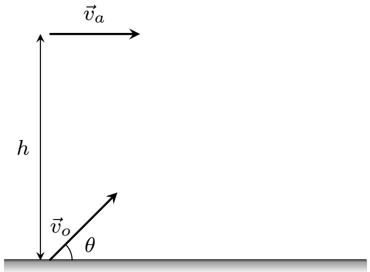
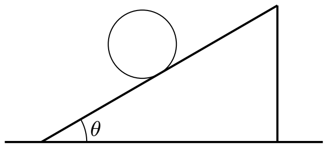
Esercizio 1 - Un aereo sta volando orizzontalmente ad una quota h con velocità costante $\vec{v}_a$; un proiettile viene lanciato dal suolo con la velocità iniziale indicata in figura, nell'istante in cui l'aereo passa dalla verticale.

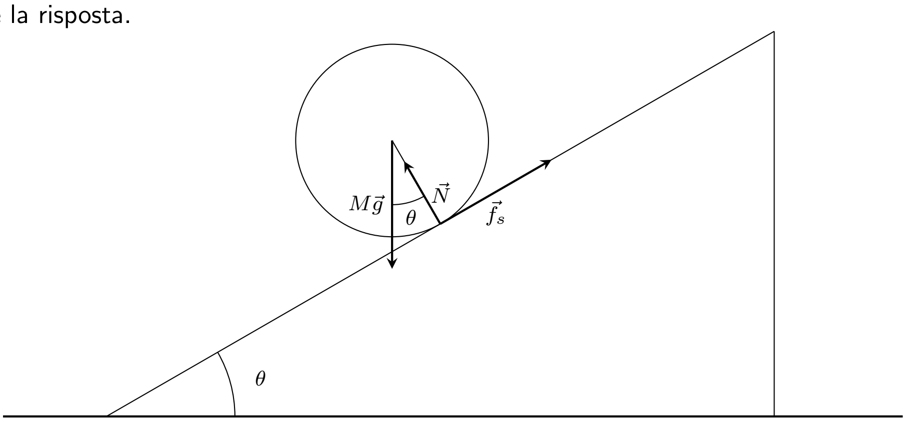
Calcolare, in funzione di v_o e v_a, l'angolo θ con cui bisogna lanciare il proiettile affinchè esso colpisca l'aereo ed il valore minimo di v_o in funzione di h, v_a e dell'accelerazione di gravità. Trascurare la resistenza dell'aria.



Soluzione
Utilizziamo un sistema di riferimento con l'origine nella posizione iniziale del proiettile, l'asse x orizzontale e rivolto verso destra, l'asse y verticale e rivolto verso l'alto e fissiamo $t = 0$ all'istante del lancio. Le coordinate dell'aereo e del proiettile in funzione del tempo (leggi orarie del moto) si scrivono:
$x_a(t) = v_a t \quad ; \quad y_a(t) = h$
$x_p(t) = v_o \cos(\theta)t \quad ; \quad y_p(t) = v_o \sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2$
affinchè i due palloni si incontrino, le loro coordinate x ed y devono essere uguali in un istante da determinare. Abbiamo dunque due equazioni nelle incognite t e θ:
$v_a t = v_o \cos\theta t \quad ; \quad h = v_o \sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2$
La prima equazione (escludendo il caso banale $t = 0$ e dividendo per t) permette di ricavare il valore di θ: $\quad cos\theta = \frac{v_a}{v_o}$ (*)
è evidente che v_o deve essere maggiore di v_a, ma non basta : la seconda equazione permette di ricavare il tempo dell'impatto; è un'equazione di secondo grado in t che ha soluzioni reali per:
$v_o^2 \sin^2\theta - 2gh \geq 0 \quad \Rightarrow$ (ricavando $\sin^2\theta$ dalla (*)) $\quad v_o^2 \geq v_a^2 + 2gh$
Se questa condizione è verificata l'equazione ha due soluzioni che corrispondono ai due istanti in cui la traiettoria parabolica del proiettile incontra quella dell'aereo oppure una (due soluzioni coincidenti) che corrisponde al caso in cui l'impatto avviene alla sommità della traiettoria del proiettile.
Si ottiene, ovviamente, lo stesso risultato scrivendo l'espressione della quota massima del proiettile ed imponendo che essa sia maggiore o uguale ad h:
$\frac{v_o^2 \sin^2\theta}{2g} \geq h$

Esercizio 2 - Dato un piano inclinato di un angolo θ rispetto all'orizzontale ed un disco omogeneo di massa M e raggio R che rotola su di esso con coeffiecente di attrito statico μ_s:
a) dimostrare che il valore massimo di θ affinchè si abbia rotolamento puro è dato da: $\tan\theta_{max} = 3\mu_s$;
b) nel caso in cui invece del disco si abbia un anello della stessa massa, dello stesso raggio e di spessore trascurabile rispetto al raggio, θ_{max} è maggiore o minore che nel caso precedente? Giustificare la risposta.





Soluzione
a) Utilizziamo un sistema di riferimento con l'asse x parallelo al piano inclinato e rivolto verso il basso e l'asse y nel piano della figura e rivolto verso l'alto; la posizione dell'origine è irrilevante per i calcoli che faremo.
Ipotizziamo che la forza d'attrito statico $\vec{f}_s$ agisca nel verso indicato in figura. Indicando con $\vec{a}$ l'accelerazione del centro di massa del disco e con $\vec{\alpha}$ la sua accelerazione angolare, la prima equazione cardinale dei corpi rigidi, lungo le direzioni x e y , si scrive:
$Mg\sin\theta - f_s = Ma_x \quad ; \quad -Mg\cos\theta + N = Ma_y = 0$ (*)
scegliendo come polo il centro di massa del disco, solo $\vec{f}_s$ ha momento non nullo e la seconda equazione cardinale si scrive (l'asse z è entrante nel piano della figura ed il momento di $\vec{f}_s$ è uscente) :
$-Rf_s = I\alpha_z$
infine la condizione di rotolamento puro si scrive (se a_x è positiva l'accelerazione angolare è uscente dal piano della figura e quindi α_z è negativa):
$-a_x = R\alpha_z$
Sostituendo le ultime due equazioni nella prima delle (*):
$Mg\sin\theta - f_s = -MR\alpha_z = \frac{MR^2}{I}f_s \quad \Rightarrow \quad f_s = \frac{Mg\sin\theta}{1+\frac{MR^2}{I}}$
f_s risulta positivo per tutti i possibili valori di θ quindi l'ipotesi iniziale sul verso di $\vec{f}_s$ è corretta.
Ricavando ora N dalla seconda delle (*), sostituendo $I = \frac{1}{2}MR^2$ e considerando che la forza di attrito statica è soggetta alla limitazione $f_s \leq \mu_s N$ otteniamo:
$\tan\theta \leq 3\mu_s \quad \Rightarrow \quad \tan\theta_{max} = 3\mu_s$
b) nel caso dell'anello bisogna sostituire nei calcoli precedenti il momento d'inerzia $I = MR^2$; si ottiene:
$\tan\theta_{max} = 2\mu_s$

quindi l'angolo massimo è minore.

Esercizio 3 - Un proiettile di piombo di massa m (si assumono noti il calore specifico c, la temperatura iniziale T_i e quella di fusione T_f) si conficca in un bersaglio di massa M inizialmente a riposo, sospeso ad una fune inestensibile di lunghezza l; al momento dell'urto esso ha velocità orizzontale. L'urto è completamente anelastico. Supponendo che durante l'urto tutta l'energia cinetica persa sia trasferita, sotto forma di calore, al solo proiettile:
a) determinare la velocità iniziale per cui esso fonde;

b) determinare la massima quota raggiunta dal sistema dopo l'urto.

Ipotizzare che durante l'urto la fune resti in posizione verticale e trascurare il calore latente di fusione.

Soluzione

a) Ipotizzando che durante l'urto la fune resti in posizione verticale, le forze esterne agenti sul sistema sono dirette lungo la vertcale, quindi si conserva la componente orizzontale della quantità di moto, che avrà la stessa direzione della velocità iniziale del proiettile. Siamo quindi nel caso di un urto frontale completamente anelastico in cui si conserva la quantità di moto; la variazione di energia cinetica è data da (con ovvio significato dei simboli):

$E_{k_f} - E_{k_i} = -\frac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left(v_1 - v_2\right)^2 = -\frac{1}{2}\mu\left(v_1 - v_2\right)^2$

dove μ è la massa ridotta del sistema; nel nostro caso la velocità iniziale del bersaglio è nulla; sostituendo i valori dati dal problema ed indicando con v_o la velocità iniziale del proiettile :

$E_{k_f} - E_{k_i} = -\frac{1}{2}\frac{mM}{m+M}{v_o}^2 = -\frac{1}{2}\mu {v_o}^2$

La quantità di calore necessaria affinchè il proiettile raggiunga la temperatura di fusione è data da:

$Q = mc(T_f - T_i)$

e questa deve uguagliare la diminuzione di energia cinetica:

$mc(T_f - T_i) = E_{k_i} - E_{k_f} = \frac{1}{2}\mu {v_o}^2 \qquad \Rightarrow \qquad {v_o}^2 = 2\frac{m}{\mu}c(T_f - T_i)$

b) Il modulo della velocità del sistema subito dopo l'urto sarà dato da (conservazione della quantità di moto):

$v = \frac{m}{m+M}v_o$

Dopo l'urto si conserva l'energia meccanica:

$(m+M)gh_{max} = \frac{1}{2}(m+M)v^2$

dove h_{max} è l'elevazione rispetto alla quota iniziale del bersaglio.