

# L'INTERAZIONE ELETTROMAGNETICA

## 1 Le equazioni d'onda relativistiche

L'applicazione del principio di corrispondenza:

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \mathbf{p} \rightarrow -i\hbar \nabla \quad (1)$$

alla relazione relativistica tra energia e impulso:

$$E^2 = \mathbf{p}^2 c^2 + m^2 c^4 \quad (2)$$

porta alla *equazione di Klein – Gordon*:

$$\nabla^2 \phi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \phi = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \phi \quad (3)$$

che e' la corrispondente relativistica della equazione di *Schrödinger*. Per il fotone, particella di massa nulla, questa equazione diventa l'equazione classica delle onde che, come sapete, si applica ai campi elettrico e magnetico e al quadripotenziale che ha per componenti il potenziale scalare ed il potenziale vettore:

$$A_\mu \equiv (V, \mathbf{A}) \quad (4)$$

le caratteristiche delle soluzioni, che conoscete dalla fisica classica, valgono dunque anche nel caso quantistico, purché si interpretino tali soluzioni come funzione d'onda. Esse possono essere scalari, come ad esempio per la corda vibrante, nel qual caso descrivono particelle di spin 0; o vettoriali, come per il fotone, e in questo caso descrivono particelle di spin 1. Ricordate tuttavia che nell'elettromagnetismo classico si trova che per il campo elettromagnetico sono possibili due sole direzioni indipendenti di polarizzazione nel piano perpendicolare alla direzione di propagazione e che ciò e' conseguenza del fatto che il fotone ha massa nulla. Nel caso generale di massa non nulla tutte e tre le direzioni indipendenti sono possibili e corrispondono, nel caso quantistico, alle tre proiezioni dello spin per una particella di spin 1. L'equazione di Klein-Gordon descrive dunque particelle di spin intero, che sono detti **bosoni** perché seguono la statistica di **Bose-Einstein**. E per le particelle di spin semi-intero, in particolare per l'elettrone?. Nel 1927 Paul Adrien Maurice Dirac, nel tentativo di risolvere un problema, che vedremo, inerente all'equazione di Klein-Gordon, tentò di scrivere un'equazione d'onda del tipo più semplice possibile, ossia del primo ordine e lineare nelle derivate spaziali e temporali:

$$i\hbar \gamma^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \psi = mc\psi \quad (5)$$

la richiesta che le soluzioni di questa equazione soddisfino anche la (3), ossia la relazione relativistica tra energia e impulso, porta alla conseguenza che i coefficienti  $\gamma^\mu$  non possono essere scalari, ma matrici  $4 \times 4$ ; di conseguenza le soluzioni sono matrici colonna a 4 elementi. In una trattazione più formale si vede che tali quantità, dette **spinori**, hanno proprietà di trasformazione diverse dalle quantità scalari e vettoriali che già conoscete. Un esempio di spinori lo avete già incontrato in meccanica quantistica non relativistica: sono le quantità  $\chi^\pm$  che si appiccicano alla funzione d'onda spaziale per descrivere i due stati di spin dell'elettrone. Senza fare il conto, vi do il risultato: per ogni valore fissato positivo  $E$  la (5) ha quattro soluzioni indipendenti, relative ai due valori di energia

$\pm E$  e a due orientazioni di spin. Le due orientazioni di spin sono le due possibili proiezioni di uno spin  $\frac{1}{2}$ . L'equazione di Dirac descrive dunque particelle di spin  $\frac{1}{2}$ . Particelle di spin semiintero sono dette **fermioni** perché obbediscono alla statistica di **Fermi-Dirac**.

La comparsa di stati di energia negativa si ha anche per l'equazione di Klein-Gordon (era il problema che Dirac cercava di risolvere). In una elaborazione successiva della teoria, *seconda quantizzazione*, fu possibile associare a tali stati le antiparticelle.

La scoperta della equazione di Dirac è stata, nella evoluzione della fisica, uno di quei momenti magici in cui vari fatti sperimentali (esistenza dello spin e delle antiparticelle) si ritrovano in una teoria come conseguenza della richiesta di semplicità e invarianza delle equazioni che descrivono la natura.

## 2 L'elettrodinamica quantistica e i diagrammi di Feynman

La densità lagrangiana dell'elettrodinamica quantistica si scrive:

$$\mathcal{L} = T(\psi) + T(A_\mu) + \mathcal{L}_{int} \quad (6)$$

i tre termini sono rispettivamente quello di energia cinetica per l'elettrone ed il fotone ed il termine d'interazione. La applicazione della equazione di Eulero-Lagrange ai termini di energia cinetica porta, variando rispetto a  $\psi$  e ad  $A_\mu$ , alle equazioni di Dirac ed a quella di Klein-Gordon scritta per  $A_\mu$ , che come sappiamo descrivono rispettivamente l'elettrone ed il fotone liberi. Per determinare l'espressione del termine d'interazione ricorriamo a ciò che già sappiamo dall'elettrodinamica classica. In tale teoria scriviamo la densità lagrangiana come:

$$\mathcal{L} = T(A_\mu) - j^\mu A_\mu \quad (7)$$

dove  $j^\mu$  è il quadrivettore che ha per componenti la densità di carica e di corrente; l'applicazione delle equazioni di Eulero-Lagrange, variando rispetto ad  $A_\mu$ , porta alle equazioni di Maxwell. Lo studio della equazione di Dirac mostra che la densità di carica-corrente è data da  $-e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi$  (troverete qualcosa di simile per l'equazione di *Schrödinger*). Quindi scriviamo il termine d'interazione quantistico:

$$\mathcal{L}_{int} = e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu \quad (8)$$

e la applicazione delle equazioni di Eulero-Lagrange alla lagrangiana completa porta alle equazioni di Dirac e Klein-Gordon col termine di interazione; scriviamo quella di Dirac:

$$i\hbar\gamma^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} - i\frac{e}{\hbar}A_\mu\right)\psi = mc\psi \quad (9)$$

da questa equazione si possono dedurre altri importanti fatti sperimentali: il termine di interazione spin-orbita e la relazione tra il momento magnetico e il momento angolare associati allo spin (per una particella di carica  $-e$ ):

$$\mathbf{M} = -g\frac{e}{2m}\mathbf{S} \quad (10)$$

l'equazione di Dirac prevede  $g = 2$  in questo caso e  $g = 1$  per la analoga relazione tra il momento angolare orbitale ed il momento magnetico ad esso associato. Il valore classico per il momento angolare orbitale è  $g = 1$  e ovviamente non c'è l'analogo per lo spin. Il valore misurato differisce da 2 di circa l'1%. Ritorniamo su questa discrepanza.

Riscriviamo l'equazione di Dirac per l'atomo di idrogeno: dobbiamo sostituire ad  $A_\mu$  il potenziale statico ( $A_0 = -\frac{e}{4\pi\epsilon_0 r}$ ,  $A_{1,2,3} = 0$ ); inoltre dividiamo per  $c$ :

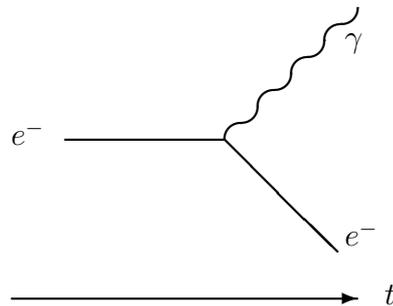
$$i\hbar\left(\gamma^\mu\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial x^\mu} + i\alpha\gamma_0\frac{1}{r}\right)\psi = m\psi \quad , \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \simeq \frac{1}{137} \quad (11)$$

la quantità adimensionale  $\alpha$  è detta storicamente *costante di struttura fine* perché determina la struttura fine dei livelli per interazione spin-orbita.

D'ora in avanti porremo  $\hbar = c = 1$  e utilizzeremo la costante di accoppiamento adimensionale nella lagrangiana d'interazione:

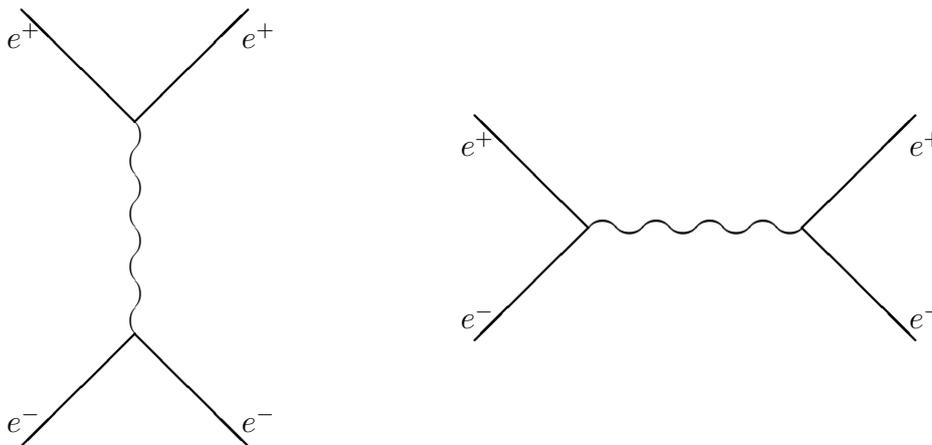
$$\mathcal{L}_{int} = \sqrt{\alpha} \bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu \quad (12)$$

Ora, salvo che in pochissimi casi, non riusciamo a trovare soluzioni esatte alle equazioni del moto, per cui si ricorre a sviluppi in serie (**sviluppo perturbativo**) delle soluzioni col termine d'interazione partendo da quelle di particella libera, senza termine d'interazione. Questo sviluppo in serie sarà fatto in potenze della costante adimensionale  $\sqrt{\alpha}$  per cui avremo termini in  $\alpha^{\frac{1}{2}}, \alpha, \alpha^{\frac{3}{2}} \dots$  per il primo, secondo, terzo ordine ... Per la convergenza di tale sviluppo è fondamentale il fatto che  $\alpha \ll 1$ . I vari termini dello sviluppo in serie possono essere rappresentati graficamente in una maniera molto suggestiva. Ad esempio il termine al primo ordine ha la rappresentazione seguente:



In questo diagramma riconosciamo un vertice d'interazione e tre linee di particella libera che vi convergono; esso corrisponde al processo fisico di emissione di un fotone da parte di un elettrone. Potete riconoscere nella espressione della (12) i termini che corrispondono agli elementi del diagramma: in  $\mathcal{L}_{int}$  c'è il prodotto tra due funzioni d'onda di elettrone e il campo del fotone, nel diagramma a ciascuno di questi termini corrisponde una linea che rappresenta un particella libera e che converge verso il (o parte dal) vertice d'interazione.

Tuttavia questo processo non è consentito dalla conservazione del quadriimpulso (a causa della massa nulla del fotone, esercizio!). I primi termini che rappresentano processi cinematicamente consentiti sono quelli del secondo ordine. A esempio i due diagrammi:



Sono del secondo ordine perché ciascun vertice contribuisce con un fattore  $\sqrt{\alpha}$  e sono tutti quelli

del secondo ordine che contribuiscono al processo di diffusione

$$e^- + e^+ \rightarrow e^- + e^+ \quad (13)$$

in questi diagrammi le linee di  $e^-$  e  $e^+$  che convergono verso il primo vertice rappresentano lo stato iniziale, quelle che escono dal secondo lo stato finale. La linea di fotone tra i due vertici rappresenta un fotone che **non puo' essere osservato**. Infatti se applichiamo la conservazione del quadriimpulso a ciascun vertice (esercizio!) troveremmo che la massa di tale fotone non puo' essere nulla. Questo e' molto facile da dimostrare per il secondo diagramma: il quadriimpulso del fotone intermedio e' uguale alla somma dei quadriimpulsi delle due particelle iniziali, quindi la sua massa deve essere uguale alla **massa invariante** del sistema costituito dalle due particelle iniziali (o finali); tale massa invariante e' definita da:

$$m_{12} = \sqrt{(E_1 + E_2)^2 - (\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)^2} \quad (c = 1) \quad (14)$$

ora, poiche'  $E_i = \sqrt{\mathbf{p}_i^2 + m_i^2}$  si deve avere:

$$m_\gamma = m_{12} \geq m_1 + m_2 \quad (15)$$

in questo senso diciamo che la linea intermedia rappresenta un **particella virtuale**. Fatta questa non secondaria premessa, possiamo dire che l'interazione elettromagnetica consiste nello scambio di uno o piu' fotoni fra le particelle che interagiscono. Questa e' la descrizione a parole che diamo dello sviluppo perturbativo sulla lagrangiana d'interazione (12), ma questo non vuol dire che potremmo interrompere il processo di scambio con un rivelatore e osservare il fotone dopo che e' stato emesso ad un vertice e prima che sia assorbito dall'altro.

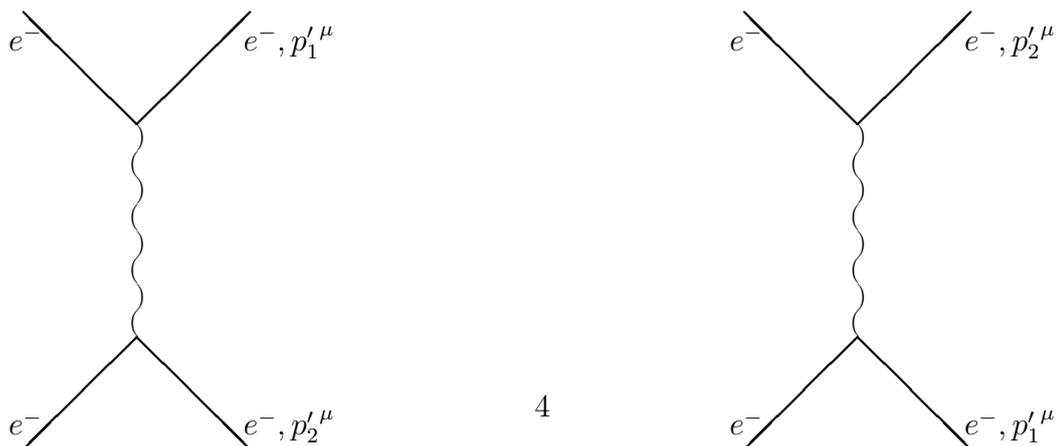
Nella figura precedente il primo diagramma si chiama di **scambio** (fra elettrone e positrone viene scambiato un fotone), il secondo di **annichilazione** (l'elettrone ed il positrone si annichilano in un fotone, che poi produce la coppia elettrone=positrone nello stato finale).

I diagrammi che abbiamo disegnato si chiamano **diagrammi di Feynman**; una volta individuati tutti i diagrammi che contribuiscono ad un dato processo la teoria delle perturbazioni fornisce le **regole di Feynman** che permettono di scrivere, a partire da tali diagramma, la probabilita' di transizione per il processo considerato e quindi la sezione d'urto.

I diagrammi vanno individuati considerando tutte le possibili combinazioni del vertice fondamentale che conservano, fra stato iniziale e finale ed anche ad ogni vertice, il quadriimpulso, il momento angolare e la carica elettrica. Ad esempio per il processo:

$$e^- + e^- \rightarrow e^- + e^- \quad (16)$$

e' possibile il diagramma di scambio ma non quello di annichilazione, per il quale la carica elettrica non sarebbe conservata. E' inoltre possibile un diagramma in cui, essendo i due elettroni particelle identiche, nello stato finale i quadriimpulsi delle due particelle finali sono scambiati tra loro:

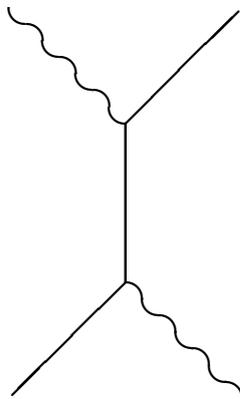


Secondo le regole di Feynman ad ogni diagramma si associa una **ampiezza di transizione** alla quale ciascun elemento del diagramma (linee esterne, linee interne, vertici) contribuisce con un fattore; si sommano poi fino ad un certo ordine perturbativo tutte le ampiezze di transizione relative allo stesso processo e dopo un'integrazione e una quadratura si ottiene la **probabilità di transizione** che, moltiplicata per alcuni fattori cinematici, dà la sezione d'urto del processo. In particolare ciascun vertice contribuisce con un fattore proporzionale a  $\sqrt{\alpha}$ , quindi ad  $e$ . Considerato che i diagrammi del secondo ordine contengono due vertici, avremo che la sezione d'urto, all'ordine perturbativo più basso, è proporzionale a  $e^4$  (ampiezza di transizione proporzionale a  $e^2$ , probabilità di transizione proporzionale a  $e^4$ ). Ricordate la dipendenza dalla carica elettrica della sezione d'urto di Rutherford.

### 3 Alcuni processi elettromagnetici e i loro diagrammi di Feynman

- **Diffusione Compton**

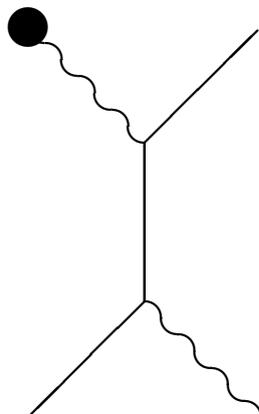
$$\gamma + e^- \rightarrow \gamma + e^- \quad (17)$$



questa volta la linea interna rappresenta un elettrone virtuale, cioè di massa diversa da quella fisica.

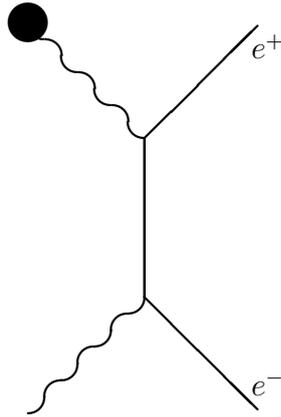
- **Bremsstrahlung**

Il Bremsstrahlung consiste nell'emissione di un fotone da parte di una particella carica per interazione con un campo, per esempio quello di un nucleo o quello degli elettroni di un atomo. L'interazione avviene sempre per scambio di un fotone:



il diagramma è simile a quello della diffusione Compton, ma il fotone nello stato iniziale è virtuale in questo caso, reale (particella libera) nel caso del Compton.

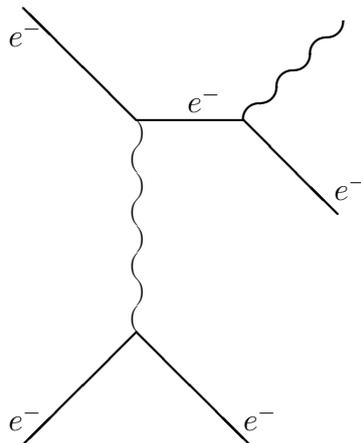
- Produzione di una coppia  $e^+e^-$  per interazione di un fotone con un campo esterno



La linea interna puo' essere sia un elettrone che va dal vertice in alto a quello in basso che un positrone che va nel verso opposto.

- Produzione di un fotone

$$e^- + e^- \rightarrow e^- + e^- + \gamma \quad (18)$$

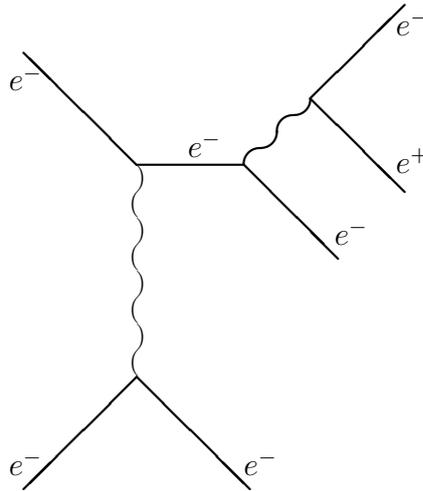


questo e' del terzo ordine (tre vertici). Provate a disegnare tutti i diagrammi del terzo ordine che contribuiscono a questo processo, tenendo presente che il fotone puo' essere emesso anche dagli elettroni entranti, mentre nel diagramma in figura e' emesso da uno di quelli uscenti.

• Produzione di una coppia  $e^+e^-$

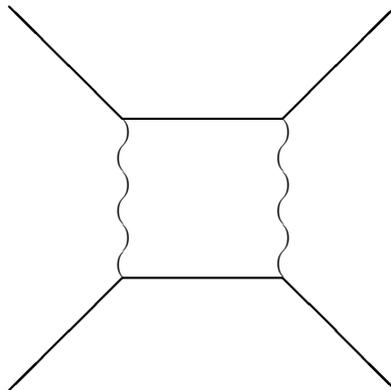
$$e^- + e^- \rightarrow e^- + e^- + e^+ + e^-$$

(19)



questo è un diagramma del quarto ordine; a questo diagramma vanno aggiunti gli altri tre in cui il vertice  $\gamma e^+e^-$  si trova su una delle altre particelle, anche quelle entranti.

• Diffusione  $e^+e^- \rightarrow e^+e^-$  al quarto ordine



questo è uno dei diagrammi che contribuiscono agli ordini successivi dello sviluppo perturbativo per questo processo.

## 4 Gli elettroni pesanti

L'osservazione dei prodotti di interazioni tra raggi cosmici e atmosfera o tra particelle agli acceleratori ha mostrato che esistono altre particelle che hanno le stesse caratteristiche dell'elettrone, ossia hanno la stessa carica dell'elettrone, interagiscono per interazione elettromagnetica e debole (e ovviamente anche gravitazionale) e non per interazione forte, e sono puntiformi, nel senso che non c'è nessuna evidenza di una loro struttura interna. Non le osserviamo nella materia ordinaria perché hanno tempi di vita molto brevi:

$$\mu^\pm, \quad m \simeq 106MeV, \quad \tau \simeq 2\mu s \quad (20)$$

$$\tau^\pm, \quad m \simeq 1777 MeV, \quad \tau \simeq 3 \cdot 10^{-13} s \quad (21)$$

mentre, come sapete, l'elettrone e' stabile ed ha una massa di circa  $0.5 MeV$ .

Questi sono i principali modi di decadimento del  $\mu^-$  e della sua antiparticella  $\mu^+$ :

$$\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\mu \quad (22)$$

$$\mu^+ \rightarrow e^+ + \nu_e + \bar{\nu}_\mu \quad (23)$$

gli analoghi modi del  $\tau^-$  sono i seguenti:

$$\tau^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \nu_\tau \quad (24)$$

$$\tau^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu + \nu_\tau \quad (25)$$

ed analogamente per il  $\tau^+$ ; tuttavia per il  $\tau^\pm$  i modi principali coinvolgono adroni, dei quali parleremo in seguito. Tutti questi decadimenti procedono per interazione debole (neutrini nello stato finale), mentre non si osservano decadimenti elettromagnetici fra queste particelle come ad esempio:

$$\mu^\pm \rightarrow e^\pm + \gamma, \quad \tau^\pm \rightarrow \mu^\pm + \gamma \quad \text{NO!} \quad (26)$$

che sarebbero consentiti dalla conservazione del quadriimpulso e della carica elettrica. Ne' si osserva l'annichilazione, ad esempio, di un  $\mu^-$  con un positrone. In una situazione di questo tipo (se ne presentano molte altre in fisica delle alte energie) la spiegazione che diamo e' che ci deve essere qualche legge di conservazione che vieta questi processi.

Tutte queste osservazioni e molte altre nelle interazioni deboli sono coerenti con (o se volete spiegate da) l'esistenza di un **numero quantico leptonic** che ha tre variete',  $\ell_e, \ell_\mu, \ell_\tau$ . Agli elettroni ed ai neutrini assegnamo i seguenti valori di questi tre numeri quantici:

	$\ell_e$	$\ell_\mu$	$\ell_\tau$
$e^-, \nu_e$	1	0	0
$e^+, \bar{\nu}_e$	-1	0	0
$\mu^-, \nu_\mu$	0	1	0
$\mu^+, \bar{\nu}_\mu$	0	-1	0
$\tau^-, \nu_\tau$	0	0	1
$\tau^+, \bar{\nu}_\tau$	0	0	-1

ed a tutte le altre particelle assegnamo zero. Questi tre numeri quantici sono additivi, ossia per un sistema di particelle sommiamo i tre numeri quantici di ciascuna componente. In una reazione si devono conservare  $\ell_e, \ell_\mu, \ell_\tau$  tra stato iniziale e finale. Ad esempio la reazione:

$$e^- + \mu^+ \rightarrow e^- + \mu^+ + \tau^- + \tau^+ \quad (27)$$

ha  $\ell_e, \ell_\mu, \ell_\tau = 1, -1, 0$  nello stato iniziale e finale e quindi e' consentita. Invece per la reazione:

$$e^- + \mu^+ \rightarrow e^- + \mu^+ + \mu^- + \tau^+ \quad \text{NO!} \quad (28)$$

$\ell_\mu$  ed  $\ell_\tau$  non sono conservati.

L'evidenza piu' stringente che anche i neutrini devono avere numeri leptonici diversi da zero e che esistono effettivamente tre tipi di neutrino viene dalle interazioni deboli: un antineutrino che venga prodotto in un decadimento in associazione con un muone, ad esempio:

$$\pi^- \rightarrow \mu^- + \bar{\nu}_\mu \quad (29)$$

interagendo successivamente potrà produrre solamente un  $\mu^+$ , ad esempio nella reazione:

$$\bar{\nu}_\mu + p \rightarrow \mu^+ + n \quad (30)$$

e non, ad esempio, un positrone o, in una reazione diversa, un  $\mu^-$ . Quale potrebbe essere questa ipotetica reazione ?.

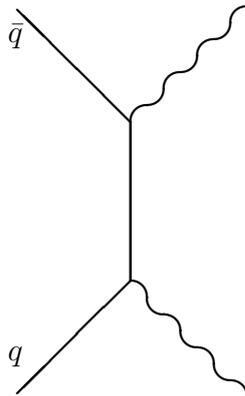
L'elettrone, il  $\mu$ , il  $\tau$  ed i relativi neutrini vengono chiamati **leptoni** perché storicamente, al tempo in cui si conoscevano solo l'elettrone ed il muone, erano i fermioni più leggeri; con il  $\tau$  la scala di massa si sovrappone a quella delle altre particelle e chiamiamo leptoni i fermioni che non hanno interazione forte.

## 5 I decadimenti elettromagnetici

Ovviamente le emissioni di un fotone nelle transizioni atomiche e nei decadimenti nucleari sono decadimenti elettromagnetici (ma, lo vedremo quando parleremo delle interazioni deboli, non completamente). Il principale decadimento elettromagnetico di particelle elementari è il seguente:

$$\pi_0 \rightarrow \gamma + \gamma \quad , \quad \tau \simeq 10^{-16} s \quad (31)$$

e lo descriviamo considerando la composizione del  $\pi_0$ : la coppia di quark-antiquark nel  $\pi_0$  si annichila producendo una coppia di fotoni:



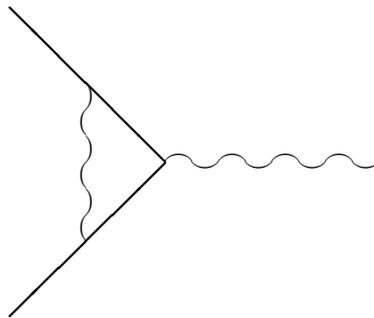
qui però non potremmo applicare semplicemente le regole di Feynman, perché lo stato iniziale non è costituito da particelle libere.

Altri decadimenti procedono per annichilazione di una coppia quark-antiquark in un fotone virtuale e successiva produzione di una coppia di leptoni:

$$J/\psi \rightarrow e^+ + e^- \quad (32)$$

## 6 Il momento magnetico del muone e dei nucleoni

Il diagramma:



costituisce una correzione di ordine superiore ai diagrammi di vertice utilizzati finora. Queste correzioni si applicano anche al calcolo del fattore giromagnetico  $g$  (10) del muone; la discrepanza tra il valore  $g = 2$  ed il valore misurato puo' essere calcolata con un errore relativo di  $\simeq 10^{-7}$ . Questa ed altre previsioni dell'elettrodinamica quantistica sono tra le previsioni teoriche piu' precise che abbiamo in fisica.

La verifica delle previsioni della elettrodinamica quantistica per  $g$  e per altre quantita' costituisce anche una dimostrazione, sempre nei limiti della precisione di queste verifiche, del fatto che i leptoni sono particelle puntiformi: infatti gli stati su cui la teoria e' basata (leptone, fotone, ...) sono stati di particelle libere prive di struttura interna.

Ben diversa e' la storia per i nucleoni: i valori di  $g$  misurati sono molto diversi da 2, a conferma del fatto che i nucleoni non sono particelle puntiformi. In particolare il neutrone ha momento magnetico non nullo: secondo la (10), avendo carica zero, dovrebbe avere momento magnetico nullo.