Usando $u(\vec r) = R_{nl}(r)\, Y_{l\mu}(\hat r)\, \chi^{1/2}_{s}$ 7)

$\chi^{1/2}_{s}$ è la funzione d'onda di spin: $\chi^{1/2}_{1/2} \equiv \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ $\chi^{1/2}_{-1/2} \equiv \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ 8)

$$\left(\frac{p_r^2}{2m} + \frac{l(l+1)}{2mr^2}\hbar^2 + V(r) - E\right) R(r)\, Y_{l\mu}(\hat r)\, \chi^{1/2}_{\sigma} = 0 \qquad 9)$$

$$p_r^2 R(r) = -\hbar^2 \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial R}{\partial r}\right) = -\hbar^2 \frac{1}{r^2}\left(2r\frac{\partial R}{\partial r} + r^2\frac{\partial^2 R}{\partial r^2}\right)$$

$$= -\hbar^2\left(\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial R}{\partial r}\right)$$

l'eq. 9 può essere riscritta come:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dR}{dr} + \left[\frac{2m}{\hbar^2}\left(E - V(r)\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] R(r) = 0 \qquad 10)$$

data la forma del potenziale 2)

$$\frac{2m}{\hbar^2}\left(E - V(r)\right) = \frac{2m}{\hbar^2}(E + V_0) \equiv k^2 \qquad 11)$$

e usando $\rho = kr$ dividendo per $k^2$ l'eq. 10) si ha:

$$\frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{dR(\rho)}{d\rho} + \left[1 - \frac{l(l+1)}{\rho^2}\right] R(\rho) = 0 \qquad 12)$$

l'eq. 12) è l'equazione differenziale che definisce le funzioni di Bessel sferiche (o con indice semi-intero)

$j_l(\rho)$ – Bessel regolare all'origine (reale) $\to \rho^l$ 13a)

$n_l(\rho)$ – Neumann irregolare all'origine (reale) $\rho^{-(l+1)}$ 13b)

$h^{\pm}_l(\rho) = n_l(\rho) \pm i\, j_l(\rho)$ – Hankel (complesse) 13c)