Confrontato con la soluzione ordinaria dell'oscillatore armonico

Polinomi di Hermite

$$H_n(x) = (-)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} \qquad 20)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x)\,dx = 2^n n! \sqrt{\pi} \qquad 20a)$$

La soluzione dell'equazione di Schrödinger a una dimensione e':

$$\psi_n(x) = K e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2} H_n(\alpha x) \qquad \alpha = \left(\frac{m\omega}{\hbar}\right)^{1/2} \qquad 21)$$

K e' una costante che viene fissata dalla normalizzazione

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^*(x)\psi_n(x)\,dx \stackrel{!}{=} 1 = K^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2} H_n^2(\alpha x)\,dx = \frac{K^2}{\alpha}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha^2 x^2} H_n^2(\alpha x)\,d(\alpha x)$$

$$= \frac{K^2}{\alpha} 2^n n! \sqrt{\pi} = 1 \qquad K = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}}\left(\frac{\alpha^2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}}$$

quindi la soluzione e':

$$\psi_n(x) = \left(\frac{\alpha^2}{\pi}\right)^{\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} e^{-\frac{1}{2}\alpha^2 x^2} H_n(\alpha x) \qquad 22)$$

Si puo' dividere l'equazione di Schrödinger a 3 dimensioni nelle 3 componenti e si hanno 3 equazioni indipendenti per ogni componente in modo che la soluzione finale puo' essere scritta come prodotto delle 3 componenti

$$\psi_{n_x,n_y,n_z}(\vec{r}) = \psi_{n_x}(x)\,\psi_{n_y}(y)\,\psi_{n_z}(z) \qquad 23)$$