

*Dear Radioactive Ladies and Gentlemen,*

*As the bearer of these lines, to whom I graciously ask you to listen, will explain to you in more detail, how because of the “wrong” statistics of the N and  ${}^6\text{Li}$  nuclei and the continuous beta spectrum, I have hit upon a desperate remedy to save the “exchange theorem” of statistics and the law of conservation of energy. Namely, the possibility that there could exist in the nuclei electrically neutral particles, that I wish to call neutrons, which have spin  $1/2$  and obey the exclusion principle and which further differ from light quanta in that they do not travel with the velocity of light. The mass of the neutrons should be of the same order of magnitude as the electron mass and in any event not larger than  $0.01$  proton masses. The continuous beta spectrum would then become understandable by the assumption that in beta decay a neutron is emitted in addition to the electron such that the sum of the energies of the neutron and the electron is constant...*

*I agree that my remedy could seem incredible because one should have seen those neutrons very earlier if they really exist. But only the one who dare can win and the difficult situation, due to the continuous structure of the beta spectrum, is lighted by a remark of my honoured predecessor, Mr. Debye, who told me recently in Bruxelles: “Oh, It’s well better not to think to this at all, like new taxes”. From now on, every solution to the issue must be discussed. Thus, dear radioactive people, look and judge. Unfortunately, I cannot appear in Tubingen personally since I am indispensable here in Zurich because of a ball on the night of 6/7 December. With my best regards to you, and also to Mr. Back.*

*Your humble servant*

*W. Pauli*

# Capitolo 1

## Aspetti teorici delle oscillazioni di neutrino

In questo capitolo si esamineranno brevemente alcuni aspetti teorici legati sia alla massa dei neutrini che alle oscillazioni di flavour. Esso è organizzato come segue: nel primo paragrafo verrà brevemente esaminato il problema delle masse dei neutrini, in particolare, i limiti su di essi derivanti da ricerche dirette. Nel secondo paragrafo si analizzerà la matrice di mixing e si esaminerà il fenomeno delle oscillazioni nel vuoto. Nel terzo paragrafo, invece, si esaminerà più in dettaglio il problema delle oscillazioni dei neutrini nella materia. Nel quarto paragrafo si discuterà infine dell'approssimazione di “dominanza di una scala di massa”.

### 1.1 Le masse dei neutrini

Se i neutrini hanno massa nulla, essi sono stati di elicità definita. Nel MSM i neutrini possiedono solo la componente levogira  $\nu_L$  mentre è assente la componente destrogira. Poiché l'operazione di coniugazione di carica inverte l'elicità, gli antineutrini sono invece destrogiri  $(\nu_L)_L^c = (\nu^c)_R$ . Se i neutrini sono massivi, il termine di massa deve necessariamente mescolare stati di elicità sinistrorsa e destrorsa. Ciò può avvenire in due modi:

- Esiste la componente destrogira  $\nu_R$  (sebbene  $\nu_R$  debba essere sterile) ed il termine di massa è quello usuale  $\bar{\nu}_R \nu_L + \text{h.c.}$ . In tal caso il termine di massa si dice di *Dirac*.
- Il termine di massa è del tipo  $\bar{\nu} \nu^c + \text{h.c.}$ , ovvero mescola stati di neutrino con stati di antineutrino (e quindi gli autostati di particella ed antiparticella non sono distinguibili). In questo caso il termine di massa si dice di *Majorana* [24].

Quest'ultima possibilità è peculiare per i neutrini. Infatti un termine di massa di Majorana è proibito per particelle elementari cariche [25] poiché implicherebbe la non conservazione della carica elettrica. Ovviamente un termine di massa di Majorana viola la conservazione del numero leptonico di due unità. Per esempio, sarebbe possibile il cosiddetto *doppio decadimento  $\beta$  senza neutrini*  $(Z, A) \rightarrow (Z + 2, A) + e^+ + e^-$ , che sarà discusso brevemente nel paragrafo 1.1.3. Tuttavia, mentre la conservazione della carica è assicurata dalla simmetria di gauge  $U(1)$ , la conservazione del numero leptonico deriva da una simmetria globale accidentale (derivante proprio dall'assenza di termini di massa per il neutrino). Ne consegue che non vi è nessun principio di simmetria di tipo fondamentale che assicura la conservazione del numero leptonico.

L'ipotesi più plausibile è che, se i neutrini sono massivi, entrambi i termini di massa, di Dirac e di Majorana, siano presenti. Ciò è giustificato da un meccanismo, detto see-saw, che

verrà discusso brevemente in seguito. Nel seguito verranno anche esaminati i limiti sulle masse (sia di Dirac che di Majorana) dei neutrini derivanti dalle ricerche dirette di massa.

### 1.1.1 Termini di massa di Dirac e Majorana

In questo paragrafo il problema dei termini di massa verrà affrontato molto brevemente. Una completa rassegna sull'argomento può essere trovata, ad esempio, in [26, 27, 28].

Come è noto, una particella di spin  $\frac{1}{2}$  è descritta da uno spinore a quattro componenti  $\Psi$ . Questo spinore si può decomporre nelle componenti levogira e destrogira per mezzo degli operatori di proiezione  $\mathbf{P}_L$  e  $\mathbf{P}_R$ <sup>1</sup> come:

$$\Psi_L = \mathbf{P}_L \Psi \equiv \left( \frac{1 - \gamma^5}{2} \right) \Psi, \quad \Psi_R = \mathbf{P}_R \Psi \equiv \left( \frac{1 + \gamma^5}{2} \right) \Psi. \quad (1.1)$$

Vi sono differenti rappresentazioni dello spinore  $\Psi$ . La più conveniente per la descrizione di spinori con chiralità definita è quella di *Weil* (detta anche *chirale* o  $\gamma^5$ -*diagonale*):

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_i \\ \sigma_i & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix}, \quad (1.2)$$

dove con  $\sigma_0$  si intende convenzionalmente la matrice unità  $2 \times 2$  e le  $\sigma_i$  sono le *matrici di Pauli*:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

In questa rappresentazione si ha, ovviamente:

$$\Psi_R = \begin{pmatrix} \varphi_R \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Psi_L = \begin{pmatrix} 0 \\ \varphi_L \end{pmatrix}, \quad \Psi = \Psi_L + \Psi_R = \begin{pmatrix} \varphi_R \\ \varphi_L \end{pmatrix}, \quad (1.4)$$

dove  $\varphi_L$  e  $\varphi_R$  sono spinori a due componenti. Uno *spinore di Dirac* è uno spinore in cui le componenti  $\Psi_R$  e  $\Psi_L$  sono tra di loro indipendenti. Lo spinore corrispondente all'antiparticella può essere ottenuto da quello di particella attraverso l'operazione di *coniugazione di carica*  $\Psi^c = \mathbf{C} \bar{\Psi}^T$  dove  $\mathbf{C} = i\gamma^0 \gamma^2$  [29]. Uno spinore di Majorana è definito in modo che esso risulta invariante sotto l'operazione di coniugazione di carica, ovvero  $\Psi^c = \Psi$ . Questa equazione ha due possibili soluzioni date rispettivamente da:

$$\begin{aligned} \chi &= \begin{pmatrix} \varphi_R \\ i\sigma_2 \varphi_R^* \end{pmatrix} \equiv \Psi_R + \Psi_R^c, \\ \rho &= \begin{pmatrix} -i\sigma_2 \varphi_L^* \\ \varphi_L \end{pmatrix} \equiv \Psi_L + \Psi_L^c. \end{aligned} \quad (1.5)$$

E' facile verificare che  $\chi^c = \chi$  e  $\rho^c = \rho$ . Uno spinore di Majorana è dunque uno spinore in cui le componenti  $\Psi_R$  e  $\Psi_L$  non sono tra di loro indipendenti, ma sono legate dalle relazioni (1.5). Si noti che  $\chi$  e  $\rho$  non hanno elicità definita.

Un *termine di massa* nella lagrangiana corrisponde ad una generica forma quadratica  $\bar{\Psi} \Psi$  dove  $\Psi$  può essere uno spinore di Dirac o di Majorana. Per uno spinore di Dirac, ricordando la (1.4), si ha:

$$\mathcal{L}^D = -m_D (\bar{\Psi}_L \Psi_R + \bar{\Psi}_R \Psi_L). \quad (1.6)$$

<sup>1</sup>D'ora innanzi tutte le matrici verranno convenzionalmente indicate in grassetto.

Questo termine viene detto *termine di massa di Dirac*: esso, come ovvio, mescola le componenti levogira e destrogira, in quanto uno spinore di Dirac massivo non può avere elicità definita. Per quanto riguarda i due spinori di Majorana, si ha invece:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_L^M &= -\frac{1}{2}m_L^M \bar{\chi}\chi = -\frac{1}{2}m_L^M (\bar{\Psi}_L^c \Psi_L + \bar{\Psi}_L \Psi_L^c), \\ \mathcal{L}_R^M &= -\frac{1}{2}m_R^M \bar{\rho}\rho = -\frac{1}{2}m_R^M (\bar{\Psi}_R^c \Psi_R + \bar{\Psi}_R \Psi_R^c).\end{aligned}\quad (1.7)$$

Il fattore 1/2 è puramente convenzionale. Questi termini vengono detti *termini di massa di Majorana*. Essi mescolano stati di particella e di antiparticella. E' possibile che entrambi i termini di massa siano presenti nella lagrangiana, per cui, in generale, si ha:

$$\mathcal{L}^{\text{massa}} = -m_D \bar{\Psi}_L \Psi_R - \frac{1}{2}m_L^M \bar{\Psi}_L^c \Psi_L - \frac{1}{2}m_R^M \bar{\Psi}_R^c \Psi_R + \text{h.c.} \quad (1.8)$$

Poiché  $\bar{\Psi}_L \Psi_R = \bar{\Psi}_L^c \Psi_R^c$ , la (1.8) si trasforma nella forma seguente, più compatta:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{\text{massa}} &= -\frac{1}{2}(\bar{\Psi}_L \ \bar{\Psi}_R^c) \begin{pmatrix} m_L^M & m_D \\ m_D & m_R^M \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_L^c \\ \Psi_R \end{pmatrix} + \text{h.c.} \\ &= -\frac{1}{2}(\bar{\Psi}_L \ \bar{\Psi}_R^c) \mathbf{M} \begin{pmatrix} \Psi_L^c \\ \Psi_R \end{pmatrix} + \text{h.c.}\end{aligned}\quad (1.9)$$

Questo è il più generale termine di massa per il neutrino nell'ipotesi di esistenza della componente destrogira  $\nu_R$ , ed è detto *termine di massa di Dirac-Majorana*.

### 1.1.2 Il meccanismo see-saw

Come già accennato nel capitolo ??, se i neutrini sono massivi vi è un problema di naturalezza legato al fatto che essi avrebbero comunque una massa molto più piccola rispetto agli altri fermioni. Questo problema è risolto in alcune teorie di grande unificazione (GUT) attraverso un meccanismo noto come *see-saw* [8]. Il punto di partenza è l'equazione (1.9) in cui si ipotizza che  $M \equiv m_R^M \gg m_D \equiv m$  mentre  $m_L^M = 0$ . La matrice  $\mathbf{M}$  in (1.9) diviene quindi:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 0 & m \\ m & M \end{pmatrix}. \quad (1.10)$$

Questa matrice può essere diagonalizzata ed ha autovalori  $m_+ \simeq M$  e  $m_- \simeq -m^2/M$ . Gli autostati corrispondenti sono i seguenti:

$$\begin{aligned}N &\simeq [\nu_R + \nu_R^c] + \frac{m}{M}[\nu_L + \nu_L^c], \\ \nu &\simeq -[\nu_L + \nu_L^c] + \frac{m}{M}[\nu_R + \nu_R^c].\end{aligned}\quad (1.11)$$

Il fatto che una massa sia negativa è solo un artefatto matematico. Infatti, ridefinendo  $\nu$  come:

$$\nu' = \gamma^5 \nu = [\nu_L - \nu_L^c] + \frac{m}{M}[\nu_R - \nu_R^c], \quad (1.12)$$

si vede che questo stato ha una massa positiva pari a  $+m^2/M$ .

Nelle teorie GUT che prevedono il meccanismo see-saw,  $M$  è sostanzialmente dell'ordine di grandezza della scala a cui si rompe la simmetria di grande unificazione, mentre  $m$  è dell'ordine

delle masse dei fermioni (quark o leptoni). Dalle (1.11) si vede che l'autostato  $N$ , più massivo, coincide praticamente con la componente destrogira (sterile) mentre l'autostato  $\nu$ , meno massivo, coincide praticamente con la componente levogira (attiva). Delle due, solo la componente  $\nu$  è quindi osservabile. Nel meccanismo *see-saw*, inoltre, quanto più grande è  $M$ , tanto più piccola è la massa di questa componente. Ciò giustificherebbe la piccolezza della massa dei neutrini rispetto a quella degli altri fermioni.

Nel caso di tre generazioni, ciascuno spinore in (1.9) andrà sostituito con un vettore composto da tre spinori (uno per ogni famiglia), mentre  $M$  ed  $m$  sono matrici  $3 \times 3$ . Dopo la diagonalizzazione si avranno tre neutrini  $N_1, N_2, N_3$  “quasi-destrogiri” con masse  $M_1, M_2$  ed  $M_3$ , autovalori della matrice  $M$ , e tre neutrini  $\nu_1, \nu_2, \nu_3$  “quasi-levogiri” molto leggeri. Le masse dei neutrini  $\nu_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sono gli autovalori della matrice seguente:

$$m_\nu = -m M^{-1} m^T, \quad (1.13)$$

e stanno tra di loro all'incirca nel seguente rapporto:

$$m_{\nu_1} : m_{\nu_2} : m_{\nu_3} \simeq \frac{m_{D_1}^2}{M_1} : \frac{m_{D_2}^2}{M_2} : \frac{m_{D_3}^2}{M_3}. \quad (1.14)$$

Esistono differenti versioni del meccanismo sopra descritto; in particolare, le masse di Dirac  $m_{D_i}$  in (1.14) possono essere dell'ordine delle masse dei quark di carica positiva o delle masse dei leptoni carichi della corrispondente famiglia (a seconda del modello GUT scelto). Inoltre, anche gli  $M_i$  possono variare da modello a modello. Per esempio nel *see-saw quadratico* si ha  $M_1 \simeq M_2 \simeq M_3$ ; in tal caso:

$$m_{\nu_1} : m_{\nu_2} : m_{\nu_3} \simeq m_u^2 : m_c^2 : m_t^2 \quad (\text{oppure } m_e^2 : m_\mu^2 : m_\tau^2). \quad (1.15)$$

Nel *see-saw lineare* invece si ha:

$$M_1 : M_2 : M_3 \simeq m_u : m_c : m_t, \quad (1.16)$$

e in tal caso anche le masse dei neutrini saranno nello stesso rapporto. Infine, l'ordine di grandezza di  $M$  dipende dal modello e varia tipicamente nell'intervallo  $10^3 \div 10^{16}$  GeV (ovvero, dalla scala di supersimmetria a quella di Plank). Le masse dei neutrini nel modello *see-saw* variano, quindi, dal MeV sino alla frazione di eV. In definitiva, come si è già osservato, paradossalmente la misura della massa dei neutrini può contribuire a fornire informazioni sulla scala di Grande Unificazione. Questa è una delle ragioni per cui ha una grande importanza la misura di una eventuale massa dei neutrini.

### 1.1.3 Limiti diretti alle masse del neutrino

In questo paragrafo verrà affrontato molto brevemente il problema della misura diretta delle masse dei neutrini. Per una rassegna completa si veda [30]<sup>2</sup>. La misura diretta della massa dei neutrini di una data generazione viene eseguita, in genere, attraverso l'analisi dei parametri cinematici dei prodotti di un decadimento in cui compare il neutrino stesso. Il limite più basso alla massa del  $\nu_\tau$  è stata posta dalla collaborazione ALEPH [31] mediante la misura della massa invariante nei decadimenti  $\tau^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\tau$  oppure  $\tau^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu + \bar{\nu}_\tau$  o anche  $\tau^- \rightarrow n\pi + \nu_\tau$ . Questa misura ha fornito il seguente limite superiore:

$$m_{\nu_\tau} < 23 \text{ MeV (95\% C.L.)}. \quad (1.17)$$

<sup>2</sup>Esistono anche dei limiti indiretti posti da considerazioni astrofisiche. Per semplicità non ci si occuperà di questi ultimi.

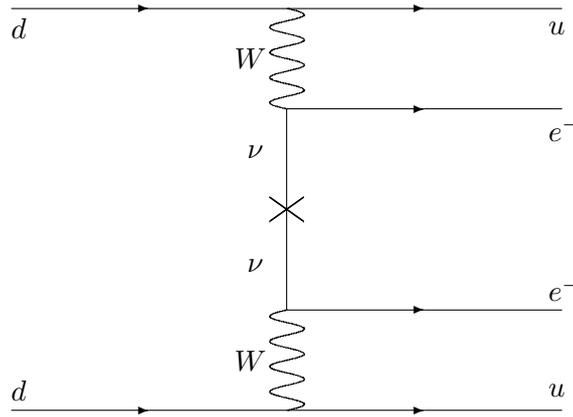


Figura 1.1: Doppio decadimento  $\beta$  senza neutrini.

Per quanto riguarda il  $\nu_\mu$ , si è studiato il decadimento di un pione positivo a riposo in  $\mu^+ + \nu_\mu$ . Dalla misura della massa invariante si è ricavato il seguente limite (esperimento PSI) [32]:

$$m_{\nu_\mu} < 170 \text{ keV (95\% C.L.)} . \quad (1.18)$$

Per quanto riguarda il  $\nu_e$ , il decadimento considerato è quello del trizio:



Lo spettro energetico degli elettroni emessi segue la *legge di Kurie*:

$$\frac{dN}{dE} \propto p(E + m_e) \sqrt{(E_0 - E)^2 - m_{\nu_e}^2} , \quad (1.20)$$

dove  $p$  ed  $E$  sono l'impulso e l'energia degli elettroni e  $E_0 = 18.6 \text{ keV}$  è la massima energia disponibile per l'elettrone nel caso  $m_{\nu_e} = 0$ . Se il neutrino emesso è massivo, gli elettroni non possono assumere un'energia superiore ad  $E_0 - m_{\nu_e}$ . La misura, quindi, viene eseguita cercando deviazioni dello spettro energetico vicino al bordo (cioè per  $E \simeq E_0$ ). Per queste energie, però, vi è una ridotta statistica di eventi di decadimento, come si può dedurre dall'equazione (1.20). Inoltre, vi sono da considerare anche effetti di fisica nucleare (per esempio, correzioni dovute allo spazio delle fasi) che possono influire sul decadimento e modificare lo spettro, anche per  $m_{\nu_e} = 0$ . Per questo motivo, questo tipo di esperimento è molto delicato. Il limite più basso alla massa del  $\nu_e$  è stato posto dall'esperimento di Troitsk [33] e vale:

$$m_{\nu_e} < 4.35 \text{ eV (95\% C.L.)} . \quad (1.21)$$

Oltre alle ricerche di tipo cinematico, sono state cercate evidenze di violazione del numero leptonico attraverso il doppio decadimento beta senza neutrini  $(Z, A) \rightarrow (Z + 2, A) + e^+ + e^-$ , come in figura 1.1. Il limite più forte posto su questo tipo di decadimento è quello ottenuto dalla collaborazione Heidelberg–Moscow al Gran Sasso [34]. In questo esperimento si cercano evidenze del decadimento seguente:



L'esperimento ha posto un limite superiore al tempo di dimezzamento per il  ${}^{76}\text{Ge}$  attraverso il decadimento (1.22) pari a  $T_{1/2} > 9.6 \times 10^{24}$  anni. Da questo risultato si è ottenuto un limite superiore alla massa di Majorana per il neutrino elettronico pari a:

$$m_{\nu_e}^M < 0.5 \text{ eV (95\% C.L.)} . \quad (1.23)$$

## 1.2 Matrici di mixing e oscillazioni nel vuoto

Nel paragrafo precedente si è fatta l'implicita assunzione che i neutrini  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$  e  $\nu_\tau$ , autostati di flavour, abbiano una massa definita. In realtà, se i neutrini sono massivi, è molto probabile che gli autostati di flavour non coincidano con quelli di massa (e questo indipendentemente dal carattere "Dirac" o "Majorana" del termine di massa per i neutrini), così come anticipato nel capitolo ???. In tal caso esisterà una matrice, detta di mescolamento o *mixing*, che connette gli autostati di massa a quelli di flavour. Questo fenomeno trova un parallelo nel settore dei quark, dove gli autostati di interazione forte per i quark di carica  $-1/3$  ( $d$ ,  $s$ ,  $b$ ) non coincidono con quelli di interazione debole ( $d_c$ ,  $s_c$ ,  $b_c$ ). La matrice di mixing nel caso dei quark viene detta di *Cabibbo–Kobayashi–Maskawa* (CKM) [35]. In questo paragrafo si introdurrà la matrice di mixing nel settore dei neutrini. Inoltre, si mostrerà qual è la conseguenza diretta del mixing tra i neutrini, ovvero il fenomeno delle *oscillazioni di flavour*.

### 1.2.1 Le interazioni dei neutrini nel Modello Standard

Nel Modello Standard, se si trascurano le piccole (poiché proporzionali alla massa) interazioni con i campi di Higgs, gli unici due tipi di interazione in cui compare il neutrino sono quello di *corrente carica*:

$$\mathcal{L}^{CC} = \frac{g}{\sqrt{2}} (\bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu, \bar{\nu}_\tau) \gamma^\lambda \frac{1 - \gamma^5}{2} \begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix} W_\lambda^+ + \text{h.c.}, \quad (1.24)$$

e di *corrente neutra*:

$$\mathcal{L}^{NC} = \frac{g}{2 \cos \theta_W} (\bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu, \bar{\nu}_\tau) \gamma^\lambda \frac{1 - \gamma^5}{2} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} Z_\lambda + \text{h.c.} \quad (1.25)$$

I termini di massa per i leptoni carichi ed, eventualmente, per i neutrini sono i seguenti:

$$\mathcal{L}_L^{\text{massa}} = (\bar{e}, \bar{\mu}, \bar{\tau}) \mathbf{M}_L \begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix}, \quad \mathcal{L}_\nu^{\text{massa}} = (\bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu, \bar{\nu}_\tau) \mathbf{M}_\nu \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}. \quad (1.26)$$

In generale, le matrici  $\mathbf{M}_L$  e  $\mathbf{M}_\nu$  non sono diagonali, però sono sicuramente hermitiane.

Come si vede, mentre la lagrangiana di interazione di corrente neutra è invariante sotto trasformazioni unitarie del tipo:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{O} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}, \quad (1.27)$$

dove  $\mathbf{O}$  è una matrice unitaria ( $\mathbf{O}^\dagger \mathbf{O} = \mathbf{I}$ ), quello di corrente carica non lo è. Ciò mostra come gli autostati di flavour sono anche autostati di interazione di corrente carica. Ciò li rende distinguibili l'uno dall'altro, poiché si trasformano nei rispettivi leptoni in una interazione di corrente carica. La lagrangiana (1.24) è invece invariante sotto rotazioni *simultanee* sia dei neutrini che dei leptoni carichi:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{O} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{O} \begin{pmatrix} e \\ \mu \\ \tau \end{pmatrix}. \quad (1.28)$$

Questa proprietà permette di ruotare la base dei leptoni carichi in modo da diagonalizzare la relativa matrice di massa, ovvero in modo che  $e$ ,  $\mu$  e  $\tau$  siano anche autostati di massa:

$$\mathbf{O}_L \mathbf{M}_L \mathbf{O}_L^\dagger = \begin{pmatrix} m_e & 0 & 0 \\ 0 & m_\mu & 0 \\ 0 & 0 & m_\tau \end{pmatrix}. \quad (1.29)$$

Se i neutrini sono massivi, in generale le matrici di massa dei leptoni carichi e quella dei neutrini non sono diagonalizzabili simultaneamente, ovvero  $\mathbf{O}_L \mathbf{M}_\nu \mathbf{O}_L^\dagger$ , dove  $\mathbf{O}_L$  è la trasformazione che diagonalizza la matrice di massa dei leptoni carichi, può non essere diagonale. Ciò implica che, per i neutrini, gli autostati di flavour non sono in generale anche autostati di massa, o, per dirla diversamente, i neutrini  $\nu_e$ ,  $\nu_\mu$  e  $\nu_\tau$  possono non avere una massa definita. Si noti che la scelta di diagonalizzare la massa nella base dei leptoni carichi è puramente convenzionale, sebbene sia la più semplice da un punto di vista pratico. La situazione è la stessa che si verifica nel caso dei quark, in cui si sceglie di definire gli autostati di massa  $u$ ,  $c$  e  $t$  anche come autostati deboli, mentre  $d$ ,  $s$  e  $b$  non coincidono con i relativi autostati deboli  $d_c$ ,  $s_c$  e  $b_c$ .

### 1.2.2 La matrice di mixing

Come già anticipato nel precedente paragrafo, in generale la matrice di massa può contenere elementi non diagonali. La lagrangiana di massa più generale per gli autostati di flavour è la seguente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\nu^{\text{massa}} &= (\bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu, \bar{\nu}_\tau) \begin{pmatrix} m_{ee} & m_{e\mu} & m_{e\tau} \\ m_{\mu e} & m_{\mu\mu} & m_{\mu\tau} \\ m_{\tau e} & m_{\tau\mu} & m_{\tau\tau} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \\ &= (\bar{\nu}_e, \bar{\nu}_\mu, \bar{\nu}_\tau) \mathbf{M}_\nu \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.30)$$

dove  $\mathbf{M}_\nu$  è una matrice hermitiana ( $m_{e\mu} = m_{\mu e}^*$ , etc.). La matrice  $\mathbf{M}_\nu$  può essere diagonalizzata attraverso una matrice unitaria  $\mathbf{U}$ , detta di mescolamento o *mixing*, nella maniera seguente:

$$\mathbf{U}^\dagger \begin{pmatrix} m_{ee} & m_{e\mu} & m_{e\tau} \\ m_{\mu e} & m_{\mu\mu} & m_{\mu\tau} \\ m_{\tau e} & m_{\tau\mu} & m_{\tau\tau} \end{pmatrix} \mathbf{U} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{pmatrix} \equiv \mathbf{M}_\nu^d. \quad (1.31)$$

La matrice  $\mathbf{M}_\nu^d$  (l'indice  $d$  sta per "diagonale") è la matrice di massa nella base degli autostati di massa  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  ed  $\nu_3$ , legati agli autostati di flavour attraverso la trasformazione:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix}. \quad (1.32)$$

Evidentemente, con questa posizione si ha semplicemente  $\mathcal{L}_\nu^{\text{massa}} = \sum_{i=1}^3 m_i \bar{\nu}_i \nu_i$ , dove i  $\nu_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) sono gli autostati di massa.

La matrice  $\mathbf{U}$  è simile alla matrice CKM per i quark. Se si trascurano effetti di *violazione di CP*<sup>3</sup>, tale matrice è reale e può essere scritta come prodotto di tre matrici di rotazione [36]:

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= \mathbf{U}_{23}(\psi) \times \mathbf{U}_{13}(\phi) \times \mathbf{U}_{12}(\omega) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c_\psi & s_\psi \\ 0 & -s_\psi & c_\psi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_\phi & 0 & s_\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -s_\phi & 0 & c_\phi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_\omega & s_\omega & 0 \\ -s_\omega & c_\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} c_\omega c_\phi & s_\omega c_\phi & s_\phi \\ -s_\omega c_\psi - c_\omega s_\psi s_\phi & c_\omega c_\psi - s_\omega s_\psi s_\phi & s_\psi c_\phi \\ s_\omega s_\psi - c_\omega c_\psi s_\phi & -c_\omega s_\psi - s_\omega c_\psi s_\phi & c_\psi c_\phi \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.33)$$

dove  $s_\psi = \sin \psi$ ,  $c_\psi = \cos \psi$ , etc. Ovviamente questa non è l'unica scelta possibile, ma è quella adottata più comunemente in letteratura. Gli angoli  $\phi$  ( $= \theta_{13}$ ),  $\psi$  ( $= \theta_{23}$ ) ed  $\omega$  ( $= \theta_{12}$ ) vengono detti *angoli di mixing*. Nel caso di due sole generazioni di neutrini, la matrice di mixing è più semplice e può essere scritta come funzione di un solo angolo di mixing, il quale, usualmente, viene indicato con  $\theta$  [37]:

$$\mathbf{U}(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (1.34)$$

Sebbene il caso di due generazioni non sia realistico, il suo studio è molto utile poiché, come si vedrà in seguito, molti dei problemi generali in tre generazioni di neutrini possono essere ridotti al caso di due generazioni.

### 1.2.3 Le oscillazioni di neutrino nel vuoto

Il fenomeno delle oscillazioni di flavour nel vuoto fu per la prima volta ipotizzato da Pontecorvo nel 1967 [38], nel caso più semplice di due generazioni di neutrini. In questo paragrafo si vuole illustrare il fenomeno nel caso generale di tre generazioni di neutrini, riducendosi a due generazioni come caso particolare.

Si consideri un neutrino che si propaga nel vuoto con impulso  $p$ . Esso sarà, a seconda della base scelta, una sovrapposizione degli autostati di flavour  $\nu_\alpha$  ( $\alpha = e, \mu, \tau$ ) o di massa  $\nu_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ). Questi ultimi, avendo massa ben definita, si propagano come autostati dell'Hamiltoniana<sup>4</sup>:

$$\mathbf{H}\nu_i = E_{\nu_i}\nu_i. \quad (1.35)$$

con autovalori:

$$E_{\nu_i} = \sqrt{m_i^2 + p^2} \simeq p + \frac{m_i^2}{2p} \simeq p + \frac{m_i^2}{2E_\nu}, \quad (1.36)$$

dove si sono usate le approssimazioni  $m_i^2 \ll p$  e  $E_{\nu_1} \simeq E_{\nu_2} \simeq E_{\nu_3} \equiv E_\nu$ . Nella base degli autostati di massa, l'Hamiltoniana è quindi diagonale e l'equazione di Schrödinger:

$$i \frac{\partial \nu_i}{\partial t} = \mathbf{H}\nu_i. \quad (1.37)$$

ha soluzione:

$$\begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \\ \nu_3(t) \end{pmatrix} = e^{-i\mathbf{H}t} \begin{pmatrix} \nu_1(0) \\ \nu_2(0) \\ \nu_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-iE_{\nu_1}t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{-iE_{\nu_2}t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{-iE_{\nu_3}t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_1(0) \\ \nu_2(0) \\ \nu_3(0) \end{pmatrix}. \quad (1.38)$$

<sup>3</sup>Gli effetti di violazione di CP non sono rilevanti per gli scopi di questa trattazione, e verranno sempre esclusi.

<sup>4</sup>D'ora innanzi si utilizzerà la convenzione  $\hbar = c = 1$ .

Per quanto detto nel paragrafo precedente, se si vuole descrivere il contenuto di flavour del neutrino occorre ruotare secondo la matrice  $\mathbf{U}$ . Al tempo  $t$  si ha:

$$\begin{pmatrix} \nu_e(t) \\ \nu_\mu(t) \\ \nu_\tau(t) \end{pmatrix} = \mathbf{U} \begin{pmatrix} \nu_1(t) \\ \nu_2(t) \\ \nu_3(t) \end{pmatrix} = \mathbf{U} e^{-i\mathbf{H}t} \mathbf{U}^\dagger \begin{pmatrix} \nu_e(0) \\ \nu_\mu(0) \\ \nu_\tau(0) \end{pmatrix}. \quad (1.39)$$

L'operatore  $\mathbf{U} e^{-i\mathbf{H}t} \mathbf{U}^\dagger$  è, in generale, non diagonale. Questo significa che il contenuto di flavour al tempo  $t$  è, in generale, diverso da quello a  $t = 0$ . Vi è quindi una probabilità non nulla che il flavour al tempo  $t$  sia diverso da quello iniziale. In particolare, utilizzando la (1.39), la probabilità di transizione da un flavour  $\alpha$  ad uno  $\beta$  sarà data [ricordando anche la (1.36)] da:

$$\begin{aligned} P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; x) &= \left| \sum_{j=1}^3 U_{\alpha j} U_{\beta j} e^{-iE_{\nu_j} t} \right|^2 \\ &= \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=j+1}^3 U_{\alpha j} U_{\beta j} U_{\alpha k} U_{\beta k} \sin^2 \frac{\delta m_{jk}^2 x}{4E_\nu}, \end{aligned} \quad (1.40)$$

dove  $\delta m_{jk}^2 = m_k^2 - m_j^2$  e si è usato il fatto che per un neutrino ultrarelativistico  $x \simeq t$ .

Il fenomeno appena descritto viene chiamato fenomeno delle *oscillazioni di flavour* o, anche *oscillazioni di neutrino*. Da un punto di vista intuitivo esso consiste di un fenomeno di interferenza (“battimento”) tra tre onde che si propagano con frequenza diversa. In due generazioni di neutrini (che verranno chiamati convenzionalmente  $\nu_e$  e  $\nu_\mu$ ) la (1.40) diviene semplicemente:

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e; x) = P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu; x) = 1 - \sin^2 2\theta \sin^2 \left( \frac{\delta m^2}{4E_\nu} x \right), \quad (1.41)$$

ed ovviamente  $P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu) = 1 - P(\nu_e \rightarrow \nu_e)$ . La lunghezza d'onda di oscillazione vale:

$$\lambda_\nu = \frac{4\pi E_\nu}{\delta m^2} \simeq 2.47 \text{ m} \times \frac{E_\nu}{\text{MeV}} \times \frac{\text{eV}^2}{\delta m^2}. \quad (1.42)$$

L'ampiezza massima di oscillazione si ha per  $\theta = \pi/4$ . Questo caso si chiama di *mixing massimale* e si ha quando sia il  $\nu_e$  che il  $\nu_\mu$  sono costituiti in parti uguali dei due autostati di massa  $\nu_1$  e  $\nu_2$ . In questo caso si può avere la completa conversione da un flavour all'altro. Quando la propagazione è “incoerente”, ovvero l'informazione di fase è mediata (come quando, per esempio, la zona di produzione dei neutrini è molto più larga della lunghezza d'onda tipica), si ha  $\langle \sin^2 \left( \frac{\delta m^2}{4E_\nu} x \right) \rangle = \frac{1}{2}$  e la (1.41) diviene semplicemente:

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e; x) = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta. \quad (1.43)$$

Nel paragrafo 1.3.3 si tornerà di nuovo sul problema della perdita di coerenza poiché esso è cruciale nella semplificazione del problema della propagazione dei neutrini nella materia.

### 1.3 Le oscillazioni di neutrino nella materia

Quando il neutrino attraversa la materia, le interazioni con essa possono modificare sostanzialmente la probabilità di oscillazione. In particolare, si può innescare un fenomeno di *risonanza*

in cui si ha un'amplificazione delle oscillazioni anche per piccoli valori degli angoli di mixing. Questa possibilità è molto interessante, soprattutto per quanto riguarda il deficit dei neutrini solari. Infatti i neutrini prodotti nel Sole interagiscono con la materia solare (e terrestre, nel caso in cui i neutrini vengono rivelati di notte), prima di raggiungere il rivelatore. Sotto particolari condizioni, quindi, si può avere una sostanziale conversione di flavour anche per valori piccoli dell'angolo di mixing. Questa possibilità fu per la prima volta individuata da Wolfenstein nel 1978 [9] e successivamente riconsiderata da Mikheyev e Smirnov nel 1985 [10] e per questo motivo l'effetto di oscillazione nella materia viene chiamato effetto Mikheyev–Smirnov–Wolfenstein (MSW). Attualmente questo effetto sembra essere la più probabile soluzione al deficit dei neutrini solari. Inoltre, esso entra anche in gioco nella discussione dei neutrini atmosferici (sebbene in maniera meno cruciale), poiché parte di questi attraversano la materia prima di essere rivelati. In questo capitolo verranno brevemente discussi gli effetti legati alle oscillazioni di neutrino nella materia. Per una rassegna completa sull'argomento si veda [27, 10, 39, 40].

### 1.3.1 L'equazione MSW

Nel capitolo precedente si è esaminato il fenomeno di oscillazione nel vuoto. In particolare, per un neutrino che si propaga nel vuoto, l'equazione che descrive l'evoluzione del contenuto di flavour, tenendo presente la (1.36) e la (1.37), è la seguente:

$$i \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \mathbf{H} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \mathbf{U} \frac{(\mathbf{M}_\nu^d)^2}{2E_\nu} \mathbf{U}^\dagger \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}, \quad (1.44)$$

dove  $(\mathbf{M}_\nu^d)^2 = \text{diag}(m_1^2, m_2^2, m_3^2)$ . La soluzione della (1.44) è la (1.39). Nella materia ordinaria, la diffusione coerente dei neutrini sia sugli elettroni che sui nucleoni del mezzo attraversato fa sì che all'Hamiltoniano dell'equazione (1.44) si aggiunga un termine di potenziale, comunemente indicato con  $\mathbf{A}$ , e l'equazione (1.44) si trasformi nella seguente <sup>5</sup>:

$$i \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \frac{1}{2E_\nu} \left[ \mathbf{U} (\mathbf{M}_\nu^d)^2 \mathbf{U}^\dagger + \mathbf{A} \right] \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}. \quad (1.45)$$

Nel seguito si supporrà che le interazioni che il neutrino ha con la materia siano esclusivamente di tipo standard. In tal caso sono assenti interazioni *di corrente neutra con cambiamento di flavour* (FCNC), essendo queste proibite dall'ipotesi di conservazione naturale del flavour [41] <sup>6</sup>. Essendo gli autostati di flavour anche autostati di interazione nella materia, la matrice  $\mathbf{A}$  è diagonale ed è data da:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A^{CC} + A^{NC} & 0 & 0 \\ 0 & A^{NC} & 0 \\ 0 & 0 & A^{NC} \end{pmatrix}. \quad (1.46)$$

Il termine di interazione di corrente carica  $A^{CC}$  è peculiare dei neutrini elettronici, come mostrato in figura 1.2. Se si trascurano piccoli effetti di correzione radiativa dovuti alla differenza di massa tra il  $\mu$  e il  $\tau$  [42], i termini di interazione di corrente neutra per i tre flavour sono

<sup>5</sup>Una derivazione naïve dell'equazione (1.45) è stata riportata in appendice A.

<sup>6</sup>Il caso in cui sono presenti anche interazioni di corrente neutra con cambiamento di flavour è trattato in [14, 15].

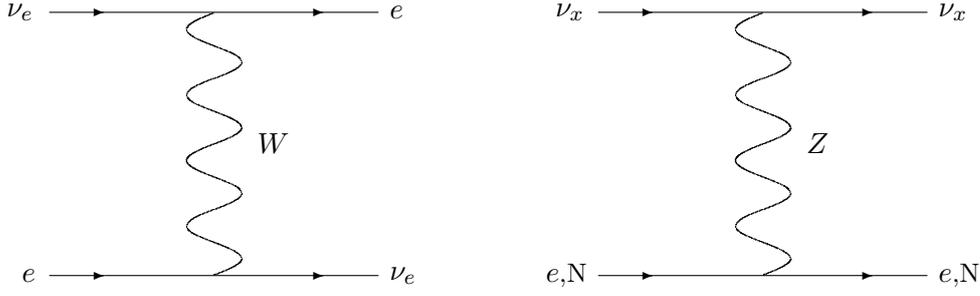


Figura 1.2: Interazioni di corrente carica e neutra del neutrino nella materia ( $x = e, \mu, \tau$ ; N = nucleone).

uguali. Per questo motivo essi possono essere trascurati, essendo possibile eliminarli attraverso una ridefinizione della fase complessiva dei tre stati di flavour nell'equazione (1.45):

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \rightarrow \exp \left[ -i \int dx \frac{A^{NC}(x)}{2E_\nu} \right] \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}. \quad (1.47)$$

Ne consegue che l'unico termine essenziale per la propagazione dei neutrini nella materia è il potenziale di corrente carica  $A^{CC}$ . Questo potenziale vale [9, 10] (si veda anche l'appendice A):

$$A^{CC}(x) = 2\sqrt{2}G_F N_e(x) E_\nu, \quad (1.48)$$

dove  $G_F$  è la costante di Fermi ed  $N_e$  è la densità elettronica del mezzo attraversato. D'ora innanzi, per semplicità, si trascurerà l'apice "CC" per indicare il potenziale (1.48). L'equazione (1.45) con il potenziale (1.48) viene detta *equazione di Mikheyev-Smirnov-Wolfenstein* (MSW) [9, 10].

L'operatore  $[\mathbf{U}(\mathbf{M}_\nu^d)^2\mathbf{U}^\dagger + \mathbf{A}]$  nel secondo membro dell'equazione (1.45) può essere a sua volta diagonalizzato attraverso una matrice unitaria  $\mathbf{U}^m$ :

$$(\mathbf{U}^m)^\dagger [\mathbf{U}(\mathbf{M}_\nu^d)^2\mathbf{U}^\dagger + \mathbf{A}] \mathbf{U}^m = \begin{pmatrix} M_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & M_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3^2 \end{pmatrix}. \quad (1.49)$$

Si definiscono inoltre gli stati:

$$\begin{pmatrix} \nu_1^m \\ \nu_2^m \\ \nu_3^m \end{pmatrix} = (\mathbf{U}^m)^\dagger \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}. \quad (1.50)$$

Gli stati  $\nu_i^m$  non sono però, in generale, autostati di massa nella materia poiché la matrice  $\mathbf{U}^m$  è, in generale, funzione di  $x$ . L'equazione di propagazione per gli stati  $\nu_i^m$  è la seguente [39]:

$$i \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \nu_1^m \\ \nu_2^m \\ \nu_3^m \end{pmatrix} = \left[ \frac{1}{2E_\nu} \begin{pmatrix} M_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & M_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & M_3^2 \end{pmatrix} - i(\mathbf{U}^m)^\dagger \frac{d}{dx} \mathbf{U}^m \right] \begin{pmatrix} \nu_1^m \\ \nu_2^m \\ \nu_3^m \end{pmatrix}. \quad (1.51)$$

Nel caso in cui  $A$  è costante si ha  $d\mathbf{U}^m/dx = 0$  e quindi gli stati  $\nu_i^m$  divengono autostati di massa nella materia. In tal caso la probabilità di transizione  $P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; x)$ , in analogia alla (1.40) è data, da:

$$P(\nu_\alpha \rightarrow \nu_\beta; x) = \delta_{\alpha\beta} - 4 \sum_{j=1}^2 \sum_{k=j+1}^3 U_{\alpha j}^m U_{\beta j}^m U_{\alpha k}^m U_{\beta k}^m \sin^2 \frac{\delta M_{jk}^2 x}{4E_\nu}. \quad (1.52)$$

### 1.3.2 La propagazione adiabatica

Le proprietà dell'equazione (1.51) sono più semplici da studiare quando ci si riduce al caso di due generazioni di neutrini. In tal caso, l'equazione (1.45) si scrive nella forma canonica seguente:

$$i \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix} = \frac{1}{4E_\nu} \begin{pmatrix} A(x) - \delta m^2 c_{2\theta} & \delta m^2 s_{2\theta} \\ \delta m^2 s_{2\theta} & -A(x) + \delta m^2 c_{2\theta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \end{pmatrix}, \quad (1.53)$$

dove  $\delta m^2 = m_2^2 - m_1^2$  è l'unica differenza di massa al quadrato. In due generazioni, la matrice  $\mathbf{U}^m$  può scriversi come:

$$\mathbf{U}^m = \begin{pmatrix} \cos \theta_m & \sin \theta_m \\ -\sin \theta_m & \cos \theta_m \end{pmatrix}. \quad (1.54)$$

L'angolo  $\theta_m$  è noto come *angolo di mixing nella materia*, dato da:

$$\sin 2\theta_m = \frac{s_{2\theta}}{\sqrt{(A/\delta m^2 - c_{2\theta})^2 + s_{2\theta}^2}}. \quad (1.55)$$

Nel caso di due neutrini l'equazione (1.51) può venire riscritta nella seguente forma compatta [39]:

$$i \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \nu_1^m \\ \nu_2^m \end{pmatrix} = \left[ -\frac{\pi}{\lambda_\nu^m} \boldsymbol{\sigma}_3 + \frac{d\theta_m}{dx} \boldsymbol{\sigma}_2 \right] \begin{pmatrix} \nu_1^m \\ \nu_2^m \end{pmatrix}, \quad (1.56)$$

dove le  $\boldsymbol{\sigma}_i$  sono le matrici di Pauli e  $\lambda_\nu^m$  è la *lunghezza d'onda di oscillazione nella materia* e vale:

$$\lambda_\nu^m = \frac{\lambda_\nu}{\sqrt{(A/\delta m^2 - c_{2\theta})^2 + s_{2\theta}^2}}, \quad (1.57)$$

mentre il gradiente di  $\theta_m$  vale:

$$\frac{d\theta_m}{dx} = \frac{1}{2} \frac{\delta m^2 s_{2\theta}}{(A - \delta m^2 c_{2\theta})^2 + (\delta m^2 s_{2\theta})^2} \frac{dA}{dx}. \quad (1.58)$$

Si supponga che la densità elettronica  $N_e(x)$  vari in modo "lento". Più precisamente, si assuma che l'angolo di mixing nella materia vari molto poco nello spazio della lunghezza d'onda di oscillazione, ovvero:

$$\left| \frac{d\theta_m}{dx} \right| \ll \frac{\pi}{\lambda_\nu^m}. \quad (1.59)$$

Questa condizione viene detta di *adiabaticità*. Sotto questa ipotesi la (1.56) diviene:

$$i \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \nu_1^m \\ \nu_2^m \end{pmatrix} \simeq -\frac{\pi}{\lambda_\nu^m} \boldsymbol{\sigma}_3 \begin{pmatrix} \nu_1^m \\ \nu_2^m \end{pmatrix}; \quad (1.60)$$

in questo caso gli stati  $\nu_1^m$  e  $\nu_2^m$  sono approssimativamente autostati di massa nella materia e quindi si propagano praticamente inalterati in essa. Questo tipo di propagazione si dice *adiabatica* [39]. La soluzione della (1.60) è la seguente:

$$\begin{pmatrix} \nu_1^m(x) \\ \nu_2^m(x) \end{pmatrix} = \exp \left[ i\pi \boldsymbol{\sigma}_3 \int_{x_0}^x \frac{dx}{\lambda_\nu^m(x)} \right] \begin{pmatrix} \nu_1^m(x_0) \\ \nu_2^m(x_0) \end{pmatrix}. \quad (1.61)$$

Si supponga che un neutrino creato nella materia, venga rivelato nel vuoto (questo è il caso, ad esempio, dei neutrini solari). In tal caso dalla (1.61) si ha che l'evoluzione degli autostati di flavour, nell'approssimazione di propagazione adiabatica, è data da:

$$\begin{pmatrix} \nu_e(x) \\ \nu_\mu(x) \end{pmatrix} = \mathbf{U}^\dagger(\theta) \exp \left[ i\pi \boldsymbol{\sigma}_3 \int_{x_0}^x \frac{dx}{\lambda_\nu^m(x)} \right] \mathbf{U}^m(\theta_m) \begin{pmatrix} \nu_e(x_0) \\ \nu_\mu(x_0) \end{pmatrix}. \quad (1.62)$$

La probabilità di transizione  $P(\nu_e \rightarrow \nu_e)$  sarà quindi:

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e) = \left| c_\theta c_{\theta_m} e^{i\pi \int_{x_0}^x \frac{dx}{\lambda_\nu^m}} - s_\theta s_{\theta_m} e^{-i\pi \int_{x_0}^x \frac{dx}{\lambda_\nu^m}} \right|^2. \quad (1.63)$$

Se si suppone la propagazione incoerente [così come nel caso della (1.43)], è possibile, nello sviluppo della (1.63), mediare sui termini di interferenza. Dopo qualche calcolo si ottiene [39]:

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e) = \frac{1}{2} (1 + \cos 2\theta_m \cos 2\theta). \quad (1.64)$$

Si noti che, nel caso  $\theta_m = \theta$ , la (1.64) si riduce alla (1.43).

### 1.3.3 Il fenomeno della risonanza

L'espressione (1.64) consente di calcolare analiticamente la probabilità di transizione  $P(\nu_e \rightarrow \nu_e)$  nella materia, purché la propagazione sia incoerente e valga la (1.59). Si noti come nella (1.64) sia scomparsa ogni esplicita dipendenza dal profilo della densità elettronica  $N_e(x)$ . Quando la condizione (1.59) viene a cadere, gli autostati  $\nu_i^m$  possono non conservarsi, ovvero vi è una probabilità non nulla di conversione  $\nu_1^m \leftrightarrow \nu_2^m$ .

Dalle equazioni (1.59) e (1.58) è facile rendersi conto che la condizione di adiabaticità (1.59) diviene critica quando è soddisfatta la seguente condizione:

$$A(x_c) = 2\sqrt{2}G_F N_e(x_c) E_\nu = \delta m^2 \cos 2\theta. \quad (1.65)$$

Infatti, quando questo avviene, si ha che  $d\theta_m/dx$  e  $\lambda_\nu^m$  assumono contemporaneamente il massimo valore. Questa condizione viene detta di *risonanza*. Quando viene soddisfatta la condizione di risonanza, l'angolo di mixing nella materia diviene massimale ( $\theta_m = \pi/4$ ). Si supponga che un neutrino si propaghi in un mezzo a densità elettronica decrescente  $dN_e(x)/dx < 0$ , in modo che alla creazione si abbia  $A(x_0) > \delta m^2 \cos 2\theta$ . In questa ipotesi il neutrino, nella sua propagazione, incontrerà lo strato di risonanza. Con buona approssimazione, si può supporre che il neutrino si propaghi adiabaticamente tranne in un piccolo intervallo  $[x_-, x_+]$  contenente lo strato di risonanza ( $x_- < x_c < x_+$ ), e che la transizione  $\nu_1^m \leftrightarrow \nu_2^m$  possa avvenire sostanzialmente in questo intervallo. In tal caso, la (1.62) si trasforma nella seguente:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \nu_e(x) \\ \nu_\mu(x) \end{pmatrix} &= \mathbf{U}^\dagger(\theta) \exp \left[ i\pi \boldsymbol{\sigma}_3 \int_{x_+}^x \frac{dx}{\lambda_\nu^m(x)} \right] \begin{pmatrix} T_{\nu_1^m \nu_1^m} & T_{\nu_1^m \nu_2^m} \\ T_{\nu_2^m \nu_1^m} & T_{\nu_2^m \nu_2^m} \end{pmatrix} \\ &\times \exp \left[ i\pi \boldsymbol{\sigma}_3 \int_{x_0}^{x_-} \frac{dx}{\lambda_\nu^m(x)} \right] \mathbf{U}^m(\theta_m) \begin{pmatrix} \nu_e(x_0) \\ \nu_\mu(x_0) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (1.66)$$

dove  $T_{\nu_i^m \nu_j^m} = \langle \nu_j^m(x_+) | \nu_i^m(x_-) \rangle$  è l'ampiezza di transizione  $\nu_i^m \rightarrow \nu_j^m$  nell'attraversare lo strato di risonanza. Supponendo che l'informazione di fase sia persa, la probabilità  $P(\nu_e \rightarrow \nu_e)$  si può calcolare in analogia alla (1.64). Detta  $P_c = P(\nu_1^m \leftrightarrow \nu_2^m)$  la probabilità di conversione da un autostato di massa all'altro, dalla (1.66) si ha, dopo qualche calcolo [39]:

$$P(\nu_e \rightarrow \nu_e) = \frac{1}{2} + \left( \frac{1}{2} - P_c \right) \cos 2\theta_m \cos 2\theta. \quad (1.67)$$

Nello strato di risonanza la (1.59) si traduce nella seguente:

$$\gamma = \frac{\delta m^2 s_{2\theta}^2}{2E_\nu c_{2\theta} |d \log N_e/dx|_{x=x_c}} \gg 1. \quad (1.68)$$

Il fattore  $\gamma$  viene detto *parametro di adiabaticità*. Evidentemente  $P_c$  deve dipendere da  $\gamma$  in modo tale che quando  $\gamma \gg 1$  (propagazione adiabatica) si abbia  $P_c \sim 0$ , mentre quando  $\gamma \sim 1$  la probabilità  $P_c$  tenda all'unità. Il limite di validità dell'equazione (1.67) e le eventuali correzioni da apportare sono discusse in [43].

Nella deduzione della (1.67) è cruciale l'ipotesi di incoerenza nella propagazione del neutrino. Per quanto riguarda i neutrini solari, nel caso di oscillazioni MSW, questa ipotesi è sempre lecita, come discusso in [44]. Infatti, la lunghezza di coerenza dei pacchetti d'onda per i neutrini solari è circa  $d_c = 10^{-8}$  m, a causa delle rapide collisioni dei nuclei emettitori. Gli autostati di massa perderanno la loro coerenza dopo aver percorso una distanza pari a  $L \sim d_c/\delta\beta$ , dove  $\delta\beta$  è la differenza di velocità degli autostati di massa. Per energie tipiche dei neutrini solari ( $E_\nu \sim 1$  MeV) si ha  $L \sim 50\lambda_\nu$ . Perché si abbiano oscillazioni MSW nel Sole, deve essere  $10^{-8} \lesssim \delta m^2/\text{eV}^2 \lesssim 10^{-4}$ . Dalla (1.42) si deduce che  $\lambda_\nu$  non può essere mai maggiore di  $\sim 2 \times 10^8$  m. Ne consegue che, nella peggiore delle ipotesi, l'informazione di fase è persa dopo una distanza di circa  $10^{10}$  m, ovvero un ordine di grandezza inferiore alla distanza Terra-Sole. Oltre a questo, alla perdita di coerenza contribuiscono altri fattori, quali la dimensione finita della zona di produzione di neutrini nel Sole ( $\sim 0.1R_\odot$ ), la variazione di distanza Terra-Sole dovuta all'eccentricità orbitale terrestre, etc. Invece, per  $\delta m^2 < 10^{-9}$  eV<sup>2</sup>, l'informazione di fase non può essere mediata. Questo tipo di oscillazioni (per cui l'effetto della materia è irrilevante) vengono definite "*just-so*". In questo caso, la lunghezza d'onda di oscillazione è proprio dell'ordine della distanza Terra-Sole.

Il calcolo della probabilità  $P_c$  è stato per la prima volta effettuato nel 1932 da Landau, Zener e Stueckelberg [45] nell'ambito della teoria delle transizioni atomiche (la quale ha molte analogie con quella delle oscillazioni di flavour) per mezzo dell'approssimazione WKB. Per questo motivo la (1.67) viene detta *formula di Landau-Zener*. Per un mezzo con densità variabile,  $P_c$  può essere calcolato attraverso il seguente integrale di contorno:

$$\log P_c = -\frac{1}{E_\nu} \text{Im} \int_{A=\delta m^2 c_{2\theta}}^{A=\delta m^2 e^{\pm 2i\theta}} dx [(A - \delta m^2 c_{2\theta})^2 + (\delta m^2 s_{2\theta})^2]^{1/2}, \quad (1.69)$$

dove il segno + (−) vale a seconda che  $dN_e/dx > 0$  ( $< 0$ ). Il calcolo è stato eseguito per vari profili della densità, sia utilizzando la formula (1.69) che attraverso una risoluzione diretta dell'equazione (1.53) [46]; il risultato generale può essere esemplificato dalla formula seguente:

$$P_c = \frac{\exp\left[-\frac{\pi}{2}\gamma F\right] - \exp\left[-\frac{\pi}{2}\gamma \frac{F}{s_\theta^2}\right]}{1 - \exp\left[-\frac{\pi}{2}\gamma \frac{F}{s_\theta^2}\right]}, \quad (1.70)$$

dove  $\gamma$  è il parametro di adiabaticità ed  $F$  è una funzione che dipende dal profilo della densità attraversato dal neutrino (si veda la tabella III in [39]).

La (1.67) viene generalmente utilizzata per la descrizione delle oscillazioni dei neutrini solari. In tal caso il profilo della densità attraversata dal neutrino è approssimativamente esponenziale. Si mostra che in questa condizione  $F$  è una funzione solo dell'angolo di mixing  $\theta$  e vale semplicemente:

$$F = 1 - \tan^2 \theta. \quad (1.71)$$

## 1.4 La dominanza di una scala di massa

Anche se si trascurano gli effetti di violazione di CP, la descrizione del fenomeno delle oscillazioni di flavour nel caso generale di tre generazioni di neutrini necessita di cinque parametri per essere descritto: due differenze di massa al quadrato e tre angoli di mixing. Come sarà più chiaro nei prossimi capitoli, le oscillazioni di flavour servono, in particolare, ad interpretare due anomalie nella fenomenologia dei neutrini, ovvero il deficit dei neutrini solari e l'anomalia dei neutrini atmosferici. L'analisi di queste anomalie in termini di oscillazioni andrebbe eseguita quindi, in linea di principio, in uno spazio a cinque dimensioni. Un'analisi generale in tre generazioni sia di queste anomalie che della rimanente fenomenologia (neutrini da acceleratore e reattore) è perciò complessa.

Una semplificazione viene dalla constatazione che per i neutrini solari, in due generazioni, sono possibili due soluzioni:  $\delta m^2 \sim 10^{-5} \text{ eV}^2$  per oscillazioni MSW o  $10^{-10} \text{ eV}^2$  per oscillazioni “just-so”, mentre i neutrini atmosferici e da laboratorio (“terrestri”) sono sensibili a valori di  $\delta m^2 \geq 10^{-4} \text{ eV}^2$ , così come sarà mostrato con maggior dettaglio nei prossimi capitoli. Per questo motivo è lecito ipotizzare la validità della cosiddetta *ipotesi di dominanza di una scala di massa* [47], in cui si suppone che due autostati di massa (convenzionalmente indicati con  $\nu_1$  e  $\nu_2$ ) siano quasi degeneri rispetto al terzo autostato di massa  $\nu_3$ <sup>7</sup>. Per semplicità, si scelgono  $\nu_1$  e  $\nu_2$  in modo che si abbia sempre  $m_1 < m_2$ . L'autostato  $\nu_3$  può essere o molto più pesante ( $m_3 \gg m_{1,2}$ ) o molto più leggero ( $m_3 \ll m_{1,2}$ ) degli altri due, così come mostrato in figura 1.3. Più precisamente, posto:

$$\delta m^2 \equiv m_2^2 - m_1^2, \quad m^2 \equiv m_3^2 - m_{1,2}^2, \quad (1.72)$$

si suppone che  $\delta m^2 \ll |m^2|$ , dove  $m^2$  è positivo o negativo a seconda che valga lo scenario (a) o (b).

Con le posizioni precedenti si ha che  $\delta m^2 (\leq 10^{-5} \text{ eV}^2)$  è “responsabile” delle oscillazioni dei neutrini solari mentre  $m^2 (\geq 10^{-4} \text{ eV}^2)$  è “responsabile” delle oscillazioni dei neutrini terrestri. In questa approssimazione si può porre  $m^2 = \infty$  nell'analisi dei neutrini solari e  $\delta m^2 = 0$  in quella dei neutrini terrestri. Questa approssimazione, sebbene arbitraria a priori, trova però riscontro nella fenomenologia. Essa sarà utilizzata per tutto il resto di questa trattazione poiché permette una notevole semplificazione dell'analisi, come verrà mostrato nei paragrafi 1.4.1 e 1.4.2. Inoltre, nel paragrafo 1.4.3 si esaminerà l'effettiva validità dell'approssimazione di dominanza di una scala di massa.

### 1.4.1 Conseguenze per i neutrini solari

Il Sole è una sorgente di neutrini elettronici. Questi, a causa delle oscillazioni, possono trasformarsi in neutrini di altri flavour. Per quanto visto nel paragrafo 1.2.1, l'unico modo per identificare il flavour di un neutrino è attraverso un'interazione di corrente carica che lo converte nel leptone corrispondente. A causa dell'energia relativamente bassa dei neutrini solari ( $E_\nu \leq 20 \text{ MeV}$ ) l'unico flavour che può essere identificato è quello elettronico. Ciò corrisponde a misurare la probabilità di sopravvivenza dei neutrini elettronici  $P(\nu_e \rightarrow \nu_e)$ . Il flusso  $\Phi_{\nu_\mu} + \Phi_{\nu_\tau}$  può essere eventualmente misurato attraverso interazioni di corrente neutra. Ciò permetterebbe di misurare la probabilità di conversione  $1 - P(\nu_e \rightarrow \nu_e)$ . Come si vede, quindi, l'unica quantità effettivamente misurabile è la probabilità  $P(\nu_e \rightarrow \nu_e) = |\nu_e|^2$ . Questa quantità è evidentemente invariante sotto trasformazioni della base di flavour che lasciano invariato il

<sup>7</sup>Ovviamente la scelta per la numerazione degli autostati di massa è del tutto arbitraria. Una scelta differente è equivalente ad una ridefinizione degli angoli di mixing.

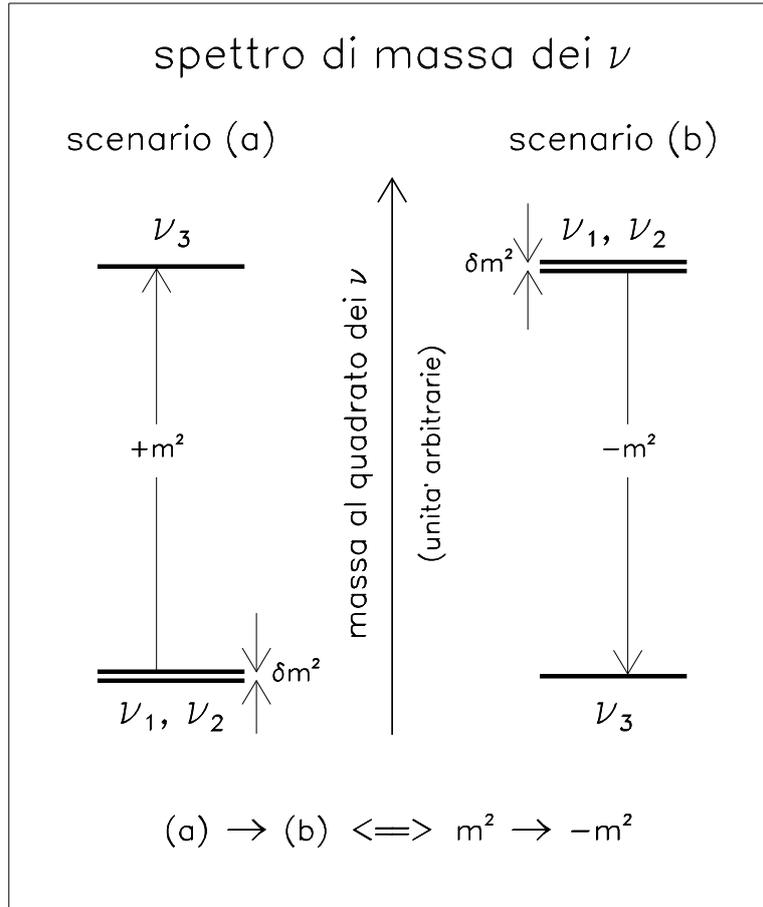


Figura 1.3: L'ipotesi di dominanza di una scala di massa. I neutrini solari non distinguono tra gli scenari (a) e (b) all'ordine zero in  $\delta m^2/m^2$ .

$\nu_e$ , ovvero nel sottospazio “23”:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{U}_{23}^\dagger(\psi) \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}. \quad (1.73)$$

Dall'equazione (1.46) si vede che anche la matrice  $\mathbf{A}$  è invariante sotto trasformazioni nel sottospazio “23”, cioè:

$$\mathbf{U}_{23}^\dagger(\psi) \mathbf{A} \mathbf{U}_{23}(\psi) = \mathbf{A}. \quad (1.74)$$

Da queste considerazioni e dalle equazioni (1.45) e (1.33) si vede che la probabilità  $P(\nu_e \rightarrow \nu_e)$  è indipendente dall'angolo  $\psi$ . Questa proprietà è generale e non dipende dall'ipotesi di dominanza di una scala di massa. In generale, quindi, le oscillazioni dei neutrini solari possono essere descritte nel sottospazio  $(\delta m^2, m^2; \omega, \phi)$ . Se poi nell'analisi dei neutrini solari si suppone anche  $|m^2| \rightarrow \infty$ <sup>8</sup>, le oscillazioni dipenderanno solo dai parametri  $(\delta m^2, \omega, \phi)$ , o equivalentemente, dai parametri  $(\delta m^2, U_{e1}^2, U_{e2}^2, U_{e3}^2)$ . In particolare si ha [48, 16]:

$$P_{3\nu}(\nu_e \rightarrow \nu_e) = s_\phi^4 + c_\phi^4 P_{2\nu}(\nu_e \rightarrow \nu_e), \quad (1.75)$$

<sup>8</sup>Si noti che per i neutrini solari, gli scenari (a) e (b) sono indistinguibili.

dove  $P_{2\nu}(\nu_e \rightarrow \nu_e)$  è la classica probabilità di sopravvivenza  $\nu_e \rightarrow \nu_e$  in due generazioni [calcolata, per esempio, attraverso la formula di Landau–Zener (1.67)], con l'accortezza di sostituire  $\theta \rightarrow \omega$  e  $N_e \rightarrow N_e c_\phi^2$ . Per completezza, la dimostrazione di questa proprietà è riportata in appendice B. Come si vede, nel caso  $\phi = 0$  (ovvero  $U_{e3} = 0$ ) si ottiene di nuovo la classica probabilità di oscillazione in due generazioni.

### 1.4.2 Conseguenze per i neutrini terrestri

I neutrini di origine terrestre sono di due tipi:

1. *neutrini atmosferici*, prodotti dalle interazioni di raggi cosmici in alta atmosfera;
2. *neutrini da laboratorio*, prodotti in reattori nucleari o dal decadimento di particelle instabili (in genere pioni o muoni) in acceleratori di particelle.

Se si escludono i neutrini da reattore, che hanno un'energia comparabile a quella dei neutrini solari, le energie di questi neutrini sono generalmente sufficienti a poter creare un muone. Di conseguenza possono essere osservate, oltre alla  $P(\nu_e \rightarrow \nu_e)$ , anche le probabilità  $P(\nu_e \rightarrow \nu_\mu)$  e  $P(\nu_\mu \rightarrow \nu_\mu)$ .

Nell'ipotesi  $\delta m^2 = 0$  si ha che la matrice di massa nella base degli autostati di massa può essere scritta nella forma  $(\mathbf{M}_\nu^d)^2 = \text{diag}(0, 0, m^2)$ , dove, convenzionalmente, si è posto  $m_1^2 = m_2^2 = 0$  (si ricordi che le oscillazioni dipendono dalle differenze di massa al quadrato). Questa matrice è invariante sotto rotazioni dello spazio "12":

$$\mathbf{U}_{12}(\omega) \mathbf{M}_\nu^d \mathbf{U}_{12}^\dagger(\omega) = \mathbf{M}_\nu^d. \quad (1.76)$$

Dalle (1.45) e (1.33) e dalla (1.76) si deduce che le oscillazioni dipendono solo dai parametri  $(m^2, \psi, \phi)$  o, equivalentemente, dai parametri  $(m^2, U_{e3}^2, U_{\mu 3}^2, U_{\tau 3}^2)$ . Come si vede, l'unico parametro in comune rispetto ai neutrini solari è l'angolo  $\phi$  o, equivalentemente, l'elemento di matrice  $U_{e3}^2 (= \sin^2 \phi)$ .

### 1.4.3 Stabilità dell'approssimazione

Nei paragrafi precedenti si è mostrato come nell'approssimazione di dominanza di una scala di massa, si è avuto il disaccoppiamento dello spazio dei parametri  $(\delta m^2, m^2; \omega, \phi, \psi)$  nel prodotto dei due sottospazi  $(\delta m^2, \omega, \phi) \otimes (m^2, \psi, \phi)$ , in cui il primo sottospazio descrive le oscillazioni dei neutrini solari nell'ipotesi  $m^2/\delta m^2 \rightarrow \infty$  mentre il secondo quelle dei neutrini terrestri nell'ipotesi  $\delta m^2/m^2 \rightarrow 0$ .

Il punto cruciale di questa approssimazione è dunque la "piccolezza" del rapporto  $\delta m^2/m^2$ . Come già visto, nella peggiore delle ipotesi tale rapporto vale circa 1/10. E' naturale chiedersi se questo valore è sufficientemente piccolo per garantire la validità dell'ipotesi di dominanza di una scala di massa. Questo problema è sostanzialmente di tipo fenomenologico: occorre vedere se l'analisi della fenomenologia dei neutrini solari e terrestri è "stabile" sotto l'ipotesi di dominanza di una scala di massa, ovvero se le perturbazioni indotte da un valore finito di  $m^2$  sull'analisi dei neutrini solari, e di  $\delta m^2$  non nullo su quella dei neutrini terrestri, tendano a far variare il valore del rapporto  $\delta m^2/m^2$  (la maniera con cui vengono eseguite le analisi, in particolare per quanto riguarda i neutrini solari, sarà argomento di discussione dei prossimi capitoli, per il momento ci si limiterà ai risultati).

Questa prova è stata effettuata in [17]. Per prima cosa si è eseguita un'analisi della fenomenologia dei neutrini solari e terrestri nell'ipotesi di dominanza di una scala di massa, trovando le zone compatibili con le osservazioni sperimentali nel piano  $(\delta m^2, \omega)$  per i neutrini solari e

$(m^2, \psi)$  per i neutrini terrestri al variare di  $\phi$  come parametro libero. Il risultato è stato che, entro due deviazioni standard, il valore più grande per  $\delta m^2$  ammesso dall'analisi dei neutrini solari è  $\delta m^2 \sim 10^{-4} \text{ eV}^2$ , mentre il valore più piccolo di  $m^2$  ammesso dall'analisi dei neutrini terrestri è  $m^2 \sim 10^{-3} \text{ eV}^2$ . Come secondo passo dell'approssimazione, si sono utilizzati questi valori estremi come perturbazione rispettivamente nell'analisi dei neutrini terrestri ed in quella dei neutrini solari. In particolare, quando  $m^2$  è finito, la (1.75), al primo ordine in  $\delta m^2/m^2$ , si trasforma nella seguente (si veda la terza delle pubblicazioni [48]):

$$P_{3\nu}(\nu_e \rightarrow \nu_e) = s_\phi^2 s_{\phi_m}^2 + c_\phi^2 c_{\phi_m}^2 P_{2\nu}(\nu_e \rightarrow \nu_e), \quad (1.77)$$

dove  $\phi_m$  è dato da:

$$s_{2\phi_m}^2 = \frac{s_{2\phi}^2}{(c_{2\phi} - A/m^2)^2 + s_{2\phi}^2}, \quad (1.78)$$

ed  $A$  è calcolato nel punto di produzione del neutrino.

La variazione delle zone permesse dai risultati sperimentali nello spazio dei parametri rispetto all'approssimazione zero  $\delta m^2/m^2 = 0$  è praticamente trascurabile [17]. In particolare, il rapporto  $(\delta m^2)_{\text{max}}/m_{\text{min}}^2$  non è sostanzialmente variato rispetto all'approssimazione zero. Ciò ha mostrato che l'approssimazione di dominanza di una scala di massa è stabile, ed è quindi un'ipotesi di lavoro del tutto ragionevole.

# Appendice A

## Deduzione dell'equazione MSW

In questa appendice si vuole dare una deduzione sufficientemente completa dell'equazione (1.45). Questa deduzione è simile a quella fornita in [39, 136]. Una dimostrazione più rigorosa va eseguita nell'ambito della teoria quantistica di campo ed è particolarmente complessa. Un esempio può essere trovato in [137]. Per semplicità, si supporrà che i neutrini siano dotati di masse di Dirac. La generalizzazione a tre flavour e/o masse di Majorana è semplice e non verrà trattata. Inoltre, si supporrà che i neutrini interagiscano con la materia solo attraverso interazioni elettrodeboli di tipo standard.

Poiché le interazioni di corrente neutra contribuiscono in egual misura per tutti i flavour, solo il primo dei diagrammi di figura 1.2 è efficiente per le oscillazioni. A tale grafico è associata la seguente Hamiltoniana di interazione dove, poiché  $M_W \gg p$ , essendo  $p$  l'impulso del neutrino, è stato trascurato il contributo dovuto al propagatore della  $W$ :

$$\mathcal{H}_{\nu ee}^{CC} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{e} \gamma^\mu (\mathbf{1} - \gamma^5) \nu_e \bar{\nu}_e \gamma_\mu (\mathbf{1} - \gamma^5) e. \quad (\text{A.1})$$

Dopo un riarrangiamento di Fierz, la (A.1) si trasforma nella seguente:

$$\mathcal{H}_{\nu ee}^{CC} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} \bar{e} \gamma^\mu (\mathbf{1} - \gamma^5) e \bar{\nu}_e \gamma_\mu (\mathbf{1} - \gamma^5) \nu_e. \quad (\text{A.2})$$

L'Hamiltoniana effettiva per il neutrino che attraversa la materia sarà, evidentemente, una opportuna media dell'Hamiltoniana (A.2). Supponendo gli elettroni del mezzo non relativistici e non polarizzati, alla funzione d'onda dell'elettrone contribuiscono solo gli stati ad energia positiva, ovvero, nella rappresentazione di Dirac,  $e = (e^{(+)}, 0)$  dove  $e^{(+)}$  è uno spinore a due componenti che rappresenta l'usuale funzione d'onda non relativistica per una particella dotata di spin 1/2. Poiché gli elettroni del mezzo sono non polarizzati, si ha:

$$\begin{aligned} \langle \bar{e} \gamma_i (\mathbf{1} - \gamma^5) e \rangle &= -\langle e^{(+)} | \sigma_i | e^{(+)} \rangle = 0, \\ \langle \bar{e} \gamma^0 (\mathbf{1} - \gamma^5) e \rangle &= \langle e^{(+)} | e^{(+)} \rangle = N_e, \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

dove  $N_e$  è la densità elettronica della materia attraversata dal neutrino. La lagrangiana effettiva di interazione sarà dunque:

$$\bar{\mathcal{L}}_{\nu ee}^{CC}(x) = -\overline{\mathcal{H}}_{\nu ee}^{CC}(x) = -\sqrt{2} G_F N_e(x) \bar{\nu}_e(x) \gamma^0 \frac{\mathbf{1} - \gamma^5}{2} \nu_e(x). \quad (\text{A.4})$$

Tenendo conto anche del termine cinetico, la lagrangiana che descrive l'evoluzione del neutrino nella materia sarà la seguente:

$$\mathcal{L}_\nu = \bar{\nu}(x) \left[ i \gamma^\mu \partial_\mu - \mathbf{V}(x) \gamma^0 \frac{\mathbf{1} - \gamma^5}{2} - \mathbf{M}_\nu \right] \nu(x), \quad (\text{A.5})$$

dove  $V_{\alpha\beta} = \sqrt{2}G_F N_e \delta_{\alpha,e} \delta_{\beta,e}$  è il potenziale indotto sul neutrino dalla materia e  $\mathbf{M}_\nu = \mathbf{U}(\mathbf{M}_\nu^d)^2 \mathbf{U}^\dagger$  è la matrice di massa dei neutrini nella base degli autostati di flavour. Variando sulle componenti  $\nu_{L,R} = \frac{1}{2}(\mathbf{1} \pm \gamma^5)\nu$  si ottengono le equazioni seguenti:

$$\begin{aligned} (i\gamma_\mu \partial^\mu - \gamma^0 \mathbf{V})\nu_L - \mathbf{M}_\nu \nu_R &= 0, \\ i\gamma_\mu \partial^\mu \nu_R - \mathbf{M}_\nu \nu_L &= 0, \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Se la variazione della densità elettronica è piccola rispetto alla scala della lunghezza d'onda di de Broglie del neutrino, ovvero  $(1/V E_\nu)(dV/dx) \ll 1$  si ha  $\nabla(\mathbf{V}\nu) \simeq \mathbf{V}\nabla\nu$ ; inoltre, dalla prima delle (A.6), all'ordine zero si ha  $\partial_\mu \gamma^\mu \nu_L \simeq 0$  e quindi:

$$\partial_\mu \gamma^\mu \gamma^0 \nu_L = \gamma^0 (\partial^0 \gamma^0 + \partial^i \gamma^i) \nu_L \simeq 2\partial^0 \nu_L. \quad (\text{A.7})$$

Eliminando  $\nu_R$  dal sistema precedente ed utilizzando l'equazione (A.7), dopo qualche calcolo si ottiene l'equazione seguente per lo spinore  $\nu_L$ :

$$(\partial_\mu \partial^\mu + 2i\mathbf{V}\partial^0 + \mathbf{M}_\nu^2) \nu_L = 0. \quad (\text{A.8})$$

L'equazione (A.8) è simile a quella di Klein–Gordon, ma con un piccolo potenziale accoppiato alla derivata temporale di  $\nu_L$  (per la parte destrorsa si ottiene l'equazione di Klein–Gordon libera). Poiché si cercano soluzioni stazionarie della (A.8), si fa l'ulteriore sostituzione  $\nu_L = \nu(x) \exp[iE_\nu(x - t)]$ . Dopo qualche calcolo, si vede che, al prim'ordine in  $\mathbf{M}_\nu^2$  e  $\mathbf{V}$  l'equazione (A.8) si trasforma nella seguente:

$$\left[ \mathbf{V}(x) + \frac{\mathbf{M}_\nu^2}{2E_\nu} + i\frac{\partial}{\partial x} \right] \left[ \mathbf{V}(x) + \frac{\mathbf{M}_\nu^2}{2E_\nu} - i\frac{\partial}{\partial x} \right] \nu(x) = 0. \quad (\text{A.9})$$

L'equazione precedente è soddisfatta se è soddisfatta una o l'altra delle due equazioni seguenti:

$$\left[ \mathbf{V}(x) + \frac{\mathbf{M}_\nu^2}{2E_\nu} \pm i\frac{\partial}{\partial x} \right] \nu(x) = 0. \quad (\text{A.10})$$

Scartando le soluzioni ad onda regressiva, si ha che l'equazione (A.9) è soddisfatta quando

$$i\frac{\partial}{\partial x} \nu(x) = \left[ \mathbf{V}(x) + \frac{\mathbf{M}_\nu^2}{2E_\nu} \right] \nu(x) = \left[ \frac{\mathbf{A}(x) + \mathbf{M}_\nu^2}{2E_\nu} \right] \nu(x), \quad (\text{A.11})$$

dove  $\mathbf{A}(x) = 2E_\nu \mathbf{V}(x)$ . L'equazione (A.11) corrisponde proprio all'equazione MSW (1.45).

## Appendice B

# Riduzione ad un problema di due generazioni nel limite di $m^2 \rightarrow \infty$

In generale, il problema della risoluzione dell'equazione MSW in tre generazioni di neutrini è estremamente complesso. Nel caso, però, di dominanza di una scala di massa questo problema può essere ridotto ad un problema “effettivo” di due generazioni di neutrini. In questa appendice si vuole esaminare la riduzione al caso  $2\nu$  nel limite  $m^2 \rightarrow \infty$ . In particolare si vuole ricavare l'espressione per la probabilità  $P(\nu_e \rightarrow \nu_e)$  in questo limite.

Seguendo [48, 16], conviene ridefinire una nuova base come segue:

$$\begin{pmatrix} \nu'_e \\ \nu'_\mu \\ \nu'_\tau \end{pmatrix} = \mathbf{U}_{12}(\omega) \begin{pmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \\ \nu_3 \end{pmatrix} = \mathbf{U}_{13}^\dagger(\phi) \times \mathbf{U}_{23}^\dagger(\psi) \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

In questa base, dopo qualche calcolo, l'equazione (1.45) del paragrafo 1.3.1 si trasforma nella seguente:

$$i \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \nu'_e \\ \nu'_\mu \\ \nu'_\tau \end{pmatrix} = \mathbf{H}' \begin{pmatrix} \nu'_e \\ \nu'_\mu \\ \nu'_\tau \end{pmatrix}, \quad (\text{B.2})$$

con:

$$\mathbf{H}' = \frac{1}{4E_\nu} \begin{pmatrix} Ac_\phi^2 - \delta m^2 c_{2\omega} & \delta m^2 s_{2\omega} & As_{2\phi} \\ \delta m^2 s_{2\omega} & -Ac_\phi^2 + \delta m^2 c_{2\omega} & 0 \\ As_{2\phi} & 0 & A(3s_\phi^2 - 1) + 2m^2 - \delta m^2 \end{pmatrix}, \quad (\text{B.3})$$

dove  $\delta m^2 \equiv |m_1^2 - m_2^2|$  e  $m^2 \equiv |m_1^2 - m_3^2|$ . Nell'ipotesi  $m^2 \rightarrow \infty$ , dall'equazione (B.2) si deduce che lo stato  $\nu'_\tau$  oscilla molto rapidamente rispetto agli altri due stati. Ne consegue che il termine di interferenza  $As_{2\phi}\nu'_\tau$  nella (B.2) può essere trascurato avendo un valore medio approssimativamente nullo. La (B.2) si disaccoppia in una equazione per il *doppietto*  $(\nu'_e, \nu'_\mu)$ :

$$i \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \nu'_e \\ \nu'_\mu \end{pmatrix} = \frac{1}{4E_\nu} \begin{pmatrix} Ac_\phi^2 - \delta m^2 c_{2\omega} & \delta m^2 s_{2\omega} \\ \delta m^2 s_{2\omega} & -Ac_\phi^2 + \delta m^2 c_{2\omega} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu'_e \\ \nu'_\mu \end{pmatrix}, \quad (\text{B.4})$$

e una per il *singoletto*  $\nu'_\tau = \nu_3$ :

$$i \frac{d\nu_3}{dx} = \frac{m^2}{2E_\nu} \nu_3. \quad (\text{B.5})$$

La (B.4) è simile alla (1.53) con la sostituzione  $\nu \rightarrow \nu'$ ,  $\theta \rightarrow \omega$  ed  $A \rightarrow Ac_\phi^2$ .

Si supponga ora che lo stato iniziale sia un  $\nu_e$ . Dalla (B.1) si deduce che:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} = \mathbf{U}_{23}(\psi) \times \mathbf{U}_{13}(\phi) \begin{pmatrix} \nu'_e \\ \nu'_\mu \\ \nu'_\tau \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_\phi & 0 & c_\phi \\ -s_\phi s_\psi & c_\psi & c_\phi s_\psi \\ -s_\phi c_\psi & -s_\psi & c_\phi c_\psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nu'_e \\ \nu'_\mu \\ \nu'_\tau \end{pmatrix}, \quad (\text{B.6})$$

per cui lo stato iniziale può scriversi come:

$$|\nu(t=0)\rangle = |\nu_e\rangle = s_\phi |\nu_3\rangle + c_\phi |\nu'_e\rangle. \quad (\text{B.7})$$

Dalla (B.5) si ha che l'evoluzione di  $|\nu_3\rangle$  è data da:

$$|\nu_3\rangle \rightarrow \exp\left[-i\frac{m^2}{2E_\nu}x\right] |\nu_3\rangle. \quad (\text{B.8})$$

L'evoluzione di  $|\nu'_e\rangle$  è invece descritta dalla (B.4). La soluzione formale si può scrivere come:

$$|\nu'_e\rangle \rightarrow T_{\nu'_e\nu'_e}^{2\nu} |\nu'_e\rangle + T_{\nu'_e\nu'_\mu}^{2\nu} |\nu'_\mu\rangle, \quad (\text{B.9})$$

dove  $\mathbf{T}^{2\nu}$  è l'operatore di evoluzione nella base di flavour  $(\nu'_e, \nu'_\mu)$ . L'ampiezza  $T_{\nu_e\nu_e}^{3\nu}(t) = \langle \nu_e | \nu(t) \rangle$  si può quindi scrivere, dopo qualche calcolo, nel modo seguente:

$$T_{\nu_e\nu_e}^{3\nu} = s_\phi^2 \exp\left[-i\frac{m^2}{2E_\nu}x\right] + c_\phi^2 T_{\nu'_e\nu'_e}^{2\nu}. \quad (\text{B.10})$$

Prendendo il modulo al quadrato di ambo i membri di quest'ultima espressione e mediando sui termini rapidamente oscillanti si ha, in definitiva:

$$P_{3\nu}(\nu_e \rightarrow \nu_e) = s_\phi^4 + c_\phi^4 P_{2\nu}(\nu'_e \rightarrow \nu'_e), \quad (\text{B.11})$$

dove  $P_{2\nu}(\nu'_e \rightarrow \nu'_e)$  è la probabilità di sopravvivenza  $\nu_e \rightarrow \nu_e$  in due generazioni [calcolata, per esempio, attraverso la formula di Landau-Zener (1.67)], con l'accortezza di sostituire  $\theta \rightarrow \omega$  e  $N_e \rightarrow N_e c_\phi^2$ . Questa è proprio l'equazione (1.75) del paragrafo 1.4.1.

# Bibliografia

- [1] W. Pauli, in *Noyaux Atomiques*, Proceedings of Solvay Congress, Brussels (1933) 324 <sup>1</sup>.
- [2] C.S. Wu *et al.*, Phys. Rev. **D107** (1957) 641.
- [3] T.D. Lee and C.N. Yang, Phys. Rev. **104** (1956) 254; *ibid.* **105** (1957) 1671.
- [4] Gargamelle Collaboration, F.J. Hasert *et al.*, Phys. Lett. **B46** (1973) 138; Nucl. Phys. **B73** (1974) 1.
- [5] S. L. Glashow, Nucl. Phys. **22** (1961) 579; S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **19** (1967) 1264; A. Salam, in *Elementary Particle Theory, Proc. of the 8th Nobel Symposium*, Aspenäsgrården, 1968, ed. by N. Svartholm (Almqvist and Wiksell, Stockholm, 1968), p. 367.
- [6] LEP collaboration, Phys. Lett. **B276** (1992) 247.
- [7] G. Gelmini and E. Roulet, Rep. Prog. Phys. **58** (1995) 1207.
- [8] M. Gell-Mann, P. Ramond and R. Slansky, in *Supergravity*, Proceedings of the Workshop, Stony Brook, New York, 1979, ed. by P. van Nieuwenhuizen and D. Fredman (Amsterdam, North-Holland, 1979), p. 315; T. Yanagida, in the *Proceedings of the Workshop on Unified Theory and the Baryon Number on the Universe*, Tsukuba, Ibaraki, Japan, 1979, ed. by O. Sawada and A. Sugamoto (KEK Report 79-18, Tsukuba, Japan, 1979), p. 95.
- [9] L. Wolfenstein, Phys. Rev. **D17** (1978) 2369.
- [10] S. P. Mikheyev and A. Yu. Smirnov, Yad. Fiz. **42** (1985) 1441 [Sov. J. Nucl. Phys. **42** (1985) 913].
- [11] R. Davis (Homestake Collaboration) Prog. Part. Nucl. Phys. **32** (1994) 13.
- [12] M. B. Voloshin, M. Vistosk and L. B. Okun, Sov. J. Nucl. Phys. **44** (1986) 440; Sov. Phys. JETP **64** (1986) 466.
- [13] E. Kh. Akhmedov, in the *Proceedings of the 6th International Workshop on Neutrino Telescopes*, Venice, Italy, 1994, ed. by M. Baldo Ceolin (University of Padova, Italy, 1994), p. 285.
- [14] M. M. Guzzo, A. Masiero and S. T. Petcov, Phys. Lett. **B260** (1991) 154; M. M. Guzzo and S. T. Petcov, Phys. Lett. **B271** (1991) 172; V. Barger, R. J. N. Phillips and K. Whisnant, Phys. Rev. **D44** (1991) 1629; G. L. Fogli and E. Lisi, Astropart. Phys. **2** (1994) 91.

---

<sup>1</sup>Per uniformità, la bibliografia è scritta in lingua inglese.

- [15] P. I. Krastev and J. N. Bahcall, talk given at *Symposium on Flavor Changing Neutral Currents: Present and Future Studies (FCNC '97)*, Santa Monica, 1997, hep-ph/9703267, to appear in the proceedings.
- [16] G. L. Fogli, E. Lisi, and D. Montanino, *Phys. Rev.* **D49** (1994) 3626.
- [17] G. L. Fogli, E. Lisi, and D. Montanino, *Astropart. Phys.* **4** (1995) 177; also in the *Proceedings of the 6th International Workshop on Neutrino Telescopes* [13], p. 419.
- [18] G. L. Fogli, E. Lisi, and D. Montanino, *Phys. Rev.* **D54** (1996) 2048; also in the *Proceedings of the 8th International Conference on Neutrino Telescopes*, Venice, Italy, 1996, ed. by M. Baldo Ceolin (University of Padova, Italy, 1996), p. 277.
- [19] E. Lisi and D. Montanino, *Phys. Rev.* **D56** (1997) 1792.
- [20] B. Faïd, G. L. Fogli, E. Lisi, and D. Montanino, *Phys. Rev.* **D55** (1997) 1353.
- [21] G. L. Fogli, E. Lisi, and D. Montanino, *Phys. Rev.* **D56** (1997) 4374.
- [22] G. L. Fogli, E. Lisi, and D. Montanino, Bari University report No. BARI-TH/284-97 (1997), hep-ph/9711421, submitted to *Astropart. Phys.*
- [23] G. L. Fogli, E. Lisi, and D. Montanino, "Discriminating MSW solutions to the solar neutrino problem with flux independent information at SuperKamiokande and SNO", in preparation.
- [24] E. Majorana, *Nuovo Cimento* **14** (1937) 170; K. M. Case, *Phys. Rev.* **107** (1957) 307.
- [25] B. Kayser, in *Neutrino Physics*, ed. by K. Winter, Cambridge Univ. Press, 1989, p. 115.
- [26] R. N. Mohapatra e P. B. Pal, *Massive Neutrinos in Physics and Astrophysics*, World Scientific Lecture Notes in Physics, vol. 41 (1991).
- [27] S. M. Bilenky and S. T. Petcov, *Rev. Mod. Phys.* **59** (1987) 671.
- [28] M. Fukugita and, T. Yanagida, *Physics of Neutrinos* (Kyoto Univ. report No. YITP-K-1050), in *Physics and Astrophysics of Neutrinos*, ed. by A. Suzuky and A. Fukugita (Japan, Tokyo, 1993), p. 1.
- [29] J. D. Bjorken and S. D. Drell, *Relativistic Quantum Mechanics* (McGraw and Hill, 1964), p. 66.
- [30] F. Boehm and P. Vogel *Physics of Massive Neutrinos*, (Cambridge Univ. Press, 1992).
- [31] ALEPH collaboration, D. Buskulic *et al.*, *Phys. Lett.* **B349** (1995) 585.
- [32] K. Assamagan *et al.*, *Phys. Lett.* **B335** (1994) 231; *Phys. Rev.* **D53** (1996) 6065.
- [33] A. I. Belesev *et al.*, *Phys. Lett.* **B350** (1995) 263.
- [34] A. Balysh *et al.*, *Phys. Lett.* **B365** (1995) 450; M. Güter *et al.*, *Phys. Rev.* **D55** (1997) 54.
- [35] N. Cabibbo, *Phys. Rev. Lett.* **10** (1963) 531; M. Kobayashi and T. Maskawa, *Prog. Theor. Phys.* **49** (1973) 652.

- [36] Particle Data Group, R. M. Barnett *et al.*, Phys. Rev. **D54** (1994) 1.
- [37] The idea of  $\nu_e$ - $\nu_\mu$  mixing was independently introduced also by Y. Katayama, K. Matumoto, S. Tanaka, and E. Yamada, Prog. Theor. Phys. **28** (1962) 675; Z. Maki, M. Nakagawa, and S. Sakata, *ibid.* **28** (1962) 870.
- [38] B. Pontecorvo, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **53** (1967) 1717 [Sov. Phys. JETP **26** (1968) 948]; V. Gribov and B. Pontecorvo, Phys. Lett. **B28** (1969) 493; S. Bilenky and B. Pontecorvo, Phys. Rept. **41** (1978) 225.
- [39] T. K. Kuo and J. Pantaleone, Rev. Mod. Phys. **61** (1989) 937.
- [40] S. P. Mikheyev and A. Yu. Smirnov, Prog. Part. Nucl. Phys. **23** (1989) 41.
- [41] S. L. Glashow and S. Weinberg, Phys. Rev. **D15** (1977) 1958.
- [42] F. J. Botella, C. S. Lim, and W. J. Marciano, Phys. Rev. **D35** (1987) 896.
- [43] S. T. Petcov, Phys. Lett. **B214** (1988) 139.
- [44] S. Nussinov, Phys. Lett. **B63** (1976) 201.
- [45] L. Landau, Phys. Z. Sowjetunion **2** (1932) 46; L. Landau and E. M. Lifshitz, “*Quantum mechanics, non relativistic theory*” (Pergamon Press, New York, 1977); C. Zener, Proc. R. Soc. London **A137** (1932) 696; E. C. G. Stueckelberg, Helv. Phys. Acta **5** (1932) 369.
- [46] S. P. Rosen and J. M. Gelb, Phys. Rev. **D34** (1986) 969; V. Barger, R. J. Phillips, and K. Whisnant, Phys. Rev. **D34** (1986) 980; S. Parke, Phys. Rev. Lett. **57** (1986) 1275; S. Parke and T. P. Walker, Phys. Rev. Lett. **57** (1986) 2322; V. W. Kim, W. K. Sze, and S. Nussinov, Phys. Rev. **D35** (1987) 4014; D. Nötzold, Phys. Rev. **D36** (1987) 1625; P. Pizzochero, Phys. Rev. **D36** (1987) 2293; S. Toshev, Phys. Lett. **B196** (1987) 170; S. T. Petcov, Phys. Lett. **B200** (1988) 373; P. I. Krastev and S. T. Petcov, Phys. Lett. **B207** (1988) 64; T. Kaneko, Prog. Theor. Phys. **79** (1987) 532; M. Ito, T. Kaneko, and M. Nakagawa, Prog. Theor. Phys. **79** (1988) 13; A. B. Balantekin, S. H. Frike, and P. J. Hatchell, Phys. Rev. **D38** (1988) 935; T. K. Kuo and J. Pantaleone, Phys. Rev. **D39** (1989) 1930; A. Nicolaidis, Phys. Lett. **B242** (1990) 480; J. C. D’Olivo, Phys. Rev. **D45** (1992) 924; A. B. Balantekin, Phys. Rev. **D54** (1996) 6323.
- [47] V. Barger, K. Wishnant, D. Cline, and R. J. N. Phillips, Phys. Lett. **B93** (1980) 195; J. Phys. **G6** (1980) L165; V. Barger, K. Wishnant, and R. J. N. Phillips, Phys. Rev. **D22** (1980) 1636.
- [48] T. K. Kuo and J. Pantaleone, Phys. Rev. **D35** (1987) 3432; D. Harley, T. K. Kuo, and J. Pantaleone, Phys. Rev. **D47** (1993) 4059; X. Shi and D. N. Schramm, Phys. Lett. **B283** (1992) 305; X. Shi, D. N. Schramm and J. N. Bahcall, Phys. Rev. Lett. **69** (1992) 717.
- [49] H. Bethe, Phys. Rev. **55** (1939) 434.
- [50] J. N. Bahcall, *Neutrino Astrophysics* (Cambridge University Press, 1989).
- [51] J. N. Bahcall, M. H. Pinsonneault, Rev. Mod. Phys. **67** (1995) 781.
- [52] J. N. Bahcall, M. H. Pinsonneault, Rev. Mod. Phys. **64** (1992) 885.
- [53] J. N. Bahcall and R. K. Ulrich, Rev. Mod. Phys. **60** (1988) 297

- [54] J. N. Bahcall, W. F. Huebner, S. H. Lubow, P. D. Parker, and R. K. Ulrich, *Rev. Mod. Phys.* **54** (1982) 767.
- [55] S. Turk-Chièze *et al.*, *Phys. Rept.* **230** (1993) 57.
- [56] S. Turk-Chièze and I. Lopez, *Astrophys. J.* **408** (1993) 347.
- [57] A. Dar and G. Shaviv, Technion report No. PH-94-5 (1994), astro-ph/9401043 (unpublished); *Astrophys. J.* **468** (1996) 933.
- [58] A. Chieffi and O. Straniero, *Astrophys. J. Suppl.* **71** (1987) 49; V. Castellani, A. Chieffi, and A. Pulone, *Astrophys. J. Suppl.* **76** (1991) 911; V. Castellani, A. Chieffi, and O. Straniero, *Astrophys. J. Suppl.* **78** (1992) 517.
- [59] G. Berthomieu, J. Provost, P. Morel, and Y. Lebreton, *Astron. Astrophys.* **268** (1993) 775.
- [60] J. M. Burgers, *Flow Equations for Composite Gases*, (Academic Press, New York, 1969).
- [61] S. Basu, J. Christensen-Dalsgaard, J. Schou, M. J. Thompson, and S. Tomczyk, *Astrophys. J.* **460** (1996) 1064; D. O. Gough *et al.*, *Science* **272** (1996) 1296; O. Richard, S. Vauclair, C. Charbonnel, and W. A. Dziembowski, *Astron. Astrophys.* **312** (1996) 1000; J. N. Bahcall, M. H. Pinsonneault, S. Basu, and J. Christensen-Dalsgaard, *Phys. Rev. Lett.* **78** (1997) 17; B. Ricci, V. Berezinskii, S. Degl’Innocenti, W. A. Dziembowski, and G. Fiorentini, *Phys. Lett.* **B407** (1997) 155.
- [62] J. N. Bahcall, *Phys. Rev.* **D44** (1991) 1644.
- [63] J. N. Bahcall, *Rev. Mod. Phys.* **50** (1978) 881; J. N. Bahcall *et al.*, *Rev. Mod. Phys.* **54** (1982) 767.
- [64] J. N. Bahcall, E. Lisi, D. E. Alburger, L. De Braekeleer, S. J. Freedman, and J. Napolitano, *Phys. Rev.* **C54** (1996) 411.
- [65] G. L. Fogli and E. Lisi, *Astropart. Phys.* **3** (1995) 185.
- [66] J. N. Bahcall, M. Kamionkowsky, and A. Sirlin, *Phys. Rev.* **D51** (1995) 6146.
- [67] SAGE Collaboration, J. N. Abdurashitov *et al.*, *Phys. Lett.* **B328** (1994) 234; *Phys. Rev. Lett.* **77** (1996) 4708.
- [68] GALLEX Collaboration, P. Anselmann *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **327** (1994) 377; *ibid.* **357** (1995) 237; *ibid.* **361** (1996) 235(E); W. Hampel *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **288** (1996) 384; A description of the experiment can be found at the URL <http://kosmopc.mpi-hd.mpg.de/gallex/gallex.htm> .
- [69] Kamiokande Collaboration, K. S. Hirata *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **65** (1990) 1297; *ibid.* **65** (1990) 1301; *ibid.* **66** (1991) 9; *Phys. Rev.* **D44** (1991) 2241; *ibid.* **45** (1992) 2170(E); A description of the experiment can be found at the URL <http://www-sk.icrr.u-tokyo.ac.jp/doc/kam/pamf.html> .
- [70] GALLEX Collaboration, P. Anselmann *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **342** (1995) 440; M. Cribier *et al.*, *Nucl. Instr. and Meth.* **A265** (1988) 574; M. Cribier, GALLEX internal note GLX-46 (1994).

- [71] SAGE collaboration, V. N. Gavrin *et al.* in the Proceedings of the 7th International Workshop on Neutrino Telescopes, Venice, Italy, 1996, ed. by M. Baldo Ceolin (University of Padua, Italy, 1996), p. 205.
- [72] J. N. Bahcall, P. I. Krastev, and E. Lisi, *Phys. Lett.* **B348** (1995) 121
- [73] Y. Takeuchi, Ph.D. Thesis, Tokyo Institute of Technology Report No. TIT-HPE-95-01, Jan. 1995.
- [74] Y. Totsuka, in *TAUP '95*, Proceedings of the 4th International Workshop on Theoretical and Phenomenological Aspects of Underground Physics, Toledo, Spain, ed. by A. Morales, J. Morales, and J. A. Villar [*Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.)* **48**, 547 (1996)]; A. Suzuki, in *Physics and Astrophysics of Neutrinos*, ed. by M. Fukugita and A. Suzuki (Springer-Verlag, Tokyo, 1994), p. 414; Y. Totsuka, *ibid.*, p. 625; a description of the experiment can be found at the URL <http://www.phys.washington.edu/~superk/>.
- [75] Y. Totsuka (SuperKamiokande Collaboration), in *LP '97*, 28th International Symposium on Lepton Photon Interactions, Hamburg, Germany, 1997, to appear in the Proceedings; See also M. Nakahata, in *HEP '97*, International Europhysics Conference in High Energy Physics, Jerusalem, Israel, 1997, to appear in the Proceedings; K. Inoue, in *TAUP '97* 5th International Workshop on Topics in Astroparticle and Underground Physics, Laboratori Nazionali del Gran Sasso, Assergi, Italy, 1997, to appear in the Proceedings.
- [76] R. Svoboda, in the Workshop on Solar Neutrinos *News About SNOs*, SantaBarbara, U.S.A., 1997; Printable copies of the slides can be found at the URL <http://doug-pc.itp.ucsb.edu/online/sno/svoboda/>.
- [77] A. B. McDonald, Proceedings of the 9th Lake Louise Winter Institute, ed. by A. Astbury *et al.*, (World Scientific, Singapore, 1994), p. 1; *TAUP '95* [74], p. 357; A description of the experiment can be found at the URL <http://snodaq.phy.queensu.ca/SNO/sno2.html>.
- [78] C. Arpesella *et al.*, INFN Borexino proposal, Vols. 1 and 2, ed. by G. Bellini, R. Raghavan, *et al.* (University of Milan, 1992); J. Bezinger, F. P. Calaprice *et al.*, proposal for Borexino to National Science Foundation (Princeton, 1992); J. Bezinger *et al.*, "A Proposal for Participation in the Borexino Solar Neutrino Experiment", Princeton University Report, 1996 (unpublished); Borexino Collaboration, G. Bellini *et al.*, in *TAUP '95* [74], p. 363; A description of the experiment can be found at the URL <http://almime.mi.infn.it/html/borexino.html>.
- [79] ICARUS Collaboration, C. Rubbia *et al.*, in *TAUP '95* [74], p. 172; A description of the experiment can be found at the URL <http://www.aquila.infn.it:80/icarus/>.
- [80] GNO Collaboration, "Proposal for a permanent Gallium Neutrino Observatory (GNO) at Laboratori Nazionali del Gran Sasso" (unpublished). The proposal is available at the URL <http://kosmopc.mpi-hd.mpg.de/gallex/gallex.htm>.
- [81] HELLAZ Collaboration, T. Ypsilantis *et al.*, "HELLAZ: a high rate solar neutrino detector with neutrino energy determination," College de France Report LPC/94-28 (unpublished).
- [82] N. Hata and P. Langacker, *Phys. Rev.* **D52** (1995) 420; *Phys. Rev.* **D50** (1994) 632; N. Hata, Ph.D. Thesis, University of Pennsylvania, 1994.

- [83] N. Ferrari, G. Fiorentini, and B. Ricci, Phys. Lett. **B387** (1996) 427.
- [84] S. L. Glashow and L. M. Krauss, Phys. Lett. **B190** (1987) 199; P. I. Krastev and S. T. Petcov, Phys. Lett. **B285** (1992) 85; Phys. Rev. **D53** (1996) 1665; V. Barger, R. J. N. Phillips, and K. Whisnant, Phys. Rev. **D69** (1992) 3135.
- [85] S. P. Rosen and J. M. Gelb, Phys. Rev. **D34** (1986) 969.
- [86] J. Bouchez, M. Cribier, W. Hampel, J. Rich, and D. Vignaud, Z. Phys. **C32** (1986) 499; M. Cribier, W. Hampel, J. Rich, and D. Vignaud, Phys. Lett. **B182** (1989) 89; A. J. Baltz and J. Weneser, Phys. Rev. **D35** (1987) 528; *ibid.* **37** (1988) 3364; A. Dar, A. Mann, Y. Melina, and D. Zajfman, Phys. Rev. **D35** (1987) 3607; A. Dar and A. Mann, Nature (London) **325**, (1987) 790; S. P. Mikheyev and A. Yu. Smirnov, in *Moriond '87*, Proceedings of the 7th Moriond Workshop on New and Exotic Phenomena, Les Arcs, France, 1987, ed. by O. Fackler and J. Trân Thanh Vân (Frontières, Paris, 1987), p. 405; M. L. Cherry and K. Lande, Phys. Rev. **D36** (1987) 3571; S. Hiroi, H. Sakuma, T. Yanagida, and M. Yoshimura, Phys. Lett. **B198** (1987) 403; Prog. Theor. Phys. **78** (1987) 1428; M. Spiro and D. Vignaud, Phys. Lett. **B242** (1990) 279.
- [87] P. I. Krastev and S. T. Petcov, Phys. Lett. **B395** (1997) 69.
- [88] E. Gates, M. Krauss, and M. White, Phys. Rev. **D51** (1995) 2631; S. M. Bilenky and C. Giunti, Astropart. Phys. **2** (1994) 353; G. Fiorentini, M. Lissia, G. Mezzorani, M. Moretti, and D. Vignaud, Phys. Rev. **D49** (1994) 6298; V. Berezinsky, G. Fiorentini, and M. Lissia, Phys. Lett. **B341** (1994) 38; P. I. Krastev and A. Yu. Smirnov, Phys. Lett. **B338** (1994) 282; J. N. Bahcall and P. I. Krastev, Phys. Rev. **D53** (1996) 4211.
- [89] D. Harley, T. K. Kuo, and J. Pantaleone, Phys. Rev. **D47** (1993) 4059; E. Ma and J. Pantaleone, Phys. Rev. **D52** (1995) 3673.
- [90] G. L. Fogli, E. Lisi, and D. Montanino, in *WIN '97*, Proceedings of the 6th International Workshop on Weak Interactions and Neutrinos, Capri, Italy, to be published.
- [91] J. N. Bahcall and E. Lisi, Phys. Rev. **D54** (1996) 5417; FORTRAN codes for the calculation of the differential  $\nu$ - $d$  cross section are available at the URL <http://www.sns.ias.edu/~jnb> (see "Neutrino Export Software and Data").
- [92] J. N. Bahcall, P. I. Krastev, and E. Lisi, Phys. Rev. **C55** (1997) 494.
- [93] J. M. LoSecco, Phys. Rev. **D47** (1993) 2032; J. M. Gelb, W. Kwong, and S. P. Rosen, Phys. Rev. Lett. **78** (1997) 2296; Q. Y. Liu, M. Maris, and S. T. Petcov, Phys. Rev. **D56** (1997) 5991; M. Maris and S. T. Petcov, International School for Advanced Study report No. HEPPH-9703207 (unpublished); Phys. Rev. **D56** (1997) 7444; J. N. Bahcall and P. I. Krastev, Phys. Rev. **C56** (1997) 2839.
- [94] I. Pomeranchuk, as cited in the second of Refs. [38]; R. Ehrlich, Phys. Rev. **D18** (1978) 2323; P. I. Krastev and S. T. Petcov, Nucl. Phys. **B449** (1995) 605; E. Calabresu, N. Ferrari, G. Fiorentini, and M. Lissia, Astropart. Phys. **4** (1995) 159.
- [95] S. P. Mikheyev and A. Yu. Smirnov, Abdus Salam International Center of Theoretical Physics Report No. IC-97-113, hep-ph/9708403 (unpublished).
- [96] W. T. Eadie, D. Drijard, F. E. James, M. Roos, and B. Sadoulet, *Statistical Methods in Experimental Physics* (North Holland, Amsterdam and London, 1971).

- [97] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series, and Products* (Academic Press, San Diego CA, 1994); M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables* (John Wiley and Sons, New York, 1972); A computer routine for the numerical calculation of this special functions can be found in the CERN Program Library CERNLIB. A printable description of this routine can be found at the URL <http://wwwcn.cern.ch/asdoc/cernlib.html> .
- [98] LSND Collaboration, C. Athanassopoulos *et al.*, Phys. Rev. **C56** (1997) 2806; Phys. Rev. **C54** (1996) 2685; Phys. Rev. Lett. **77** (1996) 3082; Phys. Rev. Lett. **75** (1995) 2650;
- [99] G. L. Fogli and E. Lisi, Phys. Rev. **D52** (1995) 2775.
- [100] T. K. Gaisser, T. Stanev, and G. Barr, Phys. Rev. **D38** (1988) 85; G. Barr, T. K. Gaisser, and T. Stanev, Phys. Rev. **D39** (1989) 3532; V. Agrawal, T. K. Gaisser, P. Lipari, and T. Stanev, Phys. Rev. **D53** (1996) 1314; M. Honda, K. Kasahara, K. Hidaka, and S. Midorikawa, Phys. Lett. **B248** (1990) 183; M. Honda, T. Kajita, K. Kasahara, and S. Midorikawa, Phys. Rev. **D52** (1995) 4985; L. V. Volkova, Yad. Fiz. **31** (1980) 1510 [Sov. J. Nucl. Phys. **31** (1980) 784].
- [101] For a recent critical reanalysis of the upward-going muon data, see G. L. Fogli, E. Lisi, and A. Marrone, Bari University report No. BARI-TH-280-97 (1997), hep-ph/9708213, to be published in Phys. Rev. D.
- [102] Kamiokande Collaboration, K. S. Hirata *et al.*, Phys. Lett. **B205** (1988) 416; Phys. Lett. **B280** (1992) 146; Y. Fukuda *et al.*, Phys. Lett. **B335** (1994) 237.
- [103] IMB Collaboration, D. Casper *et al.*, Phys. Rev. Lett. **66** (1991) 2561; R. Becker-Szendy *et al.*, Phys. Rev. **D46** (1992) 3720.
- [104] Fréjus Collaboration, Ch. Berger *et al.*, Phys. Lett. **B227** (1989) 489; Phys. Lett. **B245** (1990) 305.
- [105] NUSEX Collaboration, M. Aglietta *et al.*, Europhys. Lett. **8** (1989) 611.
- [106] Soudan 2 Collaboration, M. Goodman *et al.*, in *Neutrino 94*, Proceedings of the 16th International Conference on Neutrino Physics and Astrophysics, Eilat, Israel, edited by A. Dar, G. Eilam, and G. Gronau [Nucl. Phys. **B** (Proc. Suppl.) **38** (1995) 337].
- [107] T. Kajita, in *Physics and Astrophysics of Neutrinos*, edited by M. Fukugita and A. Suzuki (Springer-Verlag, Tokyo, 1994), p. 559; T. Stanev, in *Taup '95* [74], p. 165; E. W. Beier and E. D. Frank, Phil. Trans. R. Soc. London **A346** (1994) 63; T. K. Gaisser, F. Halzen, and T. Stanev, Phys. Rept. **258** (1995) 173; B. C. Barish, in *Neutrino '94* [106], p. 343; E. Kh. Akhmedov, in *Cosmological Dark Matter*, Proceedings of the International School on Cosmological Dark Matter, Valencia, Spain, 1993, edited by J. W. F. Valle and A. Perez (World Scientific, 1994), p. 131.
- [108] G. L. Fogli, E. Lisi, D. Montanino, and G. Scioscia, Phys. Rev. **D55** (1997) 4385.
- [109] V. Barger and K. Whisnant, Phys. Lett. **B209** (1988) 365; J. G. Learned, S. Pakvasa, and T. J. Weiler, Phys. Lett. **B207** (1988) 79; Phys. Lett. **B298** (1993) 149; K. Hidaka, M. Honda, and S. Midorikawa, Phys. Rev. Lett. **61** (1988) 1537; S. Midorikawa, M. Honda, and K. Kasahara, Phys. Rev. **D44** (1991) R3379; A. Acker, A. B. Balantekin, and F. Loreti, Phys. Rev. **D49** (1994) 328; J. Pantaleone, Phys. Rev. **D49** (1994) R2152; S.

- M. Bilenky, A. Bottino, C. Giunti, and C. W. Kim, *Astropart. Phys.* **4** (1996) 241; J. J. Gomez-Cadenas and M. C. Gonzalez-Garcia, *Z. Phys.* **C71** (1996) 443; M. Narayan, M. V. N. Murthy, G. Rajasekaran, and S. Uma Sankar, *Phys. Rev.* **D53** (1996) 2809; O. Yasuda, Tokyo Metropolitan University Report No. TMUP-HEL-96-03, hep-ph/9602342 (unpublished).
- [110] L. Oberauer and F. von Feilitzsch, *Rep. Prog. Phys.* **55** (1992) 1093.
- [111] G. Zacek *et al.*, *Phys. Rev.* **D34** (1986) 2621.
- [112] G. S. Vidyakin *et al.*, *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **59** (1994) 364 [*JETP Lett.* **59** (1994) 390].
- [113] B. Achkar *et al.*, *Nucl. Phys.* **B434** (1995) 503.
- [114] M. Apollonio *et al.*, (Chooz Collaboration), University of Pisa Report, hep-ex/9711002 (unpublished); A description of the experiment can be found at the URL [http://duphy4.physics.drexel.edu/chooz\\_pub/](http://duphy4.physics.drexel.edu/chooz_pub/) .
- [115] E776 Collaboration, L. Borodovsky *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **68** (1992) 274.
- [116] E531 Collaboration, N. Ushida *et al.*, *Phys. Rev. Lett.* **57** (1986) 2897.
- [117] CDHSW Collaboration, F. Dydak *et al.*, *Phys. Lett.* **B134** (1984) 281.
- [118] KARMEN Collaboration, J. Kleinfeller *et al.*, in *TAUP '95* [74], p. 207; also in *Neutrino '96*, 17th International Conference on Neutrino Physics and Astrophysics, Helsinki, Finland, 1996, to appear in the Proceedings; KARMEN Collaboration, K. Eitel *et al.*, in the *Proceedings of the 7th International Workshop on Neutrino Telescopes* [71], p. 119.
- [119] CHORUS Collaboration, D. Macina *et al.*, in *TAUP '95* [74], p. 183; D. Saltzberg *et al.*, in the *Proceedings of the 8th International Conference on Neutrino Telescopes* [18], p. 91.
- [120] NOMAD Collaboration, M. Laveder *et al.*, in *TAUP '95* [74] p. 188; A. Rubbia *et al.*, in the *Proceedings of the 8th International Conference on Neutrino Telescopes* [18], p. 101.
- [121] G. L. Fogli, E. Lisi, and G. Scioscia, *Phys. Rev.* **D52** (1995) 5334.
- [122] G. L. Fogli, E. Lisi, and G. Scioscia, *Phys. Rev.* **D56** (1997) 3081.
- [123] J. R. Primack, J. Holtzmann, A. Klypin, and D. O. Caldwell, *Phys. Rev. Lett.* **74** (1995) 2160.
- [124] G. Scioscia, private communication.
- [125] G. L. Fogli, E. Lisi, D. Montanino and A. Marrone, Bari University report No. BARI-TH-291-97 (1997), hep-ph/9711421, to appear in *Phys. Lett. B*.
- [126] J. Pantaleone, *Phys. Rev.* **D49** (1994) R2152.
- [127] Q. Y. Liu and A. Yu. Smirnov, Abdus Salam International Center of Theoretical Physics Report No. IC-97-211, hep-ph/9712493 (unpublished); S. M. Bilenky, C. Giunti, and W. Grimus in *HEP '97* [75], hep-ph/9711416; V. Barger, T. J. Weiler, and K. Whisnant, University of Madison report No. MADPH-97-1031, hep-ph/9712495 (unpublished).

- 
- [128] G. L. Fogli, E. Lisi, D. Montanino, and G. Scioscia, Phys. Rev. **D56** (1997) 4365; also in the *Proceedings of the 8th International Conference on Neutrino Telescopes*, [18], p. 325.
- [129] A. Acker and S. Pakvasa, Phys. Lett. **B397** (1997) 209.
- [130] C. Y. Cardall and G. M. Fuller, Phys. Rev. **D53** (1996) 4421.
- [131] D. Saltzberg, Phys. Lett. **B355** (1995) 499.
- [132] COSMOS Collaboration, R. A. Sidwell *et al.*, in *Neutrino '96*, [118].
- [133] J. J. Gomez-Cadenas and J. A. Hernando, Nucl. Instr. and Meth. **A381** (1996) 223.
- [134] A. Ereditato, G. Romano, and P. Strolin, "TENOR: A new experiment for the search of  $\bar{\nu}_\mu$ - $\bar{\nu}_\tau$  oscillations," CHORUS Internal note No. 96-03, 1996 (unpublished).
- [135] W. Krolikowski, Warsaw Institute for Physics report No. IFT-97-21, hep-ph/9712328 (unpublished); J. Sato and T. Yanagida, Tokyo University report No. UT-796, hep-ph/9710516 (unpublished); M. Bando, T. Kugo, and K. Yoshioka, Kyoto University report No. KUNS-1473, hep-ph/9710417 (unpublished).
- [136] A. Halprin, Phys. Rev. **D34** (1986) 3462.
- [137] P. D. Mannheim, Phys. Rev. **D37** (1988) 1935.
- [138] A. M. Dziewonski and D. L. Anderson, Phys. Earth Planet. Inter. **25** (1981) 297.
- [139] D. J. Stevenson, Science **214** (1981) 214.
- [140] D. L. Anderson, Science **243** (1989) 367.
- [141] A. J. Baltz and J. Weneser, Phys. Rev. **D50** (1994) 5971; *ibid.* **51** (1995) 3960.

# Ringraziamenti

Varie persone hanno contribuito a rendere interessante e fruttuoso il periodo di Dottorato di Ricerca. Desidero innanzitutto ringraziare il Prof. GianLuigi Fogli, che ha seguito con costante impegno come tutore il mio lavoro durante tutto il periodo di dottorato. Il rapporto con il Dott. Eligio Lisi è andato oltre la semplice collaborazione scientifica poiché egli, con la sua pazienza e cortesia, mi ha permesso di acquisire maggiore confidenza con il mondo della ricerca scientifica. Ringrazio il Dott. Gaetano Scioscia per le interessanti discussioni e per avermi fornito l'analisi dei risultati preliminari di Chooz, utilizzata nel paragrafo ???. Desidero anche ringraziare i Proff. Antonio Masiero e Serguey Petcov per la loro gentile accoglienza durante il mio periodo di permanenza alla Scuola Internazionale Superiore di Studi Avanzati di Trieste. Infine, desidero ringraziare i miei genitori ed i miei amici che con il loro incoraggiamento mi hanno permesso di portare a termine questo lavoro.