$$|\tilde{\Phi}\rangle = \det(S)\,|\Phi\rangle \qquad 35)$$

Questo perche' ogni $|\tilde{k}\rangle$ e' il prodotto di $S_{kk'}$ e $|k'\rangle$, quindi la $S_{kk'}$ si può fattorizzare. Ma dato che S e' unitaria, si ha che $|\det(S)| = 1$.

Questo significa che il funzionale $E(\Phi)$ e' invariante per una trasformazione di base e quindi anche la sua variazione lo e'.

Nella nuova base si ha: ($|k\rangle$ corrisponde a $|\tilde{k}\rangle$)

$$\langle k|T|k\rangle + \sum_j \left[\langle kj|V|kj\rangle - \langle kj|V|jk\rangle\right] = \varepsilon_k \langle k|k\rangle = \langle k|h|k\rangle \qquad 36)$$

$$h|k\rangle = T|k\rangle + \sum_j \left[\langle j|V|j\rangle|k\rangle - \langle j|V|k\rangle|j\rangle\right] = \varepsilon_k|k\rangle \qquad 37)$$

definiamo

$$u(\vec{r}) = \sum_j \langle j|V|j\rangle = \sum_j \int d^3r'\, \phi_j^*(\vec{r}\,')\, V(\vec{r},\vec{r}\,')\, \phi_j(\vec{r}\,') \qquad 38)$$

$$W(\vec{r},\vec{r}\,') = \sum_j \phi_j^*(\vec{r}\,)\, V(\vec{r},\vec{r}\,')\, \phi_j(\vec{r}\,') \qquad 39)$$

L'eq. 37) si scrive

$$h\,\phi_k(\vec{r}) = \underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\phi_k(\vec{r}) + u(\vec{r})\,\phi_k(\vec{r})}_{\text{Hartree}} - \underbrace{\int W(\vec{r},\vec{r}\,')\,\phi_k(\vec{r}\,')\,d^3r'}_{\text{Fock-Dirac}} = \varepsilon_k\,\phi_k(\vec{r}) \qquad 40)$$

Nota che le somme in 38) e 39) vanno su tutti gli stati con $E < E_F$ quindi si tratta del moto di una particella $|k\rangle$ che interagisce con tutte e altre. La somma su 37 non e' ristretta, quindi ci sarebbe il problema di un'autointerazione. In realta' per $k=j$ i termini di Hartree e di Fock-Dirac sono uguali e si cancellano.