Teoria delle perturbazioni dipendente dal tempo

$$H = H_0 + \lambda H_1(t) \qquad \lambda \text{ costante}$$

$$H_0 |\phi_k\rangle = \tilde{E}_k |\phi_k\rangle \qquad \text{base completa}$$

$$\langle \phi_k | \phi_{k'} \rangle = \delta_{kk'}$$

$$i\hbar \frac{d\psi(t)}{dt} = H\psi(t)$$

$$\psi(t) = \sum_k c_k(t)\, \phi_k\, e^{-i\frac{\tilde{E}_k}{\hbar}t}$$

$$\langle \psi | \psi \rangle_t = 1 = \sum_{kk'} c_k^*(t)\, c_{k'}(t)\, \underbrace{\langle \phi_k | \phi_{k'} \rangle}_{\delta_{kk'}}\, e^{+i\frac{(\tilde{E}_k - \tilde{E}_{k'})t}{\hbar}}$$

$$= \sum_k |c_k(t)|^2 \qquad \text{Interpretazione probabilistica}$$

$$i\hbar \frac{d}{dt}\left[\sum_k c_k(t)\, \phi_k\, e^{-i\frac{\tilde{E}_k}{\hbar}t}\right] = \left(H_0 + \lambda H_1(t)\right)\left[\sum_k c_k(t)\, \phi_k\, e^{-i\frac{\tilde{E}_k}{\hbar}t}\right]$$

$$\sum_k \left[i\hbar \left(\frac{d}{dt} c_k(t)\right) \phi_k\, e^{-i\frac{\tilde{E}_k}{\hbar}t} + \cancel{i\hbar\, c_k(t)\, \phi_k \left(-i\frac{\tilde{E}_k}{\hbar}\right) e^{-i\frac{\tilde{E}_k}{\hbar}t}} \right] =$$

$$\sum_k \left[\cancel{c_k(t) \left(\tilde{E}_k \phi_k\right) e^{-i\frac{\tilde{E}_k}{\hbar}t}} + \lambda H_1(t)\, c_k(t)\, \phi_k\, e^{-i\frac{\tilde{E}_k}{\hbar}t} \right]$$

Moltiplico a sinistra per $\langle\phi_b|$

$$\frac{d}{dt}c_b(t) = \frac{1}{i\hbar}\sum_k \lambda \langle\phi_b|H_1(t)|\phi_k\rangle e^{i\omega_{bk}t} c_k(t) \quad ⊛$$

$$\omega_{bk} = \frac{1}{\hbar}\left(\tilde{E}_b - \tilde{E}_k\right)$$

dove ho usato $\langle\phi_b|\phi_k\rangle = \delta_{bk}$

Approssimazione

$$c_k(t) = c_k^{(0)} + \lambda c_k^{(1)} + \lambda^2 c_k^{(2)} + \dots$$

Inserendo nella ⊛ e uguagliando i termini con la stessa potenza di λ abbiamo

$$\frac{d}{dt}c_b^{(0)} = 0$$

$$\frac{d}{dt}c_b^{(1)} = (i\hbar)^{-1}\sum_k \langle\phi_b|H_1(t)|\phi_k\rangle e^{i\omega_{bk}t} c_k^{(0)}$$

$$\dots\dots\dots$$

$$\frac{d}{dt}c_b^{(n+1)} = (i\hbar)^{-1}\sum_k \langle\phi_b|H_1(t)|\phi_k\rangle e^{i\omega_{bk}t} c_k^{(n)}$$

Le $c_k^{(0)}$ sono indipendenti dal tempo

Fissiamo le condizioni iniziali.

Prima della perturbazione il sistema si trova in un preciso autostato di H_0: ϕ_a $\quad c_k^{0} = \delta_{ak}$

$$\frac{d}{dt} c_b^{(1)} = (i\hbar)^{-1} \langle \phi_b | H_1(t) | \phi_a \rangle e^{i\omega_{ab} t}$$

Probabilità di transizione (1° ordine)

$$P_{ba}^{(1)}(t) = |c_b^{(1)}(t)|^2 = \frac{1}{\hbar^2} \left| \int_{t_0}^{t} dt' \langle \phi_b | H_1(t') | \phi_a \rangle e^{i\omega_{ab} t'} \right|^2$$

t_0 il tempo quando la perturbazione si attiva

Per $c_a(t)$ abbiamo

$$c_a(t) = c_a^{(0)} + c_a^{(1)} = 1 + (i\hbar)^{-1} \int_{t_0}^{t} \langle \phi_a | H_1(t') | \phi_a \rangle dt'$$

perturbazione indipendente dal tempo

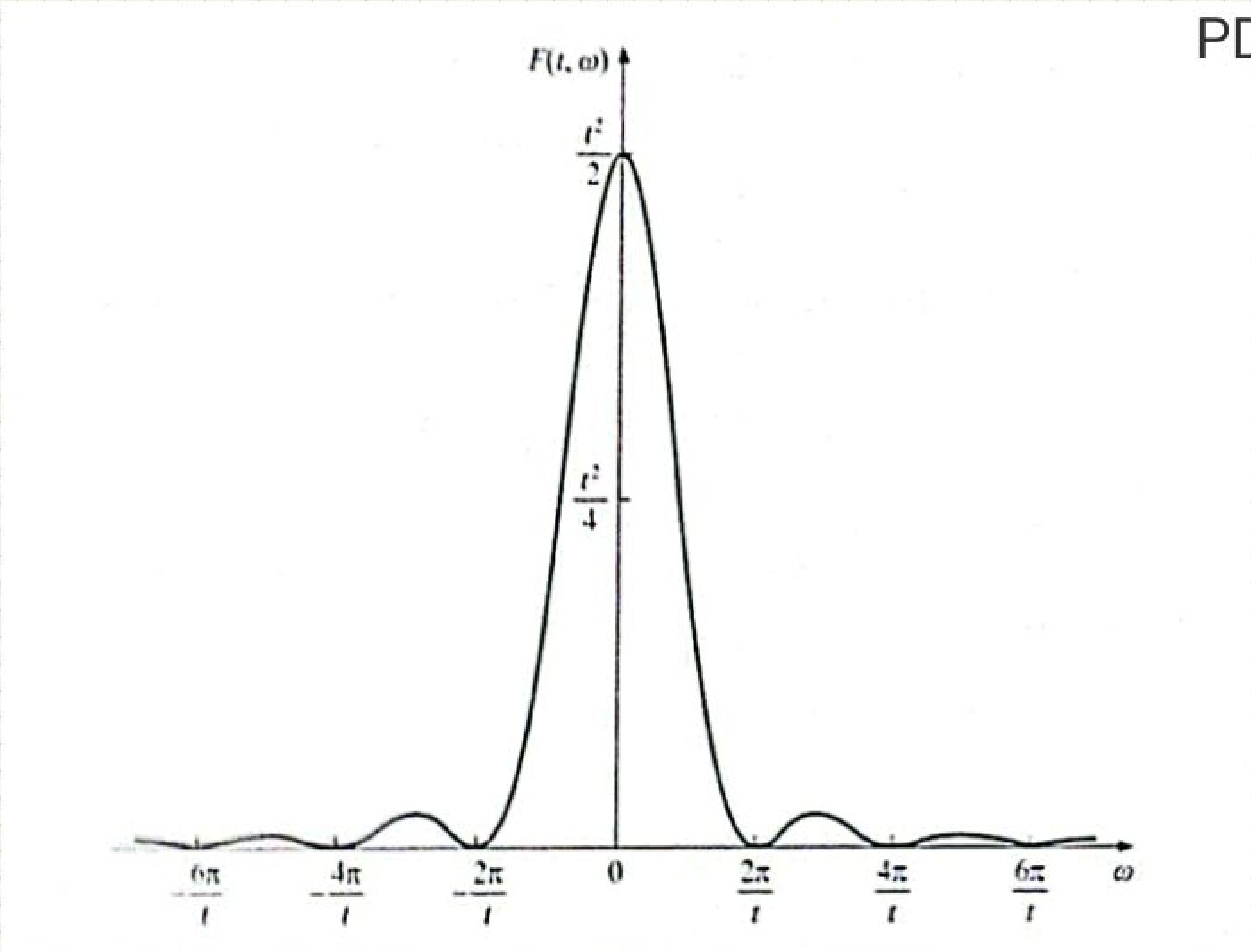
$$\langle \phi_\alpha | H_1(t) | \phi_\beta \rangle = \langle \phi_\alpha | H_1 | \phi_\beta \rangle \underline{\vartheta(t - t_0)} \equiv H_{1,\alpha\beta} \vartheta(t - t_0)$$

$$c_a^{(1)} = (i\hbar)^{-1} H_{1,aa} t \qquad t_0 = 0$$

$$c_b^{(1)} = \frac{1}{i\hbar} H_{1,ba} \int_0^t e^{i\omega_{ba} t'} dt' = \frac{H_{1ba}}{(i\hbar)(i\omega_{ba})} \left[e^{i\omega_{ba} t} - 1 \right]$$

$$P_{ba}^{(1)} = |c_b^{(1)}|^2 = \frac{|H_{1ba}|^2}{\hbar^2 \omega_{ba}^2} \left[1 - e^{i\omega_{ba} t} \right] \left[1 - e^{-i\omega_{ba} t} \right]$$

$$= \frac{2}{\hbar^2} |H_{1ba}|^2 \underbrace{\left[\frac{1 - \cos\omega_{ba} t}{\omega_{ba}^2} \right]}_{F(t,\omega_{ba})}$$



$$F(t,\omega) = \frac{1-\cos\omega t}{\omega^2} = \frac{2\sin^2(\omega t/2)}{\omega^2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(t,\omega)\,d\omega = t\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,dx = t\pi$$

$$\lim_{t\to\infty} F(t,\omega) = \pi t\,\delta(\omega)$$

$$P_{ba}^{(1)}(t) = \frac{4|H_{1,ba}|^2}{\hbar^2\omega_{ba}^2}\,\underline{\sin^2\left(\frac{\omega_{ba}}{2}t\right)}$$

Oscillazioni

Transizione tra un gruppo di stati con energia compresa in un intervallo

$\tilde{E}_b - \eta \longleftrightarrow \tilde{E}_b + \eta$ $\qquad$ $\rho_n(E_n)$ densità degli stati

$\le E_n \le$

$$P^{(1)}_{ba} = \frac{2}{\hbar^2} \int_{\tilde{E}_b - \eta}^{\tilde{E}_b + \eta} |H_{1,ba}|^2 F(t, \omega_{na}) \rho_n(E_n)\, dE_n$$

$$\omega_{na} = \frac{E_n - \tilde{E}_a}{\hbar}$$

η piccolo H_1 e ρ_n costanti nell'intervallo di integrazione

$$P^{(1)}_{ba} = \frac{2}{\hbar^2} |H_{1,ba}|^2 \rho_b(\tilde{E}_b) \int_{\tilde{E}_b - \eta}^{\tilde{E}_b + \eta} F(t, \omega_{na})\, dE_n$$

t abbastanza grande che $\eta \gg \frac{2\pi\hbar}{t}$

Per la forma di F la maggior parte dell'integrale viene dalla parte centrale, quindi

$$\int_{\tilde{E}_b - \eta}^{\tilde{E}_b + \eta} F(t, \omega_{na})\, dE_n \approx \hbar \int_{-\infty}^{\infty} F(t, \omega_{na})\, d\omega_{na} = \pi \hbar t$$

$$P^{(1)}_{ba}(t) = \frac{2\pi}{\hbar} |H_{1,ba}|^2 \rho_b(E_b)\, t$$

Probabilità di transizione per unità di tempo

→ Tasso di transizione

$$\boxed{W_{ba} = \frac{dP'}{dt} = \frac{2\pi}{\hbar} |H_{1,ba}|^2 \rho_b(E_b)}$$

Regola d'oro di Fermi