

# LA MASSA E L'ENERGIA DI LEGAME DEI NUCLEI

## 1 La massa di uno stato legato

Quale e' la massa dell'atomo di idrogeno ? consideriamo un atomo nel suo stato fondamentale a riposo; indicando con  $m_H$  la sua massa, l'energia sara' quella di riposo:

$$m_H c^2 \quad (1)$$

per separare il protone e l'elettrone e portarli a distanza infinita con velocita' nulla dobbiamo fornire al sistema una certa energia che definiamo come **energia di legame**,  $E_L$  (la conoscete anche come **energia di ionizzazione**). Quando elettrone e protone sono a distanza infinita ed entrambi a riposo, l'energia totale del sistema e' la somma delle loro energie di riposo. La conservazione dell'energia tra il momento in cui forniamo l'energia  $E_L$  all'atomo e quello in cui i due componenti sono liberi all'infinito si scrive dunque nel modo seguente:

$$m_H c^2 + E_L = m_p c^2 + m_e c^2 \quad (2)$$

da cui:

$$m_H c^2 = m_p c^2 + m_e c^2 - E_L \quad (3)$$

ricordando che  $E_L$  e' una quantita' positiva, abbiamo il risultato che la massa di uno stato legato e' minore della somma delle masse dei suoi componenti liberi. Per il livello fondamentale dell'atomo di idrogeno,  $\sim -13.6 \text{ eV}$ , abbiamo  $E_L \simeq 13.6 \text{ eV}$  e:

$$m_H \simeq m_p + m_e - 13.6 \text{ eV}/c^2 \quad (4)$$

ricordando che la massa dell'elettrone e' di circa  $0.5 \text{ MeV}/c^2$  e che quella del protone e' circa duemila volte piu' grande, abbiamo che la differenza e' veramente piccola rispetto alle energie di riposo dei componenti. Diversa sara' la storia per i nuclei.

Per un atomo di idrogeno in uno stato eccitato,  $H^*$  l'energia di ionizzazione e' minore, quindi:

$$m_{H^*} > m_H \quad (5)$$

In questo paragrafo abbiamo introdotto la massa dell'atomo per partire da un esempio che vi e' familiare, mentre nel seguito considereremo solo le masse dei nuclei. Quindi d'ora in avanti per  $m_H$  intenderemo la massa del nucleo di idrogeno, cioe' del protone.

## 2 L'energia di legame dei nuclei

Come sapete l'interazione che tiene insieme neutroni e protoni nei nuclei e' l'interazione forte (quella elettromagnetica, repulsiva, tra i protoni e' una complicazione in piu' ma non puo' essere responsabile degli stati legati). Per questa interazione non abbiamo niente di simile a cio' che per l'interazione elettromagnetica e' il potenziale di Coulomb, per cui procediamo misurando certe quantita' che ci permettono di ricavarne alcune caratteristiche. Ad esempio la misura delle masse a riposo dei nuclei e il confronto con la somma delle masse dei componenti ci permette di calcolare l'energia di legame  $B(A, Z)$  di un nucleo contenente  $Z$  protoni e  $A - Z$  neutroni:

$$B(A, Z) = Z \cdot m_p c^2 + (A - Z) \cdot m_n c^2 - m_{(A,Z)} c^2 \quad (6)$$

dove  $m_{(A,Z)}$  e' la massa a riposo del nostro nucleo.

La figura (1) mostra l'andamento dell'energia di legame per nucleone,  $B/A$ , in funzione di  $A$  per nuclei stabili. L'elemento che ha la massima energia di legame per nucleone e' il  ${}^{56}_{26}\text{Fe}$  (usando la notazione  ${}^A_Z\text{X}$ ). Sara' per questo che il ferro e' relativamente poco costoso rispetto ad altri materiali? in effetti, fra gli elementi pesanti, e' anche il piu' abbondante nel sistema solare, figura (2), e anche oltre.

Notate ora la scala verticale:  $B/A$  varia abbastanza poco, tra 7.5 e 8.7 MeV per nucleone, al variare di  $A$ .

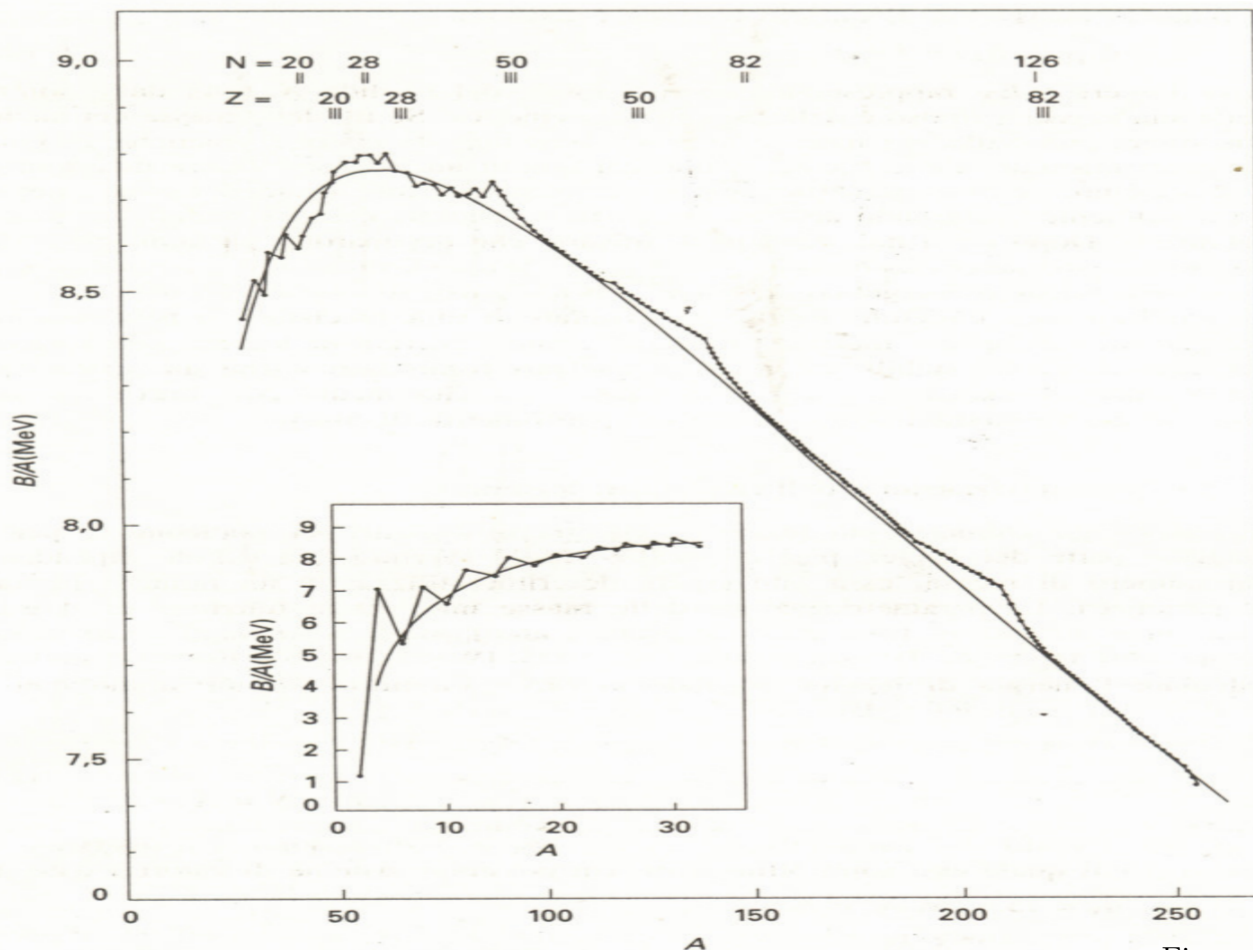


Figura 1:

Figura 2.4

Energia di legame per nucleone nei nuclei con numero di massa  $A$  pari. La linea continua corrisponde alla formula di massa di Weizsäcker (2.8). Nuclei con un basso numero di nucleoni mostrano deviazioni relativamente grandi dall'andamento generale e andrebbero discussi singolarmente. Anche nei nuclei più pesanti, in corrispondenza di particolari valori di  $Z$  e  $N$ , si possono osservare alcune deviazioni, generalmente indicanti la presenza di un legame più forte. Sono questi i cosiddetti "numeri magici" che verranno discussi nel par. 17.3.

Ipotizziamo inizialmente che  $B/A$  sia costante al variare di  $A$ ; questo andamento ci dice che l'interazione forte ha caratteristiche profondamente diverse da quelle delle interazioni gravitazionale ed elettromagnetica. Infatti per un sistema di  $A$  corpi tenuti in uno stato legato per interazione gravitazionale (o per un'ipotetica interazione coulombiana che sia attrattiva per cariche dello stesso segno) l'energia potenziale del sistema (che, cambiata di segno, e' proprio l'energia di legame) si scrive come somma di  $\frac{1}{2}A(A-1)$  termini, corrispondenti a tutte le possibili coppie di particelle. Quindi, per  $A$  sufficientemente grande, ci aspettiamo che l'energia di legame cresca con  $A^2$ .

La conferma quantitativa e' data dal calcolo dell'energia potenziale di una distribuzione sferica e uniforme di carica:

$$-\frac{3}{5} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R} \quad (7)$$

(metto il segno meno perche' sto ipotizzando l'interazione attrattiva) dove  $Q$  e' la carica totale ed  $R$  il raggio della sfera. Se la carica complessiva  $Q$  viene pensata come suddivisa in  $A$  cariche elementari, abbiamo che l'energia di legame e' proporzionale ad  $A^2$ .

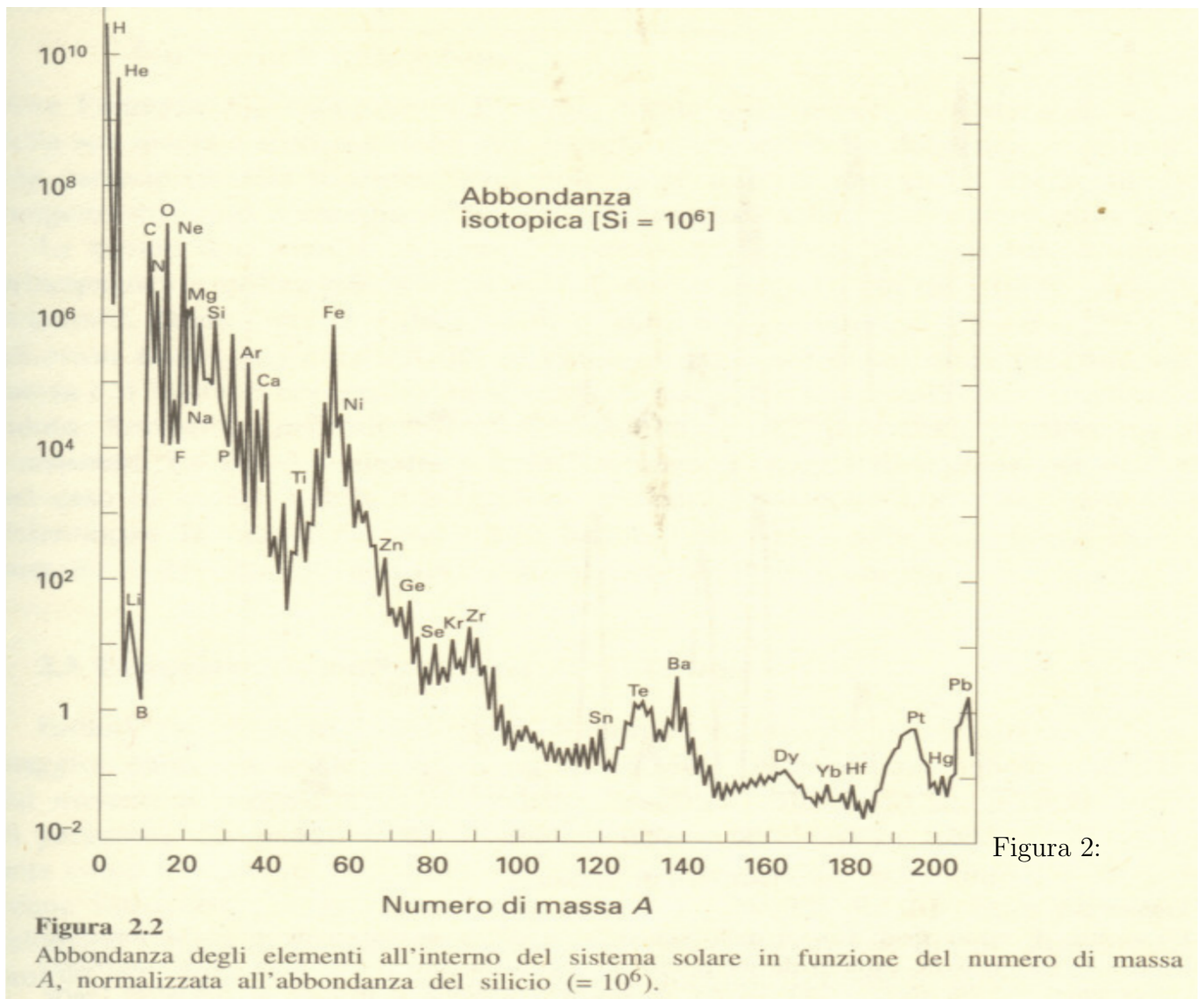


Figura 2:

Il diverso andamento, come  $A$ , dell'energia di legame nucleare puo' essere giustificato ipotizzando che la forza decresca molto rapidamente con la distanza, in modo tale che nella sommatoria per ogni particella vadano inseriti solo i termini relativi alle particelle ad essa immediatamente adiacenti (le chiamiamo *vicine*) e tutti gli altri siano trascurabili. Diremo che un'interazione di questo tipo e' a **corto range**, in contrapposizione a quella gravitazionale ed a quella elettromagnetica, che sono a **lungo range**. Daremo una giustificazione quantitativa a questa terminologia nel capitolo sulle interazioni forti, quando motiveremo il fatto che i potenziali che vanno come  $\frac{1}{r}$  sono a range infinito.

Come va l'energia di legame per un'interazione a corto range? ogni particella ha mediamente lo stesso numero di vicine, quindi il contributo all'energia totale e' uguale per tutte le particelle; sommiamo i contributi delle  $A$  particelle, dividiamo per due per contare ogni coppia una sola volta ed otteniamo l'andamento come  $A$ . Scriviamo un po' di formule; questa e' l'espressione generale dell'energia di legame (la seconda uguaglianza e' semplicemente un riarrangiamento dei termini della sommatoria, allo scopo di scrivere il contributo della particella  $i$ -esima):

$$B = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j=1,A \\ i \neq j}} E_p(r_{ij}) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1,A} b_i \quad ; \quad b_i = \sum_{\substack{j=1,A \\ j \neq i}} E_p(r_{ij}) \quad (8)$$

per esser chiari sulle assunzioni e sui segni: stiamo assumendo che la forza sia centrale e attrattiva in ogni punto dello spazio e che lo zero dell'energia potenziale sia all'infinito; in tal caso l'energia potenziale  $E_p$  e' sempre negativa e l'energia

di legame e' l'energia potenziale del sistema cambiata di segno.

Ora la nostra ipotesi di interazione a corto range comporta che:

$$b_i = \sum_{\{j\}} E_p(r_{ij}) \quad ; \quad \{j\} \equiv \begin{array}{l} \text{insieme delle particelle immediatamente} \\ \text{adiacenti alla particella } i\text{-esima} \end{array} \quad (9)$$

e che  $b_i$  sia indipendente da  $i$  e da  $A$ . Attenzione, questi sono i punti cruciali: sto dicendo che se ogni particella 'sente' solamente le sue immediate vicine allora ogni posizione e' equivalente alle altre (salvo le posizioni vicine alla superficie) e quindi  $b_i$  non dipende da  $i$ . Se poi ad un sistema di  $A$  particelle ne aggiungiamo un'altra, in qualunque posizione, questo produrra' un riarrangiamento locale delle particelle intorno alla nuova arrivata, ma quelle lontane non si accorgono del cambiamento; di qui l'indipendenza da  $A$ . In altri termini, la densita' di particelle per unita' di volume non puo', per un'interazione a corto range, dipendere da  $A$ . Riflettete a tutto questo e vi convincerete anche che questa densita' deve essere uniforme su tutto il volume del nucleo, salvo un effetto alla superficie. Queste caratteristiche le ritroviamo in un liquido, e infatti questa descrizione del nucleo si chiama **modello a goccia**.

Se avete difficolta' a seguire il ragionamento che ho fatto, potete partire direttamente dall'ipotesi di densita' uniforme ed indipendente da  $A$ . Da questo segue l'indipendenza di  $b_i$  da  $i$  e da  $A$ . Poi, con calma, convincetevi che la forza deve essere a corto range.

Diverso il discorso per un'interazione a lungo range: all'aumentare di  $A$  il sistema si compatta sempre piu' e la densita' aumenta. Le stelle (interazione gravitazionale) si formano cosi'.

Cio' detto la conseguenza e' immediata:

$$B = -\frac{1}{2} \sum_{i=1,A} b_i = -\frac{1}{2} Ab \quad ; \quad b \text{ indipendente da } A \quad (10)$$

Ora introduciamo gli effetti che abbiamo trascurato per arrivare alla (10):

- Effetto di superficie: i nucleoni che si trovano alla superficie del nucleo hanno meno vicini, quindi sono meno legati di quelli interni. La (10) ipotizza invece che tutti i nucleoni siano legati allo stesso modo. Dobbiamo dunque sottrarre un termine proporzionale alla superficie del nucleo. Se il nucleo ha densita' indipendente da  $A$  il suo volume deve essere proporzionale ad  $A$ :

$$V \sim A \quad (11)$$

e se la sua forma e' sferica, il suo raggio  $R$  puo' essere scritto in questo modo:

$$R = r_0 \cdot A^{\frac{1}{3}} \quad (12)$$

quindi alla (10) va sottratto un termine proporzionale ad  $A^{\frac{2}{3}}$ .

- Effetto coulombiano: la repulsione coulombiana tra i protoni diminuisce l'energia di legame dovuta all'interazione forte; supponendo i protoni uniformemente distribuiti dentro un nucleo sferico, possiamo applicare la (7) per calcolare l'energia potenziale elettrostatica. Essa e' proporzionale a  $\frac{Q^2}{R}$ , quindi a:

$$\frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} \quad (13)$$

In definitiva riscriviamo  $B$  nel modo seguente:

$$B = \underbrace{\alpha A}_{\text{termine di volume}} - \underbrace{\beta A^{\frac{2}{3}}}_{\text{termine di superficie}} - \underbrace{\epsilon \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}}}_{\text{termine coulombiano}} \quad (14)$$

dove tutte le costanti sono positive (ricordate che  $b$  nella (10) e' negativo). Dividendo per  $A$ :

$$\frac{B}{A} = \alpha - \beta \frac{1}{A^{\frac{1}{3}}} - \epsilon \frac{Z^2}{A^{\frac{4}{3}}} \quad (15)$$

A questi termini ne vanno aggiunti altri due che non sono spiegati dai ragionamenti fatti finora e discuteremo meglio più avanti:

$$\frac{B}{A} = \alpha - \beta \frac{1}{A^{\frac{1}{3}}} - \epsilon \frac{Z^2}{A^{\frac{2}{3}}} - \gamma \left(\frac{1}{2} - \frac{Z}{A}\right)^2 + \delta \frac{1}{A^{\frac{1}{2}}} \quad (16)$$

termine di volume
termine di superficie
termine coulombiano
termine di asimmetria
termine di accoppiamento

Il termine di asimmetria da conto del fatto che i nuclei con un uguale numero di protoni e neutroni sono, a parità di  $A$ , più stabili.

Il termine di accoppiamento viene inserito perché per  $A$  pari e per lo stesso valore di  $A$  i nuclei con  $Z$  ed  $N$  pari sono più stabili di quelli con  $Z$  ed  $N$  dispari.

La (16) è detta **formula semi-empirica di massa** o **formula di Weizsäcker**.

L'adattamento della (16) alle misure, con le costanti  $\alpha \dots \delta$  come parametri liberi, produce la curva continua mostrata in figura (1). Notiamo delle discrepanze a piccoli  $A$ , perché il nostro è evidentemente un modello statistico che non può descrivere il comportamento di poche particelle, ed a grandi  $A$ , intorno a particolari valori. Quest'ultimo è un effetto quantistico che prenderemo in esame quando parleremo del **modello a shell**. I valori numerici dei parametri risultanti dall'adattamento:

$$\alpha \simeq 16 \text{ MeV} \quad \beta \simeq 17 \text{ MeV} \quad \epsilon \simeq 0.7 \text{ MeV} \quad \gamma \simeq 94 \text{ MeV} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} \delta &\simeq 0 && \text{per } A \text{ dispari} \\ \delta &\simeq -12 \text{ MeV} && \text{per } A \text{ pari e } Z \text{ dispari} \\ \delta &\simeq +12 \text{ MeV} && \text{per } A \text{ pari e } Z \text{ pari} \end{aligned} \quad (18)$$

Il termine coulombiano può essere calcolato facilmente utilizzando la sola teoria elettromagnetica, ad esempio mediante la (7) cambiata di segno. Il confronto col valore di  $\epsilon$  indicato dai dati sperimentali permette di ricavare  $r_0$ :

$$r_0 \simeq 1.22 \text{ fm} \quad (19)$$

L'effetto dei singoli addendi della (16) è mostrato in figura (3). Le curve mostrano come decresce  $\frac{B}{A}$  all'aggiunta dei vari termini.

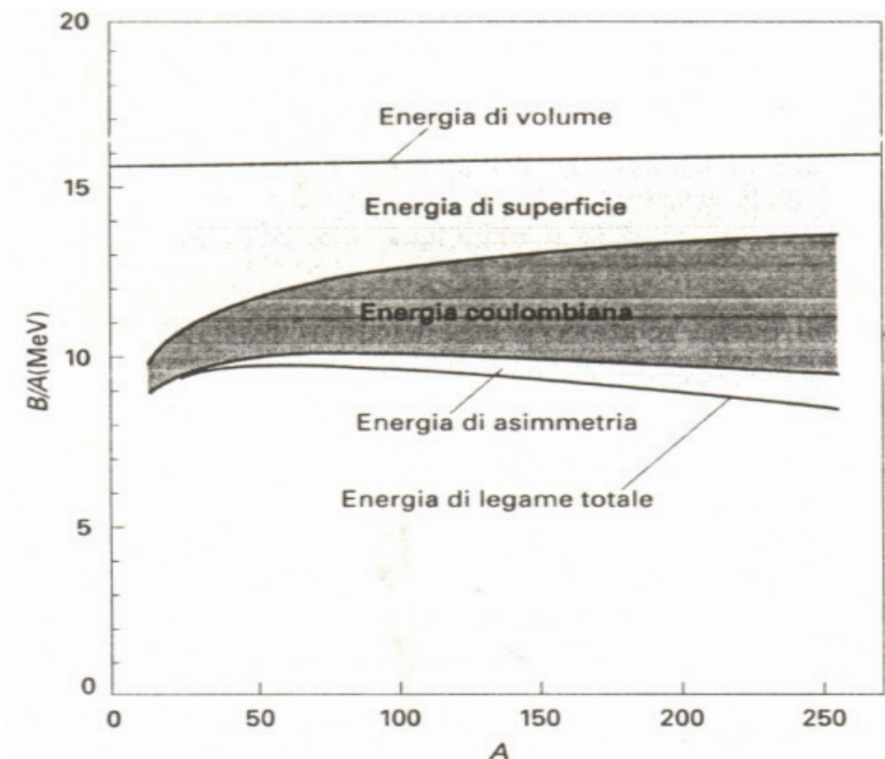


Figura 3: