Equazione integrale di diffusione..

$$(\nabla^2+k^2)\Phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2) = -4\pi\delta(\vec{r}_1-\vec{r}_2)$$

Sviluppo in multipoli

$$\Phi(\vec{r}_1,\vec{r}_2)=\sum_L R_L(|\vec{r}_1-\vec{r}_2|)P_L(\cos\theta)$$

$$\delta(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)=\frac{1}{r_1 r_2}\delta(r_1-r_2)\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}Y^*_{l,m}(\hat{r}_1)Y_{l,m}(\hat{r}_2)$$

$$\sum_{m=-l}^{l}Y^*_{l,m}(\theta_1,\phi_1)Y_{l,m}(\theta_2,\phi_2)=\frac{2l+1}{4\pi}P_l(\cos\theta_{12})$$

$$\int_{-1}^{1}dx\, P_L(x) = 2\,\delta_{L,0}$$

A) Sviluppo in multipoli di ∇^2

B) Integrazione $\int_{-1}^{1} d(\cos\theta)$

C) Definiamo $r=|\vec{r}_1-\vec{r}_2|$

$$\frac{d^2}{dr^2}\left[rR_0(r)\right]+k^2\left[rR_0(r)\right]=0$$

Tranne che nel punto $r=0$

Tolgo lo zero al pedice $R_0(r)\to R(r)$

$$rR(r) = Ae^{ikr} + Be^{-ikr}$$ A e B costanti da determinare

L'equazione nel punto $r \to 0$ $kr \ll 1$

$$\nabla^2 \Phi(\vec{r}) = -4\pi\delta(\vec{r}) \leftarrow$$

Caso particolare dell'eq. di Poisson

$$\nabla^2 \Phi(\vec{r}) = -4\pi\rho(\vec{r})$$

soluzione $\Phi(\vec{r}) = \int \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}'|} d^3r'$

Dato che $\nabla^2 \frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}'|} = -4\pi\delta(\vec{r}-\vec{r}')$

Il caso $\longrightarrow$ è dato da $\rho(\vec{r}) = \delta(\vec{r}-\vec{r}')$

quindi $\Phi(\vec{r}) = \frac{1}{|\vec{r}|}$

$$R(r) = A\frac{e^{ikr}}{r} + B\frac{e^{-ikr}}{r} \xrightarrow[kr\ll 1]{} \frac{1}{r}$$

implica $A + B = 1$

Fisicamente abbiamo solo onde uscenti

quindi $B = 0; A = 1$

$$\Phi(\vec{r}) = R(r) = \frac{e^{ikr}}{r} \quad \| \leftarrow$$

Funzione di Green

Funzione di Green libera $E = \frac{\hbar^2}{2m} k^2$

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left[\nabla^2 + k^2\right] G^0(\vec{r},\vec{r}\,') = \delta(\vec{r}-\vec{r}\,')$$

Da quanto visto $G^0(\vec{r},\vec{r}\,') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}$

1

Soluzione eq. di Schrödinger da potenziale

$$\psi(\vec{r}) = e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \int G^0(\vec{r},\vec{r}\,') V(\vec{r}\,')\psi(\vec{r}\,')\, d^3r'$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla^2 + k^2)\psi(\vec{r}) = V(\vec{r})\psi(\vec{r})$$

$$\frac{\hbar^2}{2m}(\nabla^2 + k^2) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \int \frac{\hbar^2}{2m}(\nabla^2 + k^2) G^0(\vec{r},\vec{r}\,') V(\vec{r}\,')\psi(\vec{r}\,')\, d^3r'$$

$$= \frac{\hbar^2}{2m}(-k^2 + k^2) e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \int \delta(\vec{r}-\vec{r}\,') V(\vec{r}\,')\psi(\vec{r}\,')\, d^3r' = V(\vec{r})\psi(\vec{r})$$

Sviluppiamo $|\vec{r}-\vec{r}\,'|$ usando $(1+x)^n = 1 + nx + \frac{1}{2!}n(n-1)x^2 + \dots$

$$|\vec{r}-\vec{r}\,'| = (r^2 + r'^2 - 2\vec{r}\cdot\vec{r}\,')^{1/2} = r\left(1 - 2\frac{\vec{r}}{r^2}\cdot\vec{r}\,' + \frac{r'^2}{r^2}\right)^{1/2}$$

$$\xrightarrow[r \gg r']{} r\left[1 + \frac{1}{2}\left(-2\frac{\vec{r}}{r^2}\right)\cdot\vec{r}\,' + \dots\right] = r - \frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{r}\,' + O\left(\frac{\vec{r}\,'}{\vec{r}}\right)$$

$$\frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}\,'|}}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|} = \frac{e^{ik\left(r - \frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{r}\,'\right)}}{r} + O\left(\frac{\vec{r}\,'}{r}\right)$$

Il termine $\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{r}\,'$ è necessario al numeratore perché produce oscillazioni confrontabili con quelle di r.

Nel denominatore trascurabile

$$\psi(\vec r) - e^{i\vec k\cdot\vec r} = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3r' \, \frac{e^{ik|\vec r-\vec r'|}}{|\vec r-\vec r'|} V(\vec r')\psi(\vec r')$$

$$\xrightarrow[|\vec r|\gg|\vec r'|]{} -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int \frac{e^{ikr}}{r} e^{-ik\frac{\vec r\cdot\vec r'}{r}} V(\vec r')\psi(\vec r')\, d^3r'$$

$$= \frac{e^{ikr}}{r}\underbrace{\left[-\frac{m}{2\pi\hbar^2}\int d^3r' \, e^{-i\vec k\cdot\vec r'} V(\vec r')\psi(\vec r')\right]}_{f_k(\Omega)} \qquad \vec k = k\frac{\vec r}{r}$$

$$= \frac{e^{ikr}}{r}$$

$$\boxed{\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_k(\Omega)|^2 = \frac{m^2}{4\pi^2\hbar^4}\left|\langle\phi_b|V|\psi_a^+\rangle\right|^2}$$

GF5

Consideriamo due particelle che diffondono nel vuoto. La funzione d'onda del moto relativo può essere scritta come

$$\lim_{r\to\infty}\psi_{k_a}(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}_a\cdot\mathbf{r}} + f_{k_a}(\Omega)\frac{e^{k_a r}}{r} \tag{5.38}$$

e la sezione d'urto è legata all'ampiezza di transizione

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f_{k_a}(\Omega)|^2 \tag{5.39}$$

per un'hamiltoniana $H = T + V$ si può dimostrare che

$$\langle\phi_b|V|\psi_a\rangle = -\frac{2\pi\hbar^2}{m}f_a(\Omega) \tag{5.40}$$

dove abbiamo semplificato la scrittura indicando $a = k_a$ e analogamente per b. L'equazione (5.40) non descrive un elemento di matrice perché gli stati del valore di aspettazione non sono autostati della stessa hamiltoniana. Con ϕ abbiamo indicato l'hamiltoniana libera e con ψ l'hamiltoniana totale.

Definiamo le funzioni di Green come risolventi dell'hamiltoniana libera e interagente. Per la funzione di Green libera abbiamo che

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left[\nabla^2 + k^2\right]\mathcal{G}^0(\mathbf{r},\mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}') \tag{5.41}$$

e

$$\mathcal{G}^0(\mathbf{r},\mathbf{r}') = -\frac{m}{2\pi\hbar^2}\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \tag{5.42}$$

GF6

dove l'energia della particella libera è

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} \tag{5.43}$$

La soluzione dell'equazione di Schrödinger con potenziale è

$$\psi(\mathbf{r}) = e^{i\mathbf{k}_a\cdot\mathbf{r}} + \int d^3r'\, \mathcal{G}^0(\mathbf{r},\mathbf{r}')V(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}') \tag{5.44}$$

infatti inserendola nell'equazione

$$\frac{\hbar^2}{2m}\left[\nabla^2 + k^2\right]\psi(\mathbf{r}) = V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) \tag{5.45}$$

abbiamo

$$\begin{aligned} & \frac{\hbar^2}{2m}\left[\nabla^2 + k^2\right] e^{i\mathbf{k}_a\cdot\mathbf{r}} + \int d^3r'\, \frac{\hbar^2}{2m}\left[\nabla^2 + k^2\right] \mathcal{G}^0(\mathbf{r},\mathbf{r}')V(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}') \\ = & \frac{\hbar^2}{2m}\left[-k^2 + k^2\right] e^{i\mathbf{k}_a\cdot\mathbf{r}} + \int d^3r'\, \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\mathcal{G}^0(\mathbf{r},\mathbf{r}')V(\mathbf{r}')\psi(\mathbf{r}') \\ = & 0 + V(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

Definiamo un operatore $\mathcal{T}$ tale che

$$\langle\phi_b|\mathcal{T}|\phi_a\rangle = \langle\phi_b|V|\psi_a\rangle \tag{5.46}$$

Si ottiene l'approssimazione di Born dell'ampiezza di transizione sostituendo ψ con ϕ.

In termini operatoriali abbiamo che la (5.41) può essere riscritta come

$$(E - H_0)\mathcal{G}^0 = 1 \;\; ; \;\; \mathcal{G}^0 = (E - H_0)^{-1} \tag{5.47}$$

e la (5.44)

$$|\psi_a\rangle = |\phi_a\rangle + \mathcal{G}^0 V|\psi_a\rangle = |\phi_a\rangle + \frac{1}{E - H_0 + i\eta}V|\psi_a\rangle \tag{5.48}$$

dove è stato inserito il termine $i\eta$ per evitare divergenze. Moltiplicando a sinistra per V e considerando la definizione di $\mathcal{T}$ (5.46)

$$\begin{aligned} V|\psi_a\rangle &= V|\phi_a\rangle + V\frac{1}{E - H_0 + i\eta}V|\psi_a\rangle \\ \mathcal{T}|\phi_a\rangle &= \left(V + V\frac{1}{E - H_0 + i\eta}\mathcal{T}\right)|\phi_a\rangle \end{aligned} \tag{5.49}$$

che è l'equazione di Lipmann-Schwinger.