Caso b) Oscillatore armonico

Per $V(r)=\frac{1}{2}\mu\omega^2 r^2$ l'eq. di Schrödinger 10 diventa:

$$\frac{d^2R}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{dR}{dr}+\left[\frac{2\mu}{\hbar^2}E-\frac{\mu^2\omega^2 r^2}{\hbar^2}-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R(r)=0 \; .$$ 16

La soluzione di questa equazione è (n parte da 1)

$$R_{nl}(r)=A_{nl}\,(\alpha r)^l\,L_{n-1}^{l+1/2}(\alpha^2 r^2)\,e^{-\frac{1}{2}(\alpha^2 r^2)} \; .$$ 17

$$\alpha=\left(\frac{\mu\omega}{\hbar}\right)^{\frac{1}{2}}$$ 17a

$$A_{nl}=\left(\frac{2\,(n-1)!}{\Gamma(n+l+\frac{1}{2})}\right)^{1/2}\alpha^{3/2}$$ 17b

$$L_{n-1}^{l+1/2}(x)=\sum_{r=0}^{n-1}\frac{\Gamma(n-1+l+\frac{1}{2}+1)}{\Gamma(r+l+\frac{1}{2}+1)}\,\frac{(-x)^r}{r!\,(n-1-r)!}$$ 17c

Γ è la funzione gamma.

$$\Gamma(n+1)=n! \qquad (n=0,1,2\ldots)$$ 18a

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi} \qquad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}=\left(\frac{1}{2}\right)!$$ 18b

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\ldots(2n-1)}{2^n}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$ 18c

Gli autovalori sono dati dall'espressione:

$$E_{nl}=\hbar\omega\left(2(n-1)+l+3/2\right)=\hbar\omega\left(N+3/2\right)$$ 19

n comincia da 1 nella nostra convenzione