha'} \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^{I*} \alpha_n^I \right) = p^I p^I + \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I*} a_n^I. \quad (5.90)$$

Infine, da (5.87) segue che

$$M^2 = \frac{1}{\alpha'} \sum_{n=1}^{\infty} n a_n^{I*} a_n^I. \quad (5.91)$$

Concludiamo che la massa della stringa è positiva. Inoltre, poichè una soluzione resta tale se è ridefinita per un fattore di scala, una particolare combinazione di frequenze di vibrazione può sussistere per una stringa di massa arbitraria.

## 5.4 Cenni sulla quantizzazione della stringa aperta relativistica

*In quest'ultima sezione<sup>4</sup>, riassumiamo i risultati basilari sulla quantizzazione di una stringa aperta, determinando le relazioni di commutazione fondamentali per gli operatori di stringa. Introduciamo, inoltre, l'Hamiltoniana quantistica di stringa<sup>5</sup> e determiniamo le equazioni del moto per il quadrivettore operatoriale  $X^\mu$ .*

Per procedere alla quantizzazione della stringa aperta, è necessario fissare il gauge nel quale si vuole lavorare. Diciamo già, quindi, che proseguiremo ad adottare il gauge-cono luce già sfruttato in questo capitolo. Stabiliamo, inoltre, di continuare a lavorare nel sistema di unità di misura naturali:  $c = \hbar = 1$ . Abbiamo mostrato che, con questa scelta, l'equazione del moto per le coordinate di stringa è lineare; più precisamente, è un'equazione d'onda del tipo

$$\ddot{X}^\mu - X^{\mu''} = 0, \quad (5.92)$$

e che vale il vincolo

$$\left( \dot{X} \pm X' \right)^2 = 0, \quad (5.93)$$

---

<sup>4</sup>Il riferimento per tutto il seguito è [5, Cap.12]

<sup>5</sup>Il riferimento per i concetti di meccanica quantistica utilizzati di seguito è [6]

che consente di scrivere delle espressioni delle derivate della densità di lagrangiana di stringa molto semplici :

$$\mathcal{P}^{\sigma\mu} = -\frac{1}{2\pi\alpha'} X^{\mu'}, \quad \mathcal{P}^{\tau\mu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^\mu. \quad (5.94)$$

La condizione di parametrizzazione per una stringa aperta impone che sia  $X^+ = 2\alpha' p^+ \tau$ , da cui, risolvendo rispetto ad  $X^-$  in termini delle coordinate trasverse, si ottiene che

$$\dot{X}^- = \frac{1}{2\pi\alpha' 2p^+} \left( \dot{X}^I \dot{X}^I + X^{I'} X^{I'} \right). \quad (5.95)$$

Quindi

$$\mathcal{P}^{\tau-} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \dot{X}^- = \frac{\pi}{2p^+} \left( \mathcal{P}^{\tau I} \mathcal{P}^{\tau I} + \frac{X^{I'} X^{I'}}{(2\pi\alpha')^2} \right). \quad (5.96)$$

Per impostare una teoria quantistica, è necessario definire un set completo di operatori. Non tutte le grandezze che compaiono nella soluzione relativistica delle equazioni del moto possono, evidentemente, essere indipendenti. Per individuarne un insieme adatto, si può fare riferimento al procedimento che si usa nella quantizzazione della teoria della particella puntiforme relativistica. Non ci dilungheremo, in questa sede, sul meccanismo di quantizzazione, ma richiameremo la soluzione relativistica del problema nel gauge-cono luce, per giustificare compiutamente la scelta degli operatori che stiamo per proporre.

Consideriamo l'azione per una particella relativistica libera, che, come è noto, si scrive

$$S = -m \int_{\tau_i}^{\tau_f} \sqrt{g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}} d\tau, \quad (5.97)$$

dove, come abbiamo già detto,

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = \dot{x}^2. \quad (5.98)$$

Precisiamo che qui  $\tau$  è un parametro adimensionale. L'integrando è la lagrangiana di particella libera. Il momento si ottiene derivandola rispetto alla velocità, cioè

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\mu} = \frac{m \dot{x}_\mu}{\sqrt{\dot{x}^2}}. \quad (5.99)$$

Poichè la lagrangiana non dipende dalla coordinata  $x^\mu$ , le equazioni di Eulero-Lagrange per la particella libera sono, come del resto è noto,

$$\frac{dp_\mu}{d\tau} = 0. \quad (5.100)$$

Fissiamo la condizione di gauge-cono luce imponendo che

$$\mathbf{x}^+ = \frac{1}{\mathbf{m}^2} \mathbf{p}^+ \tau, \quad (5.101)$$

dove il fattore  $\frac{1}{m^2}$  è richiesto perchè l'equazione sia consistente dimensionalmente<sup>6</sup>. Prendendo la componente + dell'equazione (5.99), vediamo che

$$p^+ = \frac{m}{\sqrt{\dot{x}^2}} \dot{x}^+ = \frac{1}{\sqrt{\dot{x}^2}} \frac{p^+}{m}, \text{ da cui il vincolo } \dot{x}^2 = \frac{1}{m^2}. \quad (5.102)$$

Da qui possiamo semplificare per sostituzione le espressioni precedenti. La definizione di momento diventa

$$p_\mu = m^2 \dot{x}_\mu. \quad (5.103)$$

Ma allora, dall'equazione del moto otteniamo

$$\ddot{x} = 0. \quad (5.104)$$

Dalla nuova forma assunta dal momento lineare, dall'equazione  $\dot{x}^2 = \frac{1}{m^2}$  segue che

$$p^2 - m^2 = 0, \quad (5.105)$$

che possiamo riscrivere, dato che ci interessa determinare la legge oraria per la componente  $x^-$ , come

$$2p^+p^- - p^I p^I - m^2 = 0, \quad (5.106)$$

che implica quindi

$$p^- = \frac{1}{2p^+} (p^I p^I + m^2). \quad (5.107)$$

A questo punto, l'equazione (5.103) da

$$\frac{dx^-}{d\tau} = \frac{1}{m^2} p^-, \text{ da cui } x^-(\tau) = x_0^- + \frac{p^-}{m^2} \tau. \quad (5.108)$$

Un'equazione identica vale per tutte le coordinate trasverse  $x^I$ :

$$x^I(\tau) = x_0^I + \frac{p^I}{m^2} \tau, \quad (5.109)$$

dove  $x_0^I$  ed  $x_0^-$  sono le costanti di integrazione.

A questo punto, gli operatori quantistici per la particella puntiforme si individuano facilmente: il momento  $p^-$ , e quindi  $x^-$ , è completamente determinato dai momenti  $p^I$  lungo gli assi trasversi;  $x^+$ , per scelta di gauge, è determinato una volta assegnato  $p^+$ ; la specificazione completa di  $x^I$ , d'altro canto, richiede di fissare unicamente le coordinate iniziali  $x_0^I$ , qualunque sia  $I$ . Tuttavia, per simmetria e per sfruttare le note relazioni fra coordinate e momenti canonicamente coniugati note dalla meccanica quantistica

---

<sup>6</sup>Cf. il paragrafo 5.1

delle particelle puntiformi, si scelgono le coordinate  $x^I$  anzichè le coordinate iniziali. Il set di osservabili scelto, dunque, è:

$$x^I, x_0^-, p^I, p^+. \quad (5.110)$$

Sono questi gli operatori che entrano in gioco nella quantizzazione della particella puntiforme relativistica.

Terminata questa digressione, è chiaro che, seguendo l'analogia, gli operatori che entrano in gioco nella quantizzazione della stringa, in rappresentazione di Heisenberg, sono

$$X^I(\tau, \sigma), x_0^-(\tau), \mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma), p^+(\tau). \quad (5.111)$$

Ci aspettiamo, chiaramente, che  $x_0^-$  e  $p^+$  siano operatori completamente indipendenti dal tempo. Ora, la novità in questi operatori, rispetto a quelli per la particella puntiforme, è la dipendenza dalla coordinata  $\sigma$ . Ci aspettiamo, chiaramente, che le misure effettuate in due diversi punti della stringa non interferiscano fra loro: da qui concludiamo che è ragionevole porre

$$[X^I(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma')] = i\delta^{IJ}\delta(\sigma - \sigma'), \quad (5.112)$$

dove  $\delta^{IJ}$  è la delta di Kronecker, mentre  $\delta(\sigma - \sigma')$  è la funzione di Dirac. L'equazione non è che la traduzione, punto per punto sulla stringa, delle relazioni di commutazione canoniche della meccanica quantistica, cui si aggiungono in modo naturale

$$[X^I(\tau, \sigma), X^J(\tau, \sigma')] = [\mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma), \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma')] = 0, \quad (5.113)$$

dato che nemmeno le misure effettuate lungo assi coordinati differenti devono interferire tra di loro. In realtà, si deve tener conto di un'ulteriore commutatore, cioè

$$[x_0^-(\tau), p^+(\tau)] = \hat{g}^{-+}i = -i. \quad (5.114)$$

Per giustificarlo, dobbiamo soffermarci un attimo: quando si passa dalle coordinate ordinarie dello spazio di Minkowski (sistema cartesiano più orologio), alla rappresentazione di cono-luce, le prime due nuove coordinate divengono combinazioni lineari delle prime due ordinarie<sup>7</sup>. In questo modo, nella nuova rappresentazione non si dispone di una coordinata che sia naturalmente associabile al tempo, come  $ct$  nel caso delle coordinate ordinarie. Si pone, allora, per definizione,  $x^+$  eguale al tempo di cono luce. Sappiamo che il prodotto scalare fra due quadrivettori  $x$  e  $y$ , nella rappresentazione di cono luce, si scrive come

$$x \cdot y = x_i y^i = x^+ y^- + x^- y^+ + x_2 y^2 + x_3 y^3. \quad (5.115)$$

---

<sup>7</sup>Cf. le equazioni (5.64) e (5.65)

Volendo rappresentarlo, come in un sistema di Lorentz, nella forma

$$x^+y_+ + x^-y_- + x^2y_2 + x^3y_3, \quad (5.116)$$

concludiamo che

$$x_+ = -x^-; \quad (5.117)$$

$$x_- = -x^+. \quad (5.118)$$

Consideriamo, ora, l'espressione della funzione d'onda di una particella quantistica libera con energia  $E$  e momento  $p$ :

$$\psi(t, \vec{x}) = \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} (Et - \vec{p} \cdot \vec{x}) \right]. \quad (5.119)$$

L'hamiltoniana standard, che genera traslazione temporale, è  $H = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ , ed il suo autovalore è  $E$ . Ci aspettiamo che, nella rappresentazione di cono-luce, l'operatore hamiltoniano sia dato, a meno di un fattore costante, da una derivata rispetto ad  $x^+$ , ovvero che sia del tipo

$$H_{cl} = i\hbar \frac{\partial}{\partial x^+} \text{ da cui } H_{cl}\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x^+} = \frac{E_{cl}}{c} \psi, \quad (5.120)$$

dove il  $c$  al denominatore dell'autovalore è determinato dal fatto che  $x^+$  è una lunghezza, non un tempo. Il prodotto scalare che compare nella funzione d'onda, usando la rappresentazione del prodotto scalare appena introdotta, diventa

$$-(Et - \vec{p} \cdot \vec{x}) = p_+x^+ + p_-x^- + p_2x^2 + p_3x^3, \quad (5.121)$$

da cui segue che la funzione d'onda si può scrivere come

$$\psi(t, \vec{x}) = \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (p_+x^+ + p_-x^- + p_2x^2 + p_3x^3) \right]. \quad (5.122)$$

Applicando l'operatore  $H_{cl}$ , otteniamo

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial x^+} = -p_+ \psi \rightarrow -p_+ = p^- = \frac{E_{cl}}{c}. \quad (5.123)$$

Abbiamo mostrato che  $x^+$  e  $p^-$  sono variabili coniugate ( $p^-$  è detta energia di cono-luce). Quindi viene naturale, dato che, eccetto la prima e la seconda, tutte le altre componenti dei quandrivettori posizione ed impulso rimangono coniugate nella rappresentazione di cono-luce, concludere che anche  $p^+$  ed  $x^-$  lo siano. Ciò giustifica l'ultimo dei commutatori introdotti, a meno del segno, che è, però, un postulato. Naturalmente, ci aspettiamo anche che  $x_0^-$  e  $p^+$  commutino con tutti gli altri operatori:

$$[x_0^-, X^I(\tau, \sigma)] = [x_0^-, \mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma)] = 0; \quad (5.124)$$

$$[p^+, X^I(\tau, \sigma)] = [p^+, \mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma)] = 0. \quad (5.125)$$

Questo completa l'insieme dei commutatori che ci siamo proposti di determinare.

Il passo successivo è trovare un'hamiltoniana per il sistema. Partiamo dalla posizione iniziale  $X^+ = 2\alpha' p^+ \tau$ , che comporta

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = \frac{\partial X^+}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial X^+} = 2\alpha' p^+ \frac{\partial}{\partial X^+}. \quad (5.126)$$

Poichè, come abbiamo appena stabilito,  $p^-$  ed  $X^+$  sono variabili canonicamente coniugate, nella rappresentazione di cono-luce, possiamo affermare che

$$\frac{\partial}{\partial X^+} = p^-, \quad (5.127)$$

da cui otteniamo che

$$H = 2\alpha' p^+ \int_0^\pi d\sigma \mathcal{P}^{\tau-}. \quad (5.128)$$

Dall'espressione (5.96), giungiamo alla fine all'espressione

$$H = \pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma \left( \mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma) \tau^I(\tau, \sigma) + \frac{X^{I'}(\tau, \sigma) X^{I'}(\tau, \sigma)}{(2\pi\alpha')^2} \right). \quad (5.129)$$

Questa è l'espressione dell'hamiltoniana quantistica di stringa. In realtà, la condizione di invarianza relativistica impone l'aggiunta di una costante, ma in questo elaborato non andremo oltre questi cenni alla teoria quantistica. Notiamo, infine, che, in virtù dell'equazione (5.89), si può scrivere

$$H = L_0^\perp. \quad (5.130)$$

Concludiamo derivando le equazioni del moto quantistiche. Sappiamo che un operatore  $a(t)$  di Heisenberg, nella cui rappresentazione stiamo lavorando, se corrisponde ad un operatore di Schroedinger non dipendente esplicitamente dal tempo, soddisfa equazioni del moto del tipo

$$i\dot{a}(t) = [a(t), H(t)], \quad (5.131)$$

dove  $H$  è l'hamiltoniana del sistema. Poichè, come si vede da (5.129), l'hamiltoniana della stringa aperta è costruita mediante operatori la cui dipendenza dal tempo è completamente implicita, concludiamo che l'hamiltoniana, ovvero l'energia, è una costante del moto. Costanti del moto sono anche  $x_0^-(\tau)$  e  $p^+$ , dato che non dipendono esplicitamente dal tempo e non compaiono nell'hamiltoniana.

Ora, dall'equazione (5.131) scriviamo, per la funzione  $X^I$ :

$$i\dot{X}^I(\tau, \sigma) = [X^I(\tau, \sigma), H(\tau)] = \left[ X^I(\tau, \sigma), \pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma' \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma) \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma') \right], \quad (5.132)$$

dove abbiamo considerato che

$$\left[ X^I(\tau, \sigma), X^{J'}(\tau, \sigma') \right] = \frac{\partial}{\partial \sigma'} \left[ X^I(\tau, \sigma), X^J(\tau, \sigma') \right] = 0. \quad (5.133)$$

Sfruttando l'equazione (5.112), troviamo che

$$i\dot{X}^I(\tau, \sigma) = 2\pi\alpha' \int_0^\pi d\sigma' \mathcal{P}^{\tau J}(\tau, \sigma') i\delta^{IJ} \delta(\sigma - \sigma'), \quad (5.134)$$

da cui otteniamo finalmente che

$$\dot{X}^I(\tau, \sigma) = 2\pi\alpha' \mathcal{P}^{\tau I}(\tau, \sigma). \quad (5.135)$$

Calcoliamo  $\dot{\mathcal{P}}^{\tau I}$ :

$$\begin{aligned} i\dot{\mathcal{P}}^{\tau I} &= [\mathcal{P}^{\tau I}, H(\tau)] \\ &= \left[ \mathcal{P}^{\tau I}, \frac{1}{4\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma' X^{J'}(\tau, \sigma') X^{J'}(\tau, \sigma') \right] = -\frac{\delta^{IJ}}{2\pi\alpha'} \int_0^\pi d\sigma' X^{J'} \frac{d}{d\sigma'} \delta(\sigma' - \sigma), \end{aligned} \quad (5.136)$$

dove abbiamo usato (5.112). Integrando per parti, otteniamo che

$$\dot{\mathcal{P}}^{\tau I} = \frac{1}{2\pi\alpha'} X^{I''}(\tau, \sigma), \text{ da cui } \dot{X}^I = 2\pi\alpha' \dot{\mathcal{P}}^{\tau I}, \quad (5.137)$$

che implica immediatamente

$$\ddot{\mathcal{P}} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \ddot{X}^I. \quad (5.138)$$

Otteniamo, quindi, che, anche quantisticamente, l'equazione del moto è

$$\ddot{X}^I - X^{I''} = 0, \quad (5.139)$$

che è un'equazione d'onda lineare, come ci saremmo aspettati.

# Conclusioni

La naturale prosecuzione degli argomenti affrontati finora sarebbe la scrittura e la discussione della soluzione dell'equazione del moto in termini dei modi di Virasoro, che divengono operatori definiti da combinazioni quadratiche di operatori di annichilazione e creazione del tutto analoghi a quelli che si incontrano studiando l'oscillatore armonico<sup>8</sup>. Lo sviluppo dei calcoli non richiede conoscenze di livello superiore a quello di un corso introduttivo di meccanica quantistica, ma è estremamente lungo e formale, mentre, come già detto, lo scopo di questo lavoro è di offrire una panoramica introduttiva delle idee fondamentali della teoria delle stringhe, evidenziandone soprattutto il contenuto fisico, come si è cercato di fare. Quindi, imponendo la condizione di invarianza sotto trasformazioni di Lorentz, si arriverebbe a mostrare che lo spazio-tempo deve essere a 26 dimensioni. La strada per spiegare l'esistenza di queste dimensioni non ordinarie, nel senso che la loro esistenza non è mai stata rilevata sperimentalmente, è tutt'altro che banale. Anzitutto, esiste la possibilità che le dimensioni, diciamo, straordinarie, possano essere, usando una terminologia da string-theorist, compattificate. Si tratterebbe, cioè, di mondi unidimensionali che si ripropongono uguali a se stessi dopo ogni intervallo di una certa lunghezza  $l_p$  estremamente piccola, attualmente al di fuori della portata degli acceleratori di particelle. Questo potrebbe essere verificato sperimentalmente in maniera indiretta, con un procedimento che si descrive qui qualitativamente: la legge di gravitazione, in più di quattro dimensioni, non segue la legge dell'inverso del quadrato della separazione fra le due masse. Se, quindi, si verificasse sperimentalmente la diversità dell'andamento della legge di gravitazione a brevi distanze, si otterrebbe una prova dell'esistenza di dimensioni extra. Tuttavia, la gravità è quasi impossibile da testare a distanze così piccole, dato l'assoluto predominio delle altre interazioni. Inoltre, anche la legge di Coulomb cambierebbe, da cui il problema della consistenza dell'idea delle dimensioni straordinarie, dato che questa legge è stata testata a distanze molto inferiori a quanto si sia potuto fare con la gravità. Si ragiona, allora, così: gli stati quantistici gravitonici, in teoria delle stringhe, emergono dalla quantizzazione delle stringhe chiuse, mentre i campi di Maxwell da stringhe aperte: si ipotizza, perciò,

---

<sup>8</sup>Cf. [6, cap.5]

che le stringhe che danno origine ai secondi siano vincolate a muoversi su una D-3 brana, il nostro spazio tridimensionale, che altro non sarebbe che un iperpiano tangente ad un universo con un maggior numero di dimensioni. D'altro canto, non potendo le stringhe chiuse essere vincolate a nulla, la gravità potrebbe presentare un comportamento differente dalla legge di Newton alle brevi distanze, comportamento che sicuramente, però, non riusciremo a rivelare ancora a lungo. Naturalmente, tutto quanto esposto è parte di una teoria ancora giovane, che dovrà assestarsi, costruendosi un'architettura consistente con quanto è noto finora sull'universo, superando molte prove di validità che potrebbero smentirla senz'altro.

# Bibliografia

- [1] R. Feynmann, M. Sands, R. Leighton *La fisica di Feynman, vol 1: Meccanica, radiazione, calore*, Zanichelli, 2001
- [2] N. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone *Analisi matematica 2*, Liguori Editore, 1996
- [3] Lev D. Landau, Evgenij M. Lifšits *Fisica teorica, vol. 1: Meccanica*, Editori Riuniti, 2004
- [4] Lev D. Landau, Evgenij M. Lifšits *Fisica teorica, vol.2: Teoria dei campi*, Editori Riuniti, 2004
- [5] B. Zwiebach *A first course in string theory*, Cambridge University Press, 2004
- [6] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloe *Mécanique quantique*, Collection enseignement des sciences, Hermann éditeurs des sciences et des arts, 1973