

# LE TEORIE DI GAUGE

## 1 L'invarianza di gauge e i mediatori delle interazioni

Come abbiamo visto, nell'elettrodinamica quantistica possiamo scrivere il termine d'interazione della lagrangiana partendo da quello dell'elettrodinamica classica,  $j^\mu A_\mu$ , e riscrivendo la quadridensità di carica-corrente in termini della funzione d'onda quantistica. Per le interazioni deboli e forti non abbiamo l'equivalente classico, perché le interazioni sono a corto range e non producono gli effetti macroscopici che porterebbero alla corrispondente interazione classica. D'altra parte, come abbiamo visto nel capitolo sull'interazione debole, una procedura 'costruttiva', che cerca di scrivere la lagrangiana d'interazione a partire dalle proprietà dei mediatori ricavate dai dati sperimentali, non porta ad una teoria corretta. In elettrodinamica tuttavia, esiste un'altra possibilità di arrivare alla lagrangiana d'interazione, che non utilizza l'analogia classica, ma l'invarianza di gauge. Partiamo dalla lagrangiana di una particella libera:

$$\mathcal{L} = i\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\mu\psi - m\bar{\psi}\psi \quad (1)$$

vediamo immediatamente che  $\mathcal{L}$  è invariante per trasformazioni **globali** di gauge:

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha}\psi \quad (2)$$

con  $\alpha$  reale e costante, mentre non lo è per trasformazioni **locali**:

$$\psi \rightarrow e^{i\alpha(x)}\psi \quad (3)$$

a causa della presenza della derivata in (1) ( $x$  è il quadrivettore tempo-posizione). E tuttavia possiamo aspettarci che questa invarianza sia verificata: i risultati fisici non devono dipendere dalla fase della funzione d'onda, quindi dobbiamo poter cambiare la fase in modo arbitrario e diverso per ogni punto dello spaziotempo (in effetti parliamo di trasformazioni di gauge, ma più correttamente si dovrebbe dire trasformazioni di fase). A questo punto appare la luce (il fotone): il modo più semplice per ripristinare l'invarianza della (1) consiste nell'introdurre un campo  $A_\mu$  mediante la sostituzione (detta appunto **sostituzione minimale**) della derivata parziale con:

$$\partial_\mu \rightarrow \partial_\mu - ieA_\mu \quad (4)$$

Questo campo si deve trasformare nel modo seguente:

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{1}{e}\partial_\mu\alpha(x) \quad (5)$$

$A_\mu$  è un quadrivettore, quindi rappresenta una particella di spin uno (riprendete il capitolo sulle interazioni elettromagnetiche: abbiamo considerato campi scalari, che rappresentano particelle di spin zero; spinoriali, di spin 1/2; vettoriali, di spin uno). Con la sostituzione minimale nella lagrangiana abbiamo il termine d'interazione che ci aspettiamo; aggiungiamo anche quello di energia cinetica per il campo vettoriale ed abbiamo la lagrangiana completa dell'elettrodinamica quantistica:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + e\bar{\psi}\gamma^\mu A_\mu\psi - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} \quad (F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \quad (6)$$

il primo termine è quello di energia cinetica dell'elettrone, il secondo quello di massa dell'elettrone, il terzo è il termine d'interazione, il quarto quello di energia cinetica del fotone.

Questa lagrangiana, lo potete verificare immediatamente, e' invariante per le trasformazioni di gauge (3) e (5). Un termine di massa del fotone,  $\sim m_\gamma^2 A_\mu A^\mu$ , cancellerebbe tale invarianza.

L'invarianza di gauge puo' dunque essere la guida per determinare l'espressione della lagrangiana e le caratteristiche del mediatore (infatti e' la struttura della lagrangiana (1) che richiede l'introduzione di un campo vettoriale e quindi di un mediatore di spin uno). Ma non solo: in una teoria invariante di gauge gli infiniti che compaiono in alcuni termini dello sviluppo perturbativo possono essere trattati in modo da ottenere termini finiti a tutti gli ordini.

A questo punto siamo pronti per utilizzare l'invarianza di gauge per determinare la lagrangiana delle interazioni forti e deboli: non si tratta di seguire esattamente la stessa strada, perche' arriveremmo nuovamente all'elettrodinamica, ma di individuare una trasformazione di gauge diversa da (3). Inoltre resta il problema della massa: il gluone ha massa zero, ma i mediatori dell'interazione debole no, per cui il problema e' come costruire una lagrangiana che resta invariante di gauge nonostante le masse non nulle.

Come sapete, ad ogni invarianza della lagrangiana corrisponde una quantita' conservata: per l'invarianza di gauge tale quantita' e' la carica elettrica.

## 2 L'operatore di rotazione nello spazio

Come si trasforma la funzione d'onda sotto una rotazione del sistema di coordinate?. Ve lo dimostro esplicitamente nel caso di una rotazione di un angolo  $\theta$  intorno all'asse  $z$ . Le coordinate si trasformano in questo modo:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (7)$$

e per angoli piccoli:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \delta\theta & 0 \\ -\delta\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (8)$$

quindi:

$$\begin{aligned} x' &= x + \delta\theta \cdot y \\ y' &= -\delta\theta \cdot x + y \\ z' &= z \end{aligned} \quad (9)$$

sviluppiamo ora  $\psi(x', y', z')$  in serie di Taylor intorno a  $x, y, z$ :

$$\begin{aligned} \psi(x', y', z') &= \psi(x, y, z) + \delta\theta \cdot y \cdot \frac{\partial}{\partial x} \psi(x, y, z) - \delta\theta \cdot x \cdot \frac{\partial}{\partial y} \psi(x, y, z) \\ &= \left(1 - \frac{i}{\hbar} \delta\theta J_z\right) \psi(x, y, z) \end{aligned} \quad (10)$$

quindi l'operatore di rotazione infinitesima  $R_z(\delta\theta)$  e' dato da:

$$R_z(\delta\theta) = 1 - \frac{i}{\hbar} \delta\theta J_z \quad (11)$$

Per una rotazione finita di un angolo  $\theta$ , suddividiamo l'angolo in  $n$  parti uguali  $\delta\theta$ ; l'operatore di rotazione complessiva sara'  $R_z^n(\delta\theta)$ ; facciamo poi tendere  $n$  a infinito:

$$R_z(\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} R_z^n(\delta\theta) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{i}{\hbar} \delta\theta J_z\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{i}{\hbar} \frac{\theta}{n} J_z\right)^n = e^{-\frac{i}{\hbar} \theta J_z} \quad (12)$$

L'operatore di rotazione intorno ad un asse il cui versore e'  $\hat{n}$  e' invece dato da:

$$R_{\hat{n}}(\theta) = e^{-\frac{i}{\hbar} \theta \mathbf{J} \cdot \hat{n}} \quad (13)$$

Una generica rotazione nello spazio ha invece tre gradi di liberta'. Per convincervene pensate alla posizione dell'asse  $z'$  rispetto all'asse  $z$ , che e' individuata da due angoli  $\theta$  e  $\phi$ ; fissati questi due angoli c'e' un ulteriore grado di liberta' di rotazione intorno all'asse  $z'$ . In realta', per come ve l'ho descritto, il movimento che porta  $z$  in  $z'$  non e' ben definito, perche' non precisa come si muovono gli altri assi. Senza entrare nei dettagli, possiamo definire la rotazione generica come la successione di tre rotazioni intorno a tre diversi assi di tre angoli diversi (**angoli di Eulero**). L'operatore di rotazione generico avra' un'espressione simile alla (13) e coinvolge i tre angoli di Eulero.

Vi ho presentato questi calcoli espliciti per mostrarvi come il momento angolare entra nell'operatore di rotazione. In realta' siamo interessati alla trasformazione non delle funzioni d'onda ad una componente, ma degli spinori. Gli operatori relativi sono simili a (13).

### 3 La rotazione degli spinori

Riprendiamo la simmetria di isospin tra protone e neutrone. Potremmo esprimere la simmetria tra protone e neutrone dal punto di vista delle interazioni forti considerando un generico stato che sia una mistura di neutrone e protone:

$$|\psi\rangle = \alpha|n\rangle + \beta|p\rangle \quad \alpha^2 + \beta^2 = 1 \quad (14)$$

e richiedendo che l'interazione sia invariante sotto una trasformazione che cambi le frazioni di protone e neutrone contenute in tale stato.

Come scriviamo questa trasformazione? come avete gia' visto nel caso dello spin, gli stati  $|n\rangle$  e  $|p\rangle$  possono essere rappresentati da due spinori:

$$|n\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad |p\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

quindi:

$$|\psi\rangle = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \alpha \end{pmatrix} \quad (16)$$

La trasformazione  $\hat{U}$  che agisce su questo stato deve conservare la norma, quindi deve essere unitaria; sappiamo poi che un operatore unitario si puo' sempre esprimere in termini di un operatore hermitiano  $\hat{A}$ :

$$\hat{U} = e^{i\hat{A}} \quad (17)$$

$\hat{U}$  deve agire sulla rappresentazione matriciale (16) degli stati  $|\psi\rangle$ , quindi  $\hat{U}$  ed  $\hat{A}$  devono essere matrici  $2 \times 2$ .  $\hat{A}$  e' dunque una matrice  $2 \times 2$  hermitiana e a traccia nulla (ve lo dimostro alla fine del paragrafo). Il numero di parametri reali indipendenti che compaiono in  $\hat{A}$  e' pari al numero di gradi di liberta' della trasformazione. Contiamoli: i due elementi diagonali sono reali, quindi abbiamo 2 parametri liberi, quelli non diagonali sono l'uno complesso coniugato dell'altro, quindi la parte reale e quella immaginaria di uno dei due danno altri due parametri. Abbiamo quindi quattro parametri liberi in tutto, che si riducono a tre con la condizione di traccia nulla. In definitiva i parametri liberi sono tre. Se prendiamo tre matrici hermitiane e a traccia nulla indipendenti tra loro,  $\sigma_i$ , possiamo scrivere la trasformazione generale in termini di queste matrici e di tre parametri liberi  $\alpha_i$ :

$$\hat{U} = e^{i\alpha_i\sigma_i} \quad i = 1, \dots, 3 \quad (18)$$

dove sottintendiamo la somma sugli indici ripetuti. Una possibile scelta per le matrici  $\sigma_i$  e' costituita dalle matrici di Pauli. La (18) e' la trasformazione globale sotto la quale vogliamo che sia invariante l'interazione. Possiamo fare un passo ulteriore e richiedere che la trasformazione sia diversa punto per punto dello spazio-tempo, e allora la trasformazione diventa locale:

$$\hat{U} = e^{i\alpha_i(x)\sigma_i} \quad i = 1, \dots, 3 \quad (19)$$

notate l'analogia tra (13) e (19). Tutto cio' viene unificato, come vi ho gia' detto altre volte, con la teoria dei gruppi di simmetria.

Tuttavia non e' la simmetria tra protone e neutrone che viene utilizzata per scrivere la lagrangiana delle interazioni forti, perche' come sappiamo bisogna considerare le particelle fondamentali che sono i quark. Invece una simmetria di questo tipo, che agisce sui doppietti di leptoni e di quark viene utilizzata per le interazioni elettrodeboli.

Perche' le matrici  $\hat{A}$  devono essere a traccia nulla?. Se consideriamo una generica matrice hermitiana a traccia non nulla, possiamo sempre scriverla come somma di una matrice diagonale con gli elementi uguali fra loro e di una a traccia nulla:

$$A = \begin{pmatrix} a & c^* \\ c & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} & 0 \\ 0 & \frac{a+b}{2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{a-b}{2} & c^* \\ c & \frac{b-a}{2} \end{pmatrix} \equiv C + A' \quad (20)$$

l'applicazione di  $e^{iC}$  corrisponde solo ad un cambiamento di fase uguale per le due componenti:

$$e^{iC} = \begin{pmatrix} e^{i\alpha} & 0 \\ 0 & e^{i\alpha} \end{pmatrix} \quad \alpha = \frac{a+b}{2} \quad (21)$$

che quindi non produce un rimescolamento delle due componenti; o, se preferite, corrisponde alla stessa simmetria di gauge utilizzata per l'elettrodinamica. Quindi la piu' generale trasformazione che mescola le componenti e' quella determinata dalla matrice  $A'$ .

#### 4 La lagrangiana dell'interazione forte: quanti sono i gluoni?

La lagrangiana da cui partiamo e' quella dei quark liberi, cioe' la (1), ma con un termine per ogni quark e per ogni colore. In vista della trasformazione che vogliamo applicare raggruppiamo sotto forma matriciale i tre termini relativi ai tre colori dello stesso quark; ossia per ogni sapore dei quark  $q_j$  raggruppiamo i tre colori nella matrice:

$$Q_j = \begin{pmatrix} q_{jr} \\ q_{jg} \\ q_{jb} \end{pmatrix} \quad (22)$$

e scriviamo la lagrangiana (sottintendendo una somma su tutti i sapori, cioe' sull'indice  $j$ ):

$$\mathcal{L} = i\bar{Q}_j\gamma^\mu\partial_\mu Q_j - m_j\bar{Q}_j Q_j \quad (23)$$

Questa lagrangiana non 'mescola' i colori, ossia ogni colore e' moltiplicato solo per se stesso: come abbiamo detto, e' solo la lagrangiana di sei quark, e tre colori per ciascun quark, liberi, non interagenti fra loro. La simmetria che vogliamo introdurre e' quella fra i colori, ossia richiediamo che l'interazione sia invariante per 'rimescolamento' dei colori tra loro; in effetti non c'e' nessuna evidenza che i diversi colori abbiano un ruolo diverso nell'interazione forte. La trasformazione e' esattamente la stessa che abbiamo considerato per l'isospin, salvo per il fatto che le matrici sono questa volta  $3 \times 3$ ; se ripetete il conto troverete che questa trasformazione deve avere 8 parametri indipendenti; l'operatore corrispondente e':

$$\hat{U} = e^{i\alpha_i(x)T_i} \quad i = 1, \dots, 8 \quad (24)$$

dove le  $T_i$  sono otto matrici  $3 \times 3$ , analogo delle matrici di Pauli.

Seguendo la strada gia' tracciata per l'elettrodinamica richiediamo che la lagrangiana sia invariante sotto questa trasformazione locale; in luogo del fotone questa volta dovremo introdurre otto campi  $G_\mu^i$ , uno per ciascun  $\alpha_i$ . Sono i campi degli otto gluoni mediatori dell'interazione forte. L'algebra e' piu' elaborata che nell'elettrodinamica, ma la procedura e' esattamente la stessa. La lagrangiana invariante a cui si arriva e' la seguente:

$$\mathcal{L} = \bar{Q}_j(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_j)Q_j - g\bar{Q}_j\gamma^\mu T_i Q_j G_\mu^i - \frac{1}{4}G_{\mu\nu}^i G_i^{\mu\nu} \quad (25)$$

dove:

$$G_{\mu\nu}^i = \partial_\mu G_\nu^i - \partial_\nu G_\mu^i - g f_{kl}^i G_\mu^k G_\nu^l \quad (26)$$

(confrontate con l'espressione corrispondente di  $F_{\mu\nu}$  per l'elettrodinamica).  $g$  e' la costante di accoppiamento ed  $f_{kl}^i$  sono costanti che entrano nelle regole di commutazione delle matrici  $T_i$ .

I primi due termini di  $\mathcal{L}$  sono quelli di energia cinetica e massa dei quark.

Il terzo quello di interazione quark-gluone; e' il termine che produce i diagrammi fondamentali che abbiamo gia' considerato nel capitolo sulle interazioni forti. Sviluppando i prodotti matriciali si vede che compaiono prodotti del tipo  $\bar{q}_{jc} \gamma^\mu q_{jc'} G_\mu^i$ , dove  $c$  e  $c'$  sono colori uguali o diversi. Come vi ho gia' detto, il gluone accoppia dunque quark dello stesso sapore e di colore uguale o diverso. In questa esposizione ipersemplificata non appare chiaro, ma la teoria dei gruppi fa vedere che gli otto gluoni costituiscono un ottetto di colore-anticolore esattamente (con la stessa matematica) come i mesoni costituiscono ottetti di quark-antiquark.

L'ultimo termine e' diverso da quello dell'elettrodinamica: oltre ai termini di energia cinetica del gluone, uguali a quelli dell'elettrodinamica, contiene anche prodotti di tre e di quattro campi gluonici moltiplicati per la costante di accoppiamento: questi sono termini d'interazione e corrispondono a vertici di interazione di soli gluoni, a tre e a quattro gluoni. Questi termini non hanno il corrispondente in elettrodinamica. Poiche' e' basata sugli scambi di gluoni tra stati di colore, questa teoria e' stata denominata  **Cromodinamica quantistica (QCD)**.

## 5 L'interazione elettrodebole

Come abbiamo visto, l'esistenza dello  $Z^0$  che contribuisce agli stessi processi cui contribuisce il fotone rende le interazioni elettromagnetiche e deboli interconnesse tra loro. Il piu' grande successo della seconda meta' del secolo scorso e' stato l'essere arrivati ad una descrizione unificata (con un'unica lagrangiana) delle due interazioni, un primo passo verso l'unificazione di tutte le interazioni fondamentali. I dettagli matematici sono ancora piu' elaborati che nelle interazioni forti, per cui vi descrivo solo il punto di partenza ed i risultati:

i leptoni ed i quark vengono raggruppati in doppietti e singoletti:

$$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e^- \end{pmatrix}_L \quad e_R^- \quad \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \quad u_R \quad d_R \quad (27)$$

ed analogamente per gli altri leptoni e quark. Gli indici  $L$  ed  $R$  indicano le componenti left-handed e right-handed (vi ricordo che alle interazioni deboli partecipano solo le componenti left-handed).

La simmetria che si ipotizza e' una simmetria di fase come in elettrodinamica combinata con una simmetria di isospin (**isospin debole**) per i doppietti. Il risultato sono i diagrammi fondamentali dell'elettrodinamica e delle interazioni deboli che abbiamo gia' studiato.

Ma c'e' un problema, come vi ho detto nel capitolo sulle interazioni deboli: la massa non nulla dei mediatori deboli sembra cancellare l'invarianza di gauge. Il grande successo della teoria elettrodebole e' aver trovato un meccanismo che ripristina l'invarianza di gauge, con l'introduzione nella lagrangiana di una nuova particella: il  **bosone di Higgs**. La predizione dell'esistenza di tale particella e' la sfida lanciata dal vecchio secolo al nuovo: l'acceleratore *LHC* in costruzione attualmente a Ginevra ha come primo obiettivo l'osservazione di questa particella.