$$E_k = \sqrt{m_k^2 + p^2} \cong p + \frac{m_k^2}{2p} \simeq p + \frac{m_k^2}{2E_k} \qquad 29)$$

questo se $m_k^2 << p^2$. In questo caso vale anche $p \simeq E_k$
Dato che tutte le masse a riposo sono molto più piccole delle energie si ha che $E_1 \simeq E_2 \simeq E_3 \simeq E$

$$\left(\frac{E_k - E_j}{2} t\right) \cong \frac{1}{2}\left[p^2 + \frac{m_k^2}{2E} - p^2 - \frac{m_j^2}{2E}\right] t = \frac{m_k^2 - m_j^2}{4E} t = \frac{\Delta m_{kj}^2}{4E} t \qquad 29)$$

Il prodotto scalare invariante dei quadrivettori

$$x_\mu p^\mu = 0 \qquad Et - \vec{p} \cdot \vec{x} = 0 \qquad t = \frac{\vec{p} \cdot \vec{x}}{E}$$

posso sempre sceglier $x \parallel p$

$$\text{poiché } |\vec{p}| \simeq E \qquad t = \frac{|\vec{p}|}{E} |\vec{x}| \simeq x \qquad 30)$$

Dalla 28, abbiamo

$$P(\nu_\alpha \to \nu_\beta; x) = \sum_{j,k} U_{\alpha j} U_{\alpha k} U_{\beta j} U_{\beta k} - 2 \sum_{j,k} U_{\alpha j} U_{\beta j} U_{\alpha k} U_{\beta k} \sin^2\left(\frac{\Delta m_{kj}^2}{4E} x\right)$$

$$= \delta_{\alpha\beta} - 2\left\{2 \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=j+1}^{3} U_{\alpha j} U_{\beta j} U_{\alpha k} U_{\beta k} \sin^2\left[\frac{\Delta m_{kj}^2}{4E} x\right]\right\} \qquad 31)$$

questo perché per $j = k$ $\Delta m_{kj}^2 = 0$ quindi $\sin^2(\Delta m_{kj}^2) = 0$

Definiamo la lunghezza di oscillazione

$$L_{osc} = \frac{2 p c^2 \hbar}{\Delta m^2} = 2 (197.3 \cdot 10^{-15}) \text{MeV m} \frac{E(\text{MeV})}{\Delta m^2 \left(\frac{eV}{10^6}\right)^2}$$

$$= 0.3946 \frac{E(\text{MeV})}{\Delta m^2 (eV)^2} \text{ m} \qquad 32)$$