MOMENTO MAGNETICO E ISOSPIN DEI NUCLEONI

1 Il momento magnetico dei nucleoni

Vedi capitolo sulle interazioni elettromagnetiche

2 Lo spin isotopico (isospin)

Le masse del protone e del neutrone sono molto vicine tra loro:

$$m_p = 938.272029 \pm 0.000080 \ \ MeV/c^2 \qquad m_n = 939.565360 \pm 0.000081 \ \ MeV/c^2 \qquad (1)$$

questo potrebbe far ipotizzare che esista una qualche simmetria tra queste due particelle; tale simmetria non potrebbe, evidentemente, essere esatta: una situazione che incontreremo altre volte.Come vedremo, la conclusione della nostra indagine sara' che, per la sola interazione forte, neutrone e protone si comportano in modo molto simile.
Per indagare questa possibilita' possiamo confrontare i livelli energetici di due nuclei che differiscono tra loro per lo scambio di un neutrone con un protone: nel nostro caso il ^7_3Li ed il ^7_4Be.

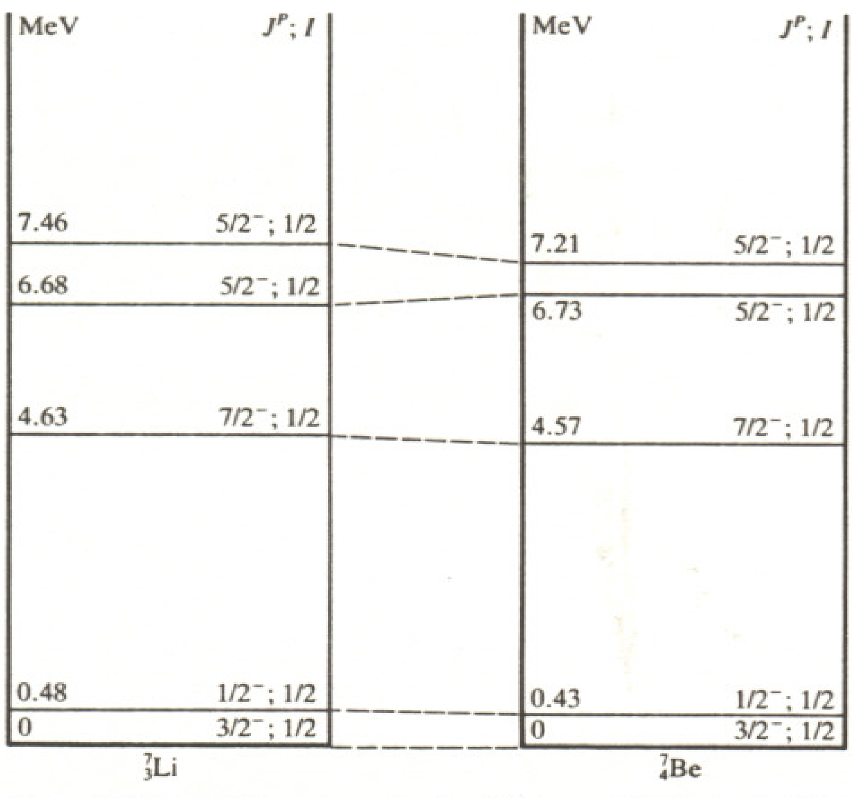

Figura 1:

Figure 3.9 Low-lying energy levels of the mass-7 isobaric doublet, showing correspondences. The notation follows that of figure 1.6. All excited states except the first are particle-unstable and some have large widths. (Data taken from Ajzenberg-Selove F 1979 'Energy levels of light nuclei $A = 5$–10' *Nucl Phys* **A320** (1).)

Ovviamente la carica elettrica costituisce una differenza sostanziale ed ineliminabile tra questi due nuclei. Correggiamo quindi i livelli misurati per gli effetti elettromagnetici: si tratta di fare un calcolo teorico della differenza dovuta alle cariche elettriche e di sottrarre ai dati sperimentali questa differenza; fatta questa correzione, i livelli ottenuti sono dovuti alla sola interazione forte. Gli schemi dei livelli risultano essere quelli mostrati in figura (1). Come vediamo, i due schemi sono molto simili tra loro: la sequenza e' la stessa e i valori numerici sono abbastanza vicini tra loro. D'ora in avanti trascureremo queste diferenze e quando parleremo di simmetrie intenderemo sempre simmetrie approssimate al livello che vediamo nella figura (1). Una prima deduzione e' che, per l'interazione forte, neutrone e protone si comportano in modo simile. Una affermazione piu' forte sarebbe che sono totalmente intercambiambili tra loro, ossia che l'interazione forte non distingue tra neutrone e protone. Ma non e' cosi', e lo vediamo confrontando i tre nuclei $^{14}_{6}C$, $^{14}_{7}N$ e $^{14}_{8}O$. Possiamo vedere questi tre nuclei come l'aggregazione di un sistema di tre neutroni e tre protoni comune a tutti con un sistema nn, np, pp per il C, l'N e l'O rispettivamente. Gli schemi dei livelli sono mostrati in figura (2).

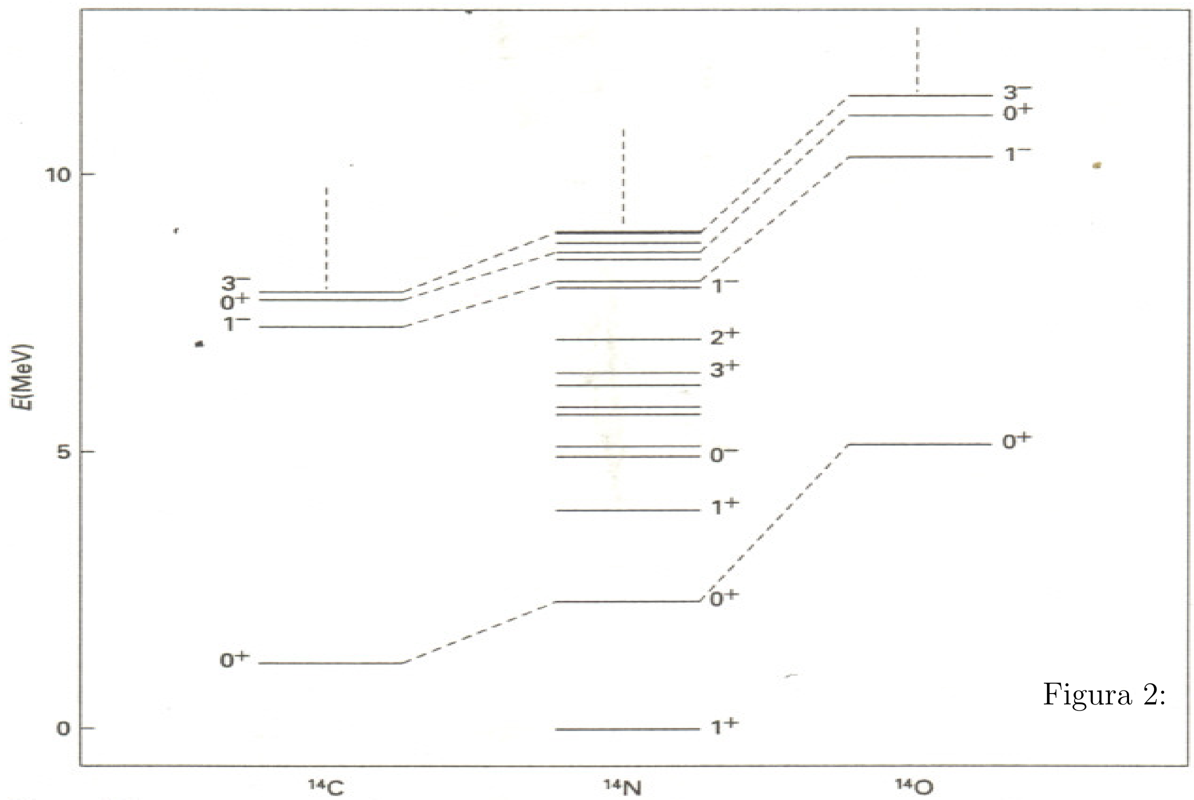

Figura 2:

Figura 2.6
I livelli di energia più bassa degli isobari più stabili con $A = 14$. Il momento angolare J e la parità P sono indicati per i livelli principali. Gli stati analoghi dei tre nuclidi sono uniti da linee tratteggiate. La scala di energia si riferisce al livello fondamentale del $^{14}_{7}N_{7}$.

In questo caso la correzione elettromagnetica non e' stata fatta ed i livelli che si corrispondono sono uniti dalle linee tratteggiate. Se la simmetria che stiamo cercando consistesse semplicemente in una totale intercambiabilita' tra neutrone e protone dovremmo osservare lo stesso schema di livelli nei tre casi. Invece osserviamo una situazione piu' complessa: il C e l'O hanno la stessa sequenza di livelli, l'N presenta la stessa sequenza piu' una sequenza aggiuntiva. E' una situazione che ricorda molto la composizione dei momenti angolari. Prima di continuare il discorso vi presento quindi brevemente alcuni risultati su tale argomento.

Dato l'operatore momento angolare, $\mathbf{J}$ di componenti J_x,J_y e J_z, esistono autostati comuni ai due operatori $\mathbf{J}^2$ e J_z con autovalori:

$$\mathbf{J}^2 \mid j,m >= \hbar^2 j(j+1) \mid j,m > \qquad J_z \mid j,m >= \hbar m \mid j,m > \tag{2}$$

con i possibili valori:

$$j = 0,..,+\infty \qquad -j \leq m \leq j \tag{3}$$

Potremmo ovviamente considerare J_x o J_y al posto di J_z ed ottenere lo stesso risultato. D'ora in avanti diremo che j ed m sono gli autovalori di $\mathbf{J}^2$ e J_z intendendo le (2).
Consideriamo ora due momenti angolari $\mathbf{J_1}$ e $\mathbf{J_2}$ e la loro somma $\mathbf{J} = \mathbf{J_1} + \mathbf{J_2}$; potrebbe essere il momento angolare totale di un sistema di due particelle di momenti $\mathbf{J_1}$ e $\mathbf{J_2}$ rispettivamente, oppure quello di una particella di momento angolare orbitale $\mathbf{J_1}$ e spin $\mathbf{J_2}$. Come scriviamo gli autovalori j, m del momento angolare totale in termini degli autovalori j_1, m_1, j_2, m_2 dei due momenti angolari $\mathbf{J_1}$ e $\mathbf{J_2}$? la risposta e' che j ed m possono assumere i seguenti valori:

$$|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2 \qquad m = m_1 + m_2 \tag{4}$$

Consideriamo ora piu' in dettaglio la somma di due spin 1/2: $\mathbf{J} = \mathbf{S_1} + \mathbf{S_2}$; secondo le (4) j puo' assumere i valori 0 ed 1. Possiamo dunque avere uno stato (**singoletto**) $\mid 0, 0>$ con $j = 0$ e tre stati (**tripletto**), $\mid 1, -1>, \mid 1, 0>, \mid 1, 1>$, con $j = 1$. Possiamo inoltre scrivere questi autostati in termini di quelli di $\mathbf{S_1}$ ed $\mathbf{S_2}$ nel modo seguente:

$$\begin{array}{rcl}
\textit{autostati di } \mathbf{J}^2 \textit{ e } J_z & & \textit{autostati di } \mathbf{S}_1^2, S_{1z}, \mathbf{S}_2^2, S_{2z} \\
\textit{indicati con } \mid j, m> & & \textit{indicati con } \mid m_1, m_2> \\
 & & \\
\textit{singoletto} & & \\
\mid 0, 0> & = & \frac{1}{\sqrt{2}}(\mid \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}> - \mid -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}>) \\
 & & \\
\textit{tripletto} & & \\
\mid 1, \;\; 1> & = & \mid \frac{1}{2}, \frac{1}{2}> \\
\mid 1, \;\; 0> & = & \frac{1}{\sqrt{2}}(\mid \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}> + \mid -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}>) \\
\mid 1, -1> & = & \mid -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}>
\end{array} \tag{5}$$

queste relazioni si ricavano utilizzando la seconda delle (4) per determinare tutti gli stati $\mid m_1, m_2>$ che contribuiscono allo stato $\mid j, m>$. Ad esempio possiamo avere $m = 0$ con $m_1 = 1/2$ ed $m_2 = -1/2$ oppure con $m_1 = -1/2$ ed $m_2 = 1/2$; lo stato $\mid 1, 0>$ deve dunque essere una combinazione lineare degli stati $\mid \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}>$ e $\mid -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}>$. Si utilizzano poi le proprieta' di ortonormalita' per determinare i coefficienti (**coefficienti di Clebsh-Gordan**) della combinazione lineare.
Le relazioni possono essere invertite:

$$\begin{array}{rcl}
|\frac{1}{2}, \frac{1}{2}> & = & \mid 1, 1> \\
\mid -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}> & = & \frac{1}{\sqrt{2}}(\mid 1, 0> - \mid 0, 0>) \\
|\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}> & = & \frac{1}{\sqrt{2}}(\mid 1, 0> + \mid 0, 0>) \\
\mid -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}> & = & \mid 1, -1>
\end{array} \tag{6}$$

notate che abbiamo quattro stati $\mid j, m>$ e quattro $\mid m_1, m_2>$.

Notate ora che agli stati con $m_1 = m_2$ contribuiscono solo stati di tripletto ed a quelli con $m_1 = -m_2$ uno stato di tripletto ed uno di singoletto. Le sequenze di livelli dei nostri tre nuclei sembrano sembra avere caratteristiche simili; possiamo spiegarle se ipotizziamo l'esistenza di una quantita', che chiamiamo **spin isotopico** o **isospin**, con le seguenti caratteristiche:

- L'isospin ha le stesse proprieta' matematiche di un momento angolare.
- A differenza del momento angolare, l'isospin e' una quantita' adimensionale e ne consideriamo le proiezioni in uno spazio astratto a tre dimensioni e non in quello delle coordinate.

- Detto $\mathbf{I}$ l'isospin ed I_3 la sua terza componente, neutrone e protone sono autostati di $\mathbf{I}^2$ e di I_3 con autovalori:

$$\mathbf{I}^2| \, n >= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)| \, n > \qquad I_3| \, n >= -\frac{1}{2}| \, n > \tag{7}$$

$$\mathbf{I}^2| \, p >= \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right)| \, p > \qquad I_3| \, p >= +\frac{1}{2}| \, p > \tag{8}$$

- Per un qualsiasi sistema fisico, di singola particella o di piu' particelle, l'interazione forte dipende dall'isospin totale del sistema ma non dalle sue componenti.

In sostanza stiamo dando espressione matematica alla analogia tra n e p notata all'inizio, affermando che essi sono due proiezioni di uno stesso stato di isospin 1/2.
Ipotizzato tutto cio', spieghiamo le nostre sequenze di livelli nel modo seguente: gli stati nn np e pp di C,N e O sono autostati a due particelle di $\mathbf{I}_1^2$, I_{13}, $\mathbf{I}_2^2$ e I_{23}, dove $\mathbf{I}_1$ e $\mathbf{I}_2$ sono gli isospin delle due particelle. Questi stati possono essere scritti in termini di autostati dell'isospin totale, cioe' di $\mathbf{I}^2$ e I_3 con $\mathbf{I} = \mathbf{I_1} + \mathbf{I_2}$, esattamente come nelle (6):

$$\begin{array}{rcl} & & autostati \ di \ \mathbf{I}^2 \ e \ I_3 \\ |p,p> & = & | \, 1,1> \\ |n,p> & = & \frac{1}{\sqrt{2}}(| \, 1,0> -| \, 0,0>) \\ |p,n> & = & \frac{1}{\sqrt{2}}(| \, 1,0> +| \, 0,0>) \\ |n,n> & = & | \, 1,-1> \end{array} \tag{9}$$

ora l'assunzione di indipendenza delle interazioni forti da $\mathbf{I}$ ma non dalle sue componenti implica che i sistemi pp e nn devono comportarsi, dal punto di vista delle interazioni forti, nello stesso modo; mentre il sistema np e' la sovrapposizione di uno stato, l'$| \, 1,0>$, che si comporta nello stesso modo dei primi due e di un altro, lo $| \, 0,0>$, che ha un isospin diverso e quindi si comporta diversamente. Anche l'analogia delle sequenze di ${}^7_3Li$ e ${}^7_4Be$ puo' essere spiegata nello stesso modo: in questo caso n e p hanno lo stesso isospin $1/2$, e proiezioni diverse.
In realta' le considerazioni precedenti andrebbero fatte considerando l'isospin non del singolo nucleone o della coppia per la quale in nuclei si differenziano, ma l'isospin complessivo dei nuclei. Potete immaginare che il discorso sarebbe piu' complicato ma le conclusioni identiche.
L'indipenza delle interazioni forti dalle componenti dell'isospin puo' essere vista come un'invarianza per rotazioni nello spazio astratto di cui abbiamo parlato prima; in una rotazione, infatti, il modulo di un vettore rimane invariato mentre le sue componenti cambiano (leggete a questo proposito anche il capitolo sulle teorie di gauge). Come sapete ad ogni invarianza corrisponde una quantita' conservata: cosi' come dall'invarianza per rotazioni nello spazio ordinario segue la conservazione del momento angolare, da questa invarianza segue la conservazione dell'isospin. Questa conservazione puo' essere verificata e applicata in tutti i processi (reazioni e decadimenti) che avvengono per interazione forte.
Concludo ricordandovi che, cosi' come era approssimata la simmetria tra neutrone e protone da cui siamo partiti, e' approssimata anche la simmetria che abbiamo introdotto.