

# SEZIONE D'URTO

## SEZIONE D'URTO DI RUTHERFORD

### 1 DEFINIZIONE DI SEZIONE D'URTO

Nello studio delle caratteristiche delle interazioni fondamentali e dei costituenti della materia uno dei principali metodi di indagine consiste nell'inviare una particella (proiettile) su di un'altra (bersaglio) che possiamo considerare a riposo. Il proiettile e il bersaglio possono essere una particella *elementare*, cioè priva di struttura interna, ad esempio un elettrone, o un aggregato di particelle, ad esempio un protone o un nucleo. Il bersaglio si trova in un pezzo di materiale che ne contiene un gran numero; nel seguito utilizzeremo il termine *bersaglio* per indicare indifferentemente la particella che interagisce o il materiale che la contiene.

Il proiettile ed il bersaglio interagiranno e lo studio del sistema dopo l'interazione ci dà informazioni sulle caratteristiche dell'interazione e sulla struttura delle particelle che hanno interagito.

L'interazione è detta *diffusione elastica* se dopo l'interazione ritroviamo le stesse particelle presenti prima dell'interazione; ad esempio con la notazione:

$$e + (A, Z) \rightarrow e + (A, Z) \quad (1)$$

indichiamo l'interazione elastica tra un elettrone ed un nucleo di numero di massa  $A$  e carica  $Z$ . Il risultato dell'interazione sarà una modifica della quantità di moto delle due particelle interagenti mentre la quantità di moto totale del sistema si conserva:

$$\mathbf{P}_e + \mathbf{P}_{(A,Z)} = \mathbf{P}'_e + \mathbf{P}'_{(A,Z)} \quad (2)$$

dove abbiamo utilizzato gli indici ' per indicare le quantità dopo l'interazione. Se il nucleo rimane praticamente a riposo dopo l'interazione, cosa che avviene per energie dell'elettrone incidente non troppo alte, allora l'energia cinetica dell'elettrone prima e dopo l'urto sono uguali e l'unico risultato dell'interazione è un cambio nella direzione di volo dell'elettrone.

L'interazione viene detta invece *diffusione anelastica* se abbiamo anche un cambio nel tipo di particelle uscenti dall'interazione; ad esempio il nucleo si può trovare in uno stato eccitato:

$$e + (A, Z) \rightarrow e + (A, Z)^* \quad (3)$$

o si può separare in due parti:

$$e + (A, Z) \rightarrow e + (A', Z') + (A'', Z'') \quad (4)$$

con  $A = A' + A''$  e  $Z = Z' + Z''$ . In un'interazione anelastica possiamo anche avere, come vedremo, casi ancor più interessanti come la produzione di particelle di tipo completamente nuovo. In tutti i casi considerati, il quadriimpulso totale del sistema è conservato. Un'esperimento di diffusione si realizza producendo ed accelerando un gran numero di proiettili (*fascio*), selezionando per quanto possibile la stessa direzione ed energia ed inviandoli sul bersaglio. È molto difficile studiare i dettagli dell'interazione nel momento in cui proiettile e bersaglio sono vicini fra loro e quindi interagiscono più fortemente. Ad esempio, anche assumendo un punto di vista completamente classico, è quasi impossibile osservare la traiettoria del proiettile all'interno del bersaglio senza modificare il suo stato, influenzando quindi sul risultato della misura. D'altra parte, come sapete, in

meccanica quantistica questa impossibilita' e' una caratteristica intrinseca del processo di misura. Cio' che possiamo misurare agevolmente senza influire sull'interazione sono le quantita' caratteristiche (energia, quantita' di moto, tipo ...) delle particelle prima e dopo l'interazione, in una regione in cui proiettile e bersaglio sono abbastanza distanti perche' la loro interazione sia trascurabile. Ad esempio, per le reazioni (1) e (3), supponendo che il nucleo rimanga confinato nel materiale che lo contiene con energia cinetica trascurabile, e considerato che energia e direzione dei proiettili sono fissati dagli apparati con cui il fascio e' stato preparato, le uniche quantita' da misurare sono energia e direzione degli elettroni uscenti, in una configurazione sperimentale simile a quella della figura 1. Notiamo innanzitutto che l'angolo formato tra l'asse del rivelatore e quello del fascio coincide

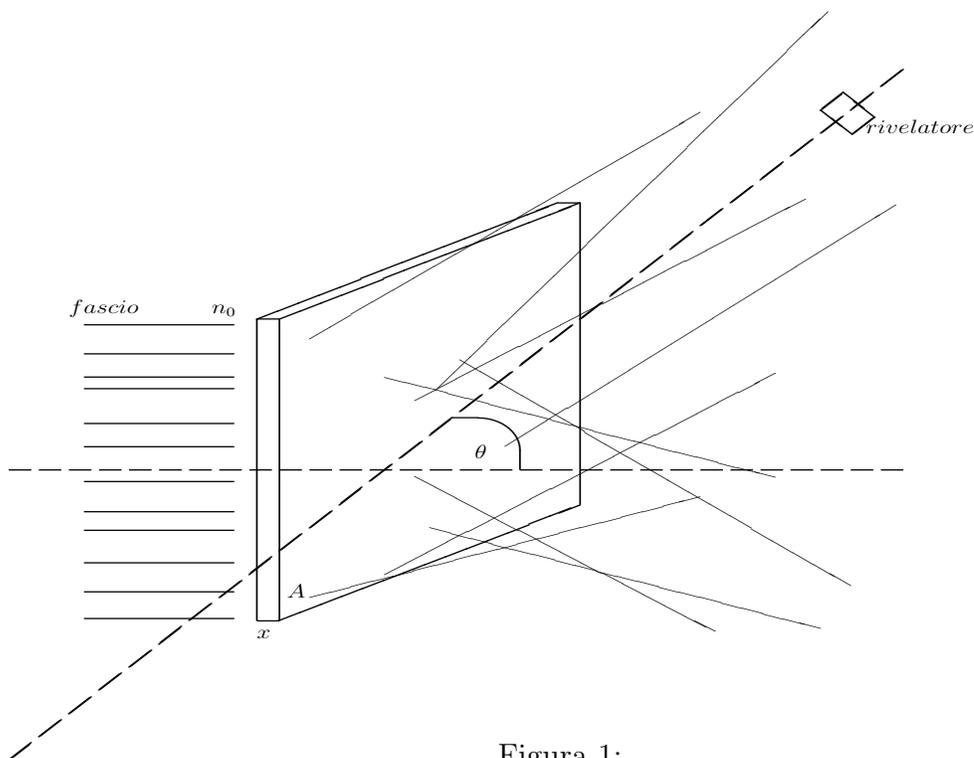


Figura 1:

con l'angolo di diffusione, ossia con l'angolo formato tra le direzioni della particella entrante e di quella uscente, solo se le dimensioni del bersaglio e del rivelatore sono molto minori della loro mutua distanza (condizione espressamente non verificata in figura). Notiamo anche che, oltre all'angolo  $\theta$ , va considerato quello azimutale  $\varphi$  non indicato in figura.

Supponiamo che il rivelatore esegua una semplice misura di conteggio del numero di particelle che lo attraversano nell'unita' di tempo,  $dY$ , e che  $d\Omega$  sia l'angolo solido sotteso dal rivelatore.  $dY/d\Omega$  cresce linearmente con  $n_0$ , numero di particelle del fascio che incidono sul bersaglio per unita' di tempo, con  $N$ , densita' di nuclei bersaglio presenti nel materiale (espressa in unita' dell'inverso di un volume) e con lo spessore del bersaglio  $x$  (vedremo che in realta' questo e' vero solo per piccoli spessori). Allora chiamiamo *sezione d'urto differenziale* del processo di diffusione la quantita':

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{n_0 \cdot N \cdot x} \cdot \frac{dY}{d\Omega} \quad (5)$$

Tolta la dipendenza ovvia da  $n_0$ ,  $N$  e  $x$ , cio' che resta, cioe' la sezione d'urto differenziale, deve dipendere dalle caratteristiche dell'interazione e delle particelle che interagiscono e il confronto tra teoria ed esperimento per questa quantita' e' uno strumento fondamentale per lo studio della materia e delle interazioni alla scala delle dimensioni nucleari e subnucleari.

Si definisce anche la *sezione d'urto totale*:

$$\sigma = \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \quad (6)$$

dove l'integrazione e' estesa a tutto l'angolo solido.

Le sezioni d'urto differenziale e totale hanno le dimensioni di una superficie.

## 2 DIFFUSIONE COULOMBIANA PARAMETRO D'IMPATTO

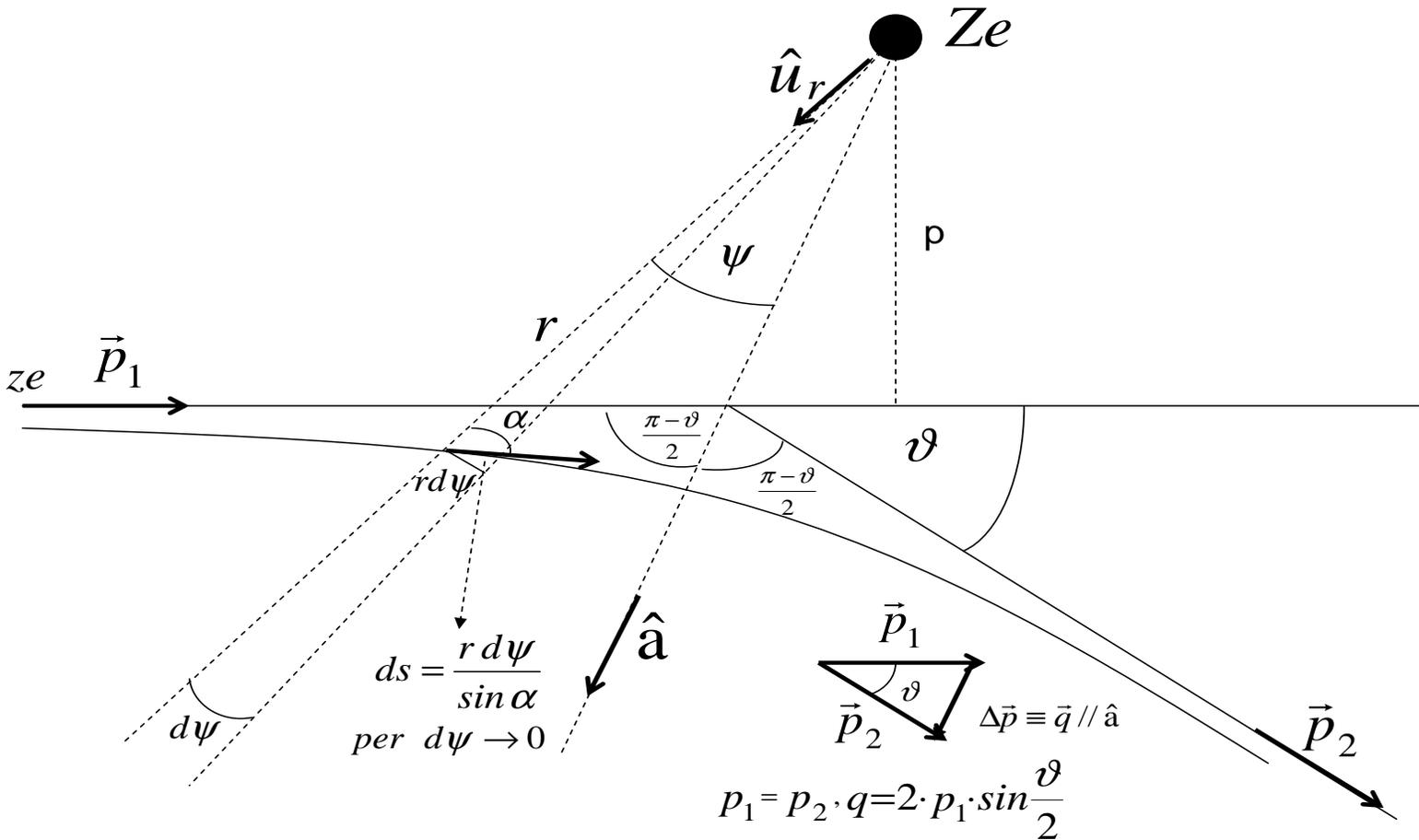


Figura 2:

In questo paragrafo studiamo la diffusione di un proiettile di carica  $ze$  da un centro diffusore di carica  $Ze$  supponendo che le due particelle siano puntiformi e che il bersaglio resti a riposo durante il processo di diffusione. Quest'ultima condizione costituisce una buona approssimazione nel caso in cui la massa del proiettile sia molto minore di quella del bersaglio e la sua energia non sia troppo elevata. Con riferimento alla **figura 2**,  $\mathbf{P}_1$  e  $\mathbf{P}_2$  sono gli impulsi del proiettile a distanza infinita dal bersaglio, rispettivamente prima ( $t = -\infty$ ) e dopo ( $t = +\infty$ ) l'urto. Se il bersaglio resta fermo, le energie cinetiche del proiettile a  $t = -\infty$  e  $t = +\infty$  sono uguali, come pure i moduli dell'impulso, e l'unico risultato della diffusione sara' una deviazione di un angolo  $\vartheta$  nel piano che contiene  $\mathbf{P}_1$  e il centro diffusore; la distanza  $p$  tra il centro diffusore e la retta contenente  $\mathbf{P}_1$  e' detta *parametro d'impatto*;  $\mathbf{q} = \Delta \mathbf{P} = \mathbf{P}_2 - \mathbf{P}_1$  e' detto *momento trasferito* ed e' facile convincersi che e' parallelo all'asse della traiettoria del proiettile, che e' un ramo d'iperbole.

In questo paragrafo calcoleremo la relazione tra  $p$  e  $\vartheta$ . A tale scopo calcoliamo  $q$ : poiche' sappiamo gia' che  $e'$  e' parallelo ad  $\hat{a}$ , ci basta integrare la componente di  $d\mathbf{p}$  in tale direzione:

$$\begin{aligned}
 q &= \int d\mathbf{p} \cdot \hat{a} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{F} \cdot \hat{a} dt \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \psi dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \psi \frac{ds}{v} \\
 &= \int_{-\frac{\pi-\theta}{2}}^{\frac{\pi-\theta}{2}} \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cos \psi \frac{rd\psi}{v \sin \alpha}
 \end{aligned} \tag{7}$$

dove  $ds$  e' l'elemento di linea lungo la traiettoria della particella,  $v$  e' la velocita' scalare e le altre quantita' sono definite in **figura 2**.

Per eliminare la dipendenza dell'integrando da  $rv \sin \alpha$  applichiamo la conservazione del momento angolare, il cui modulo, in un punto generico della traiettoria, e' dato da:

$$L = rmv \sin(\pi - \alpha) = rmv \sin(\alpha) \tag{8}$$

se lo calcoliamo per  $t \rightarrow -\infty$ , allora  $v$  e' la velocita' iniziale del proiettile e  $r \sin \alpha$  tende a  $p$ . Quindi nell'integrale possiamo sostituire  $rv \sin \alpha$  con la costante  $v_1 p$ :

$$q = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 v_1 p} \int_{-\frac{\pi-\theta}{2}}^{\frac{\pi-\theta}{2}} \cos \psi d\psi = 2 \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 v_1 p} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \tag{9}$$

ma  $q$  e' uguale a  $2p_1 \sin(\frac{\theta}{2})$  (vedi **figura 2**); quindi:

$$p = \frac{b}{2} \cdot \cot\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad b = \frac{zZe^2}{2\pi\epsilon_0 m v_1^2} \tag{10}$$

$b$  e' la distanza di massimo avvicinamento tra proiettile e bersaglio nel caso di *urto frontale*, cioe' con  $p = 0$  (esercizio!). Quest'equazione ci da' la dipendenza tra l'angolo di diffusione, il parametro d'impatto e l'energia della particella incidente. Verificate che questa dipendenza e' 'ragionevole'.

Notiamo che il risultato e' indipendente dall'orientazione nello spazio del piano in cui avviene la diffusione: il sistema ha simmetria azimutale.

Notiamo infine che il calcolo puo' essere esteso al caso in cui si consideri anche il rinculo del bersaglio, separando il moto del centro di massa del sistema dal moto relativo.

### 3 SEZIONE D'URTO DI RUTHERFORD

Poiche', come abbiamo detto, non possiamo seguire nel dettaglio la traiettoria di ciascuna particella del fascio nel suo moto all'interno del bersaglio, adotteremo un approccio statistico, ipotizzando una distribuzione casuale uniforme, su tutta la superficie del bersaglio, per i proiettili nel fascio e per i bersagli nel materiale. Consideriamo uno dei bersagli, in una posizione generica. Allora tutti i proiettili che incidono sull'elemento  $dC$  della corona circolare di raggi  $p$  e  $p + dp$  indicata in **figura 3** saranno diffusi ad un angolo con la direzione incidente compreso tra  $\theta$  e  $\theta + d\theta$ , dove  $\theta$  e' dato dalla (10) e ad un angolo azimutale compreso tra  $\varphi$  e  $\varphi + d\varphi$ ; dalla stessa equazione si puo' anche calcolare la relazione tra  $dp$  e  $d\theta$ .

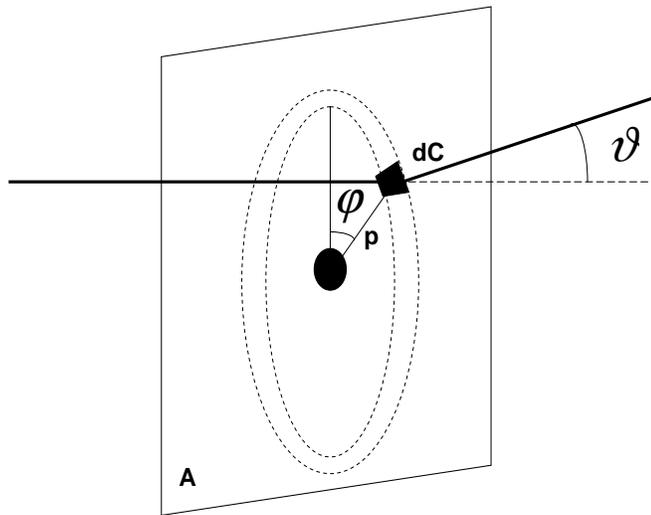


Figura 3:

La probabilita' per un proiettile di incidere in un punto dell'elemento di corona e quindi essere diffuso nella direzione  $(\theta, \varphi)$  e' data dal rapporto tra la superficie dell'elemento e quella del bersaglio, che indichiamo con  $A$ :

$$\frac{dC}{A} = \frac{p \cdot dp \cdot d\varphi}{A} \quad (11)$$

e il numero di proiettili diffusi sara' dato dal prodotto tra questa probabilita' ed  $n_0$ . Questo per il singolo centro diffusore: se moltiplichiamo per il numero totale di centri  $(N \cdot A \cdot x)$  otteniamo il numero totale di proiettili diffusi:

$$dY = n_0 \cdot N \cdot A \cdot x \cdot \frac{dC}{A} = n_0 \cdot N \cdot x \cdot p \cdot dp \cdot d\varphi \quad (12)$$

sostituendo nella definizione della sezione d'urto differenziale e sostituendo  $p$  e  $dp$  ottenuti dalla (10) si ha:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{p \cdot |dp|}{\sin(\theta) \cdot d\theta} = \frac{b^2}{16} \cdot \frac{1}{\sin^4(\frac{\theta}{2})} \quad (13)$$

(ho messo il valore assoluto perche'  $dp/d\theta$  e' negativo mentre dobbiamo ottenere una quantita' positiva).

Questa e' la famosa sezione d'urto di Rutherford. Oltre alle ipotesi dette all'inizio, ve ne sono altre due: il calcolo e' fatto nell'ambito della relativita' galileiana, quindi vale a basse energie; le due particelle sono considerate senza spin, cosa non vera per l'elettrone e buona parte dei nuclei e delle particelle elementari.

Un semplice calcolo (esercizio!) vi mostrera' che la sezione d'urto totale e' infinita. Perche' ?.

#### 4 SEZIONE D'URTO DI UNA SFERA TOTALMENTE ASSORBENTE

Se consideriamo un bersaglio costituito da una sfera di raggio  $R$  che 'assorbe' totalmente i proiettili, cioe' li ferma restando a riposo, non possiamo evidentemente parlare di sezione d'urto differenziale ma possiamo agevolmente calcolare quella totale integrando direttamente  $dY$  su tutte le corone circolari infinitesime (vi lascio i dettagli per esercizio!) e ottenere:

$$\sigma = \pi \cdot R^2 \quad (14)$$

questo risultato ci permette di interpretare la sezione d'urto, che ha le dimensioni di una superficie, come la sezione di un bersaglio 'equivalente' a quello considerato ma totalmente assorbente. E ci suggerisce anche una risposta alla domanda del paragrafo precedente.

Un calcolo piu' elaborato e' quello della sezione d'urto differenziale per una sfera totalmente ed elasticamente riflettente. Anche in questo caso la sezione d'urto totale e' uguale alla sezione della sfera.

## 5 CONFRONTO CON LE MISURE

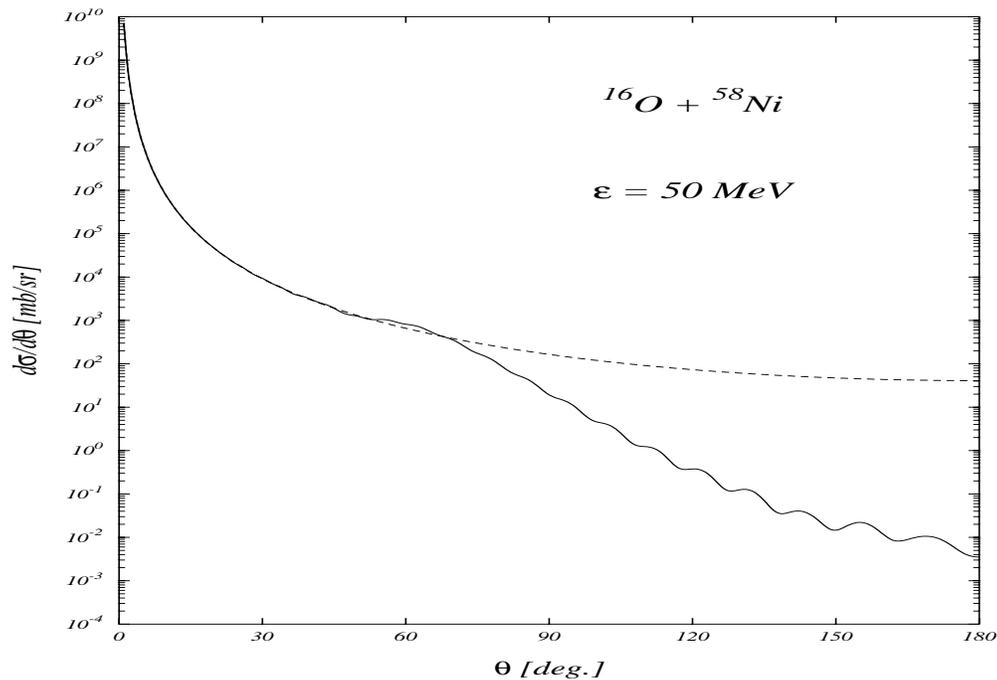


Figura 4:

La **figura 4** mostra il confronto tra la sezione d'urto di Rutherford (curva tratteggiata) e quella effettivamente osservata per la diffusione tra due nuclei: la curva continua e' la predizione di un modello che riproduce molto accuratamente i dati sperimentali. Come interpretiamo questo confronto?: l'accordo tra predizione di Rutherford e misure e' molto buono fino a  $\theta \simeq 40^\circ$ ; la (10) fa corrispondere questo valore di  $\theta$  ad un certo parametro d'impatto  $p_0$ ; per valori inferiori del parametro d'impatto i dati sperimentali non seguono piu' la predizione. Vuol dire che per parametri d'impatto inferiori a  $p_0$  cadono le ipotesi nelle quali e' stata calcolata la sezione d'urto, in particolare quella di particella puntiforme: abbiamo un metodo per dare una stima dei raggi nucleari!. In questo caso, poiche' entrambe le particelle non sono puntiformi,  $p_0$  dipende dalla somma dei raggi dei due nuclei. Vi lascio come esercizio il calcolo di  $p_0$  dai dati sperimentali e della relazione tra  $p_0$  e la somma dei due raggi.

La **figura (5)** mostra lo stesso confronto a grandi angoli e con due diversi modelli per la distribuzione della carica elettrica all'interno del nucleo (ne riparleremo) e la **figura (6)** mostra il rapporto, ad un angolo fissato, tra la sezione d'urto differenziale misurata e quella di Rutherford direttamente in funzione della distanza di massimo avvicinamento per differenti energie della particella incidente. come si vede, il parametro d'impatto a partire dal quale si osserva la deviazione e' di circa  $12 \text{ fm}$ .

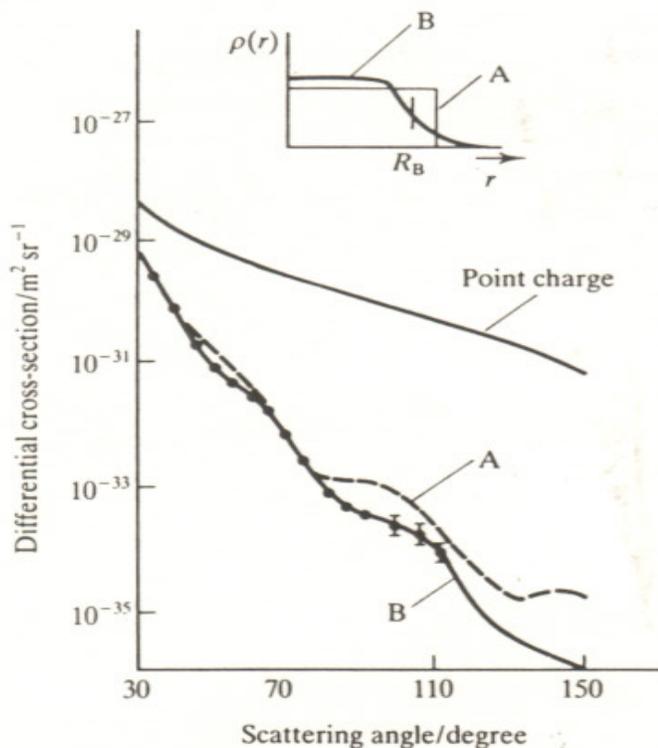


Figure 3.6 Scattering of 153 MeV electrons by gold with (inset) charge distributions that may be used to fit the data points; the 'half-way' radius is marked. (Bohr A and Mottelson B 1969 *Nuclear Structure I* Benjamin.)

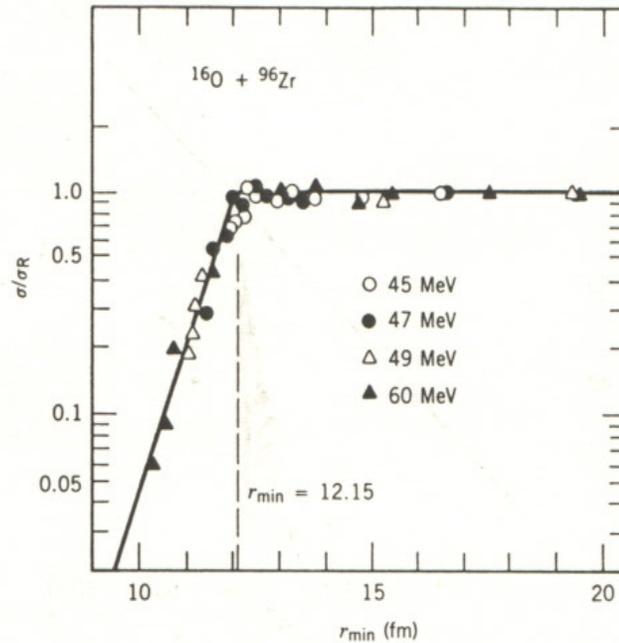
Figura 5:

## 6 CARATTERISTICHE DEL BERSAGLIO

### ATTENUAZIONE DEL FASCIO

Il ragionamento fatto in precedenza, sulla sezione d'urto che ci permette di studiare le caratteristiche dell'interazione, presuppone che ciascuna particella del fascio interagisca con un solo centro diffusore. Se il bersaglio fosse costituito da nuclei senza gli elettroni attorno, ciascuna particella del fascio interagirebbe con tutti i nuclei del bersaglio, l'angolo di diffusione sarebbe il risultato di tutte queste interazioni, e ricavare le caratteristiche dell'interazione fondamentale sarebbe notevolmente più difficile: l'interazione elettromagnetica, come quella gravitazionale, è *a lungo range*, ossia i suoi effetti sono non trascurabili anche per grandi distanze fra le particelle interagenti; se anzi provassimo a dare una qualche definizione di *range* di un'interazione potremmo scoprire che quello dell'interazione elettromagnetica è infinito (ne riparleremo). In realtà ciascun nucleo è circondato dagli elettroni che rendono l'atomo neutro e il bersaglio, per 'sentire' la carica del nucleo deve passare abbastanza vicino all'atomo in modo da attraversare la nuvola elettronica (questo discorso è molto semplificato: ci sono anche effetti di polarizzazione a lunga distanza). Quindi la nuvola elettronica 'scherma' il campo del nucleo a grandi distanze.

Detto questo, bisogna che il materiale sia sufficientemente sottile da rendere trascurabile la probabilità che il proiettile passi nelle vicinanze di un atomo più di una volta (*diffusione multipla*). In generale, per un materiale di spessore qualsiasi, possiamo chiederci come viene attenuato il fascio di particelle ossia: date  $n_0$  particelle all'ingresso del materiale, quante non avranno ancora interagito



**Figure 11.11** Elastic scattering of  $^{16}\text{O}$  from  $^{96}\text{Zr}$  at several incident energies. The horizontal axis shows the minimum separation distance  $r_{\min}$  between projectile and target, which varies with  $b$  and therefore with  $\theta$ . The vertical axis shows the cross section in terms of the calculated Rutherford cross section. Nuclear scattering effects appear at separations of less than 12.15 fm; this corresponds to  $R_0 = 1.7$  fm, considerably greater than the mean radius of 1.25 fm, but consistent with a "skin thickness" of about 0.5 fm which allows the two nuclear distributions to overlap at these larger distances. From P. R. Christensen et al., *Nucl. Phys. A* **207**, 33 (1973).

Figura 6:

alla profondita'  $x$  all'interno dello stesso?. La risposta e' (esercizio!):

$$n(x) = n_0 \cdot e^{-N \cdot \sigma \cdot x} \quad (15)$$

La quantita'  $\lambda = \frac{1}{N \cdot \sigma}$  e' detta *libero cammino medio* ed e' la profondita' media a cui avviene la prima interazione. La conoscenza anche non precisa di  $\lambda$  ci permette di dimensionare il nostro esperimento: il bersaglio deve avere uno spessore dell'ordine di un libero cammino medio.

Vi segnalo infine che, data la densita'  $\rho$ , in grammi per unita' di volume del materiale, il suo numero di massa  $A$  ed il numero di Avogadro  $N_A$ ,  $N$  e' dato da:

$$N = \frac{\rho}{A} N_A \quad (16)$$

## 7 DISTRIBUZIONE DELLA CARICA NEL NUCLEO

### FATTORE DI FORMA

Nel caso di distribuzioni di carica del bersaglio non puntiformi e' possibile, in meccanica quantistica non relativistica, scrivere la sezione d'urto in termini di quella puntiforme:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |F(\mathbf{q}^2)|^2 \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega_{punt}} \quad (17)$$

Dove  $\mathbf{q}$  e' il momento trasferito e  $F(\mathbf{q}^2)$  e' il *fattore di forma* della distribuzione di carica, dato dalla trasformata di Fourier della densita' di carica normalizzata alla carica totale,  $f(\mathbf{x})$ :

$$F(\mathbf{q}^2) = \int e^{\frac{i\mathbf{q}\cdot\mathbf{x}}{\hbar}} f(\mathbf{x}) d^3x \quad (18)$$

L'adattamento ai dati mostrato nella **figura 5** e' fatto utilizzando queste espressioni. La distribuzione di carica indicata con  $B$  ha la seguente espressione:

$$f(r) = \frac{1}{1 + e^{\frac{r-c}{a}}} \quad (19)$$

e l'adattamento ai dati indica i seguenti valori:

$$c \approx 1.1 \cdot A^{\frac{1}{3}} fm, \quad a \approx 0.6 fm \quad (20)$$

## 8 UNITA' E SCALE

Come abbiamo visto le dimensioni dei nuclei sono dell'ordine del *femtometro*,  $fm$  ( $=10^{-15}m$ ) (o, all'aumentare di  $A$ , della decina di  $fm$ ). A questa unita' e' stato dato il nome di *Fermi*. per le sezioni d'urto si usa il *barn* come unita' di base:

$$1 \text{ barn} = 10^{-28} m^2 \quad (21)$$