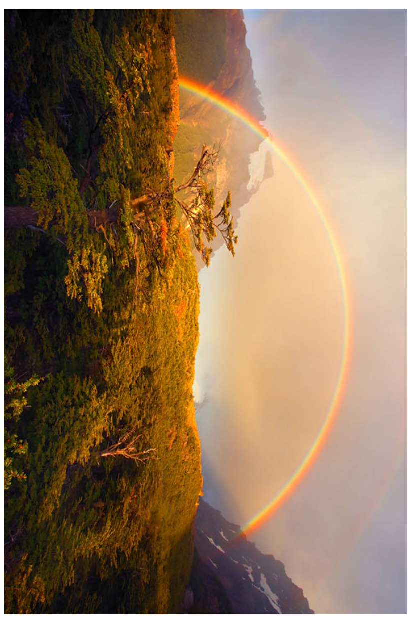
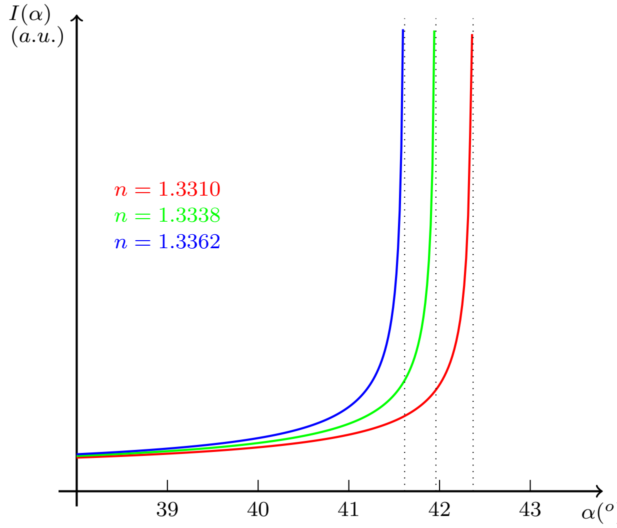
Giovanni Mancarella

# L'arcobaleno






In questa nota utilizzeremo il termine *distribuzione* per indicare la densità di probabilità di una variabile casuale.

Il fenomeno dell'arcobaleno può essere osservato quando si ha il sole alle spalle e una nuvola di fronte. Esso è dunque prodotto da raggi solari che vengono diffusi all'indietro dalle gocce d'acqua che formano la nuvola. Detto $\alpha$ l'angolo formato tra il raggio solare entrante e quello uscente (diffuso) dalla nuvola, mostreremo, utilizzando la legge di Snell, che tale fenomeno è causato dall'esistenza di un valore massimo per $\alpha$, differente per ogni lunghezza d'onda presente nella luce solare.

## 1 - Il modello

Tratteremo l'interazione della luce solare con una goccia di pioggia considerando singoli raggi di luce distribuiti casualmente ed uniformemente, tutti ovviamente paralleli tra di loro, che incidono su gocce d'acqua sferiche ed utilizzeremo le leggi dell'ottica geometrica per studiare la propagazione di tali raggi.
Tutti i raggi riflessi e rifratti dalla goccia giacciono nel piano che contiene il raggio incidente ed il centro dellla goccia; tale piano si chiama *piano di diffusione* o *piano di scattering*. Il sistema è ovviamente a simmetria cilindrica attorno all'asse parallelo ai raggi incidenti che passa per il centro della goccia, ci limiteremo quindi a considerare un solo piano di scattering e solo raggi contenuti in tale piano.
Indichiamo con $b$ la distanza tra la retta seguita dal raggio incidente ed il centro della goccia; ovviamente l'interazione avviene quando $b$ è minore di $R$. $b$ è detto *parametro d'impatto* ed è una quantità fondamentale nella descrizione dell'interazione sia tra corpi macroscopici che fra particelle elementari.
Se l'intensità della luce solare è uniforme nel fronte d'onda che investe la goccia , tutti i valori possibili di $b$ nel piano di scattering sono equiprobabili.
**Esercizio** : calcolare la distribuzione di $b$
Invece di usare direttamente $b$, useremo il parametro d'impatto normalizzato adimensionale $x$:

$$x = \frac{b}{R}$$

L'angolo di incidenza sarà dato da:

$$\sin i = \frac{b}{R} = x \qquad (1)$$

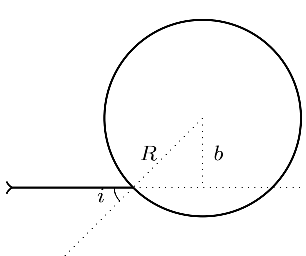
$x$ è una variabile casuale distribuita uniformemente tra $0$ e $1$; la sua distribuzione è dunque data da:

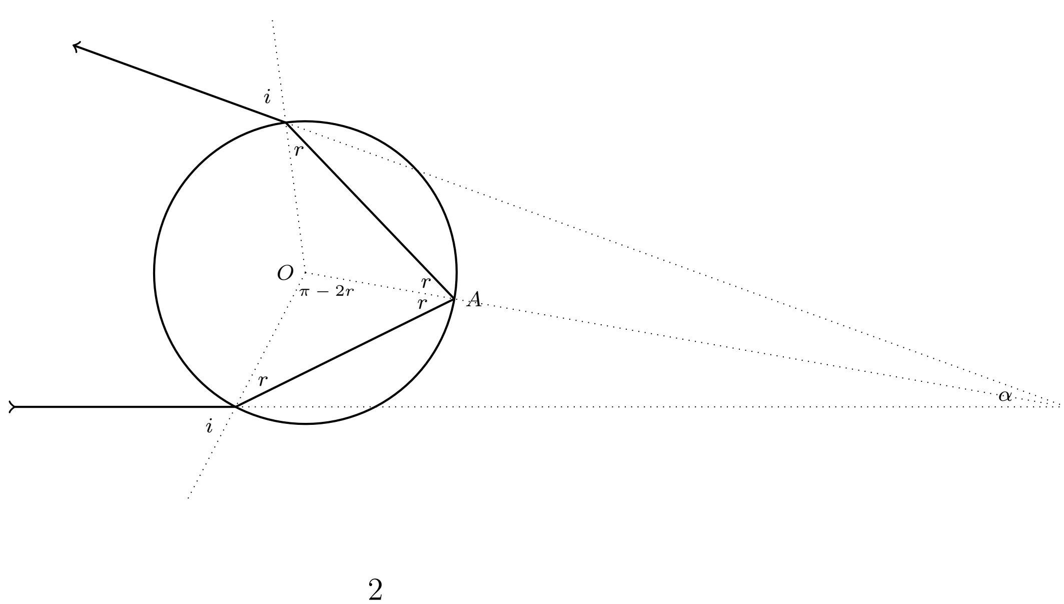
$$f(x) = 1$$

Se $I_o$ è il flusso di energia per unità di tempo, che assumiamo costante, che incide sulla goccia,il flusso medio per unità di tempo e per unità di pararametro d'impatto normalizzato sarà:

$$I(x) = I_o f(x) = I_o$$

La seconda figura seguente mostra uno dei possibili percorsi del raggio all'interno della goccia; è quello che ci interessa, perchè è quello che produce il primo arco dell'arcobaleno:



Considerando la simmetria della figura attorno all'asse $OA$ è abbastanza agevole dimostrare che [**Esercizio**]:

$$\alpha = 4r - 2i = 4\arcsin\frac{x}{n} - 2\arcsin x \qquad (2)$$

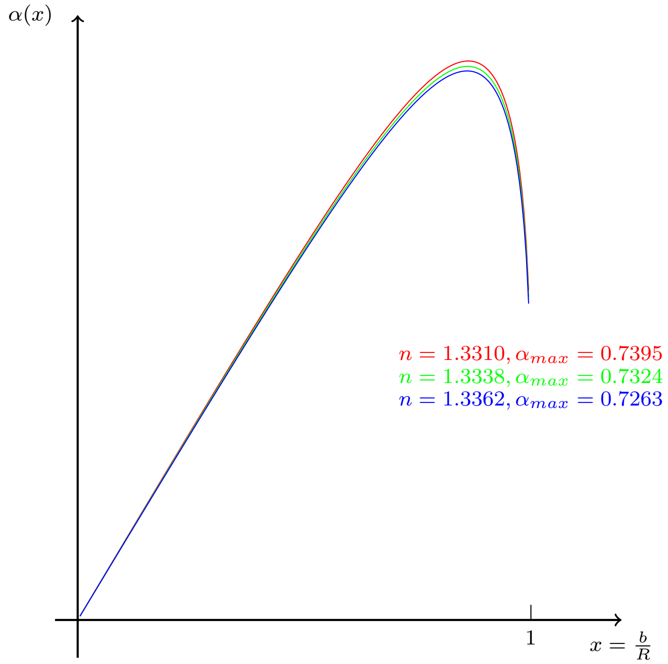
$n$ è l'indice di rifrazione relativo acqua-aria ed abbiamo utilizzato la legge di Snell per scrivere la seconda uguaglianza. La derivata di $\alpha$ rispetto ad $x$ è data da:

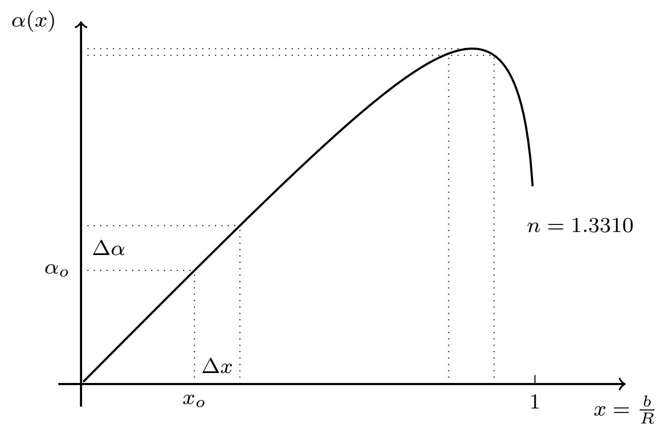
$$\frac{d\alpha}{dx} = \frac{4}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{n}\right)^2}}\frac{1}{n} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}}$$

e si annulla per [**Esercizio**: dimostrare che è un massimo]:

$$x_{max} = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}$$

Questo massimo dipende da $n$, quindi dalla lunghezza d'onda della luce incidente; ogni colore ha dunque un diverso angolo di deviazione massimo.




Consideriamo ora l'intervallo di $x$ con estremo in $x_o$ indicato in figura; tutti i raggi che incidono con parametro $x$ in quest'intervallo, verranno deviati ad un angolo compreso nel corrispondente intervallo di $\alpha$ . Tracciamo ora un intervallo di ampiezza uguale (nel quale incide la stessa quantità di luce, perchè tutti i valori di $x$ sono equiprobabili) intorno al massimo: il corrispondente intervallo in $\alpha$ è notevolmente più stretto. Si ha quindi un effetto di concentrazione della luce al disotto del massimo, e poichè tale massimo è diverso per ogni lunghezza d'onda, ogni colore si concentrerà ad un diverso angolo. Questa è la spiegazione qualitativa dell'arcobaleno; per renderla quantitativa dobbiamo calcolare la distribuzione di $\alpha$.

## 2 - Distribuzione di funzioni di variabili casuali

Data una variabile casuale $x$ con distribuzione $f(x)$ vogliamo calcolare la distribuzione $h(\alpha)$ di una variabile $\alpha(x)$ che dipende da essa. A questo scopo osserviamo che la probabilità per $x$ di trovarsi nell'intervallo $[x_o, x_o+\Delta x]$ deve essere uguale alla probabilità per $\alpha$ di trovarsi nel corrispondente intervallo $[\alpha(x_o), \alpha(x_o+\Delta x)] \equiv [\alpha_o, \alpha_o+\Delta\alpha]$; infatti tutti i raggi che incidono nell'intervallo $\Delta x$ vengono deviati nell'intervallo $\Delta\alpha$. Quindi:

$$\int_{x_o}^{x_o+\Delta x} f(x)\,dx = \left|\int_{\alpha_o}^{\alpha_o+\Delta\alpha} h(\alpha)\,d\alpha\right| \qquad (3)$$

**Esercizio** : perchè ho messo il valore assoluto ?

Se $\Delta x$, e di conseguenza $\Delta\alpha$, sono sufficientemente piccoli possiamo approssimare gli integrali con:

$$\int_{x_o}^{x_o+\Delta x} f(x)\,dx \simeq f(x_o)\Delta x \quad ; \quad \int_{\alpha_o}^{\alpha_o+\Delta\alpha} h(\alpha)\,d\alpha \simeq h(\alpha_o)\Delta\alpha$$

quindi:

$$h(\alpha_o) \simeq \frac{f(x_o)}{\left|\frac{\Delta\alpha}{\Delta x}\right|}$$

se ora facciamo tendere $\Delta x$ a $0$ il rapporto incrementale tenderà alla derivata ed in definitiva avremo, per un generico punto $x$:

$$h(\alpha) = \frac{f(x)}{\left|\frac{d\alpha}{dx}\right|}$$

**Esercizio** : se questa dimostrazione non vi sodisfa, rifatela eseguendo un cambiamento di variabile d'integrazione in (3)

Questa espressione è semplicissima, ma spesso, come nel nostro caso, la complicazione sta nel fatto che per ottenere esplicitamente $h(\alpha)$ bisogna sostituirvi $x(\alpha)$ invertendo $\alpha(x)$.

**Esercizio** : ricavate, utilizzando la (1), la distribuzione dell'angolo di incidenza $i$; scoprirete che gli angoli di incidenza non sono equiprobabili

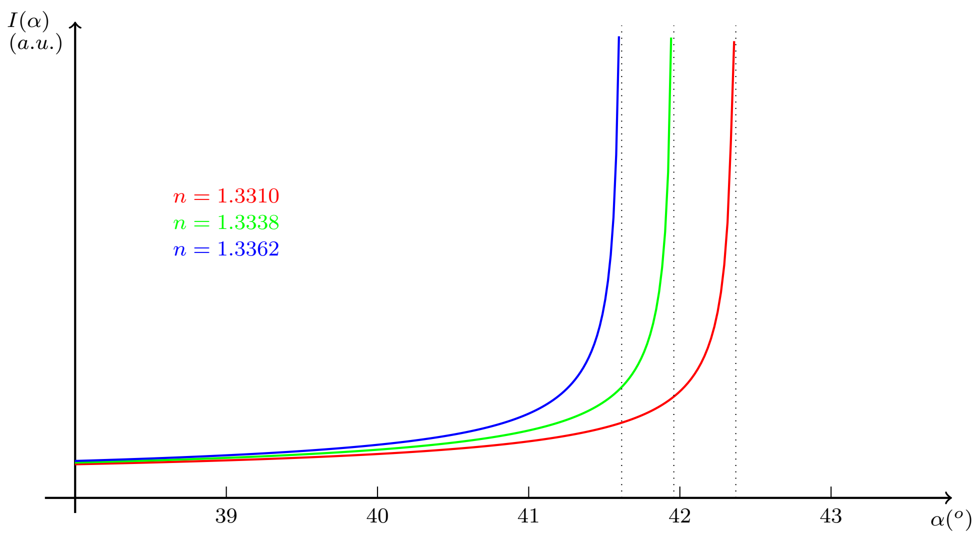
Osserviamo ora che nei punti di stazionarietà della funzione $\alpha(x)$ (punti in cui la derivata prima si annulla) la distribuzione $h(\alpha)$ tende ad infinito; questa è la spiegazione quantitativa dell'arcobaleno.

## 3 - La formazione dell'arcobaleno

Nel nostro caso ($f(x) = 1$) abbiamo quindi:

$$h(\alpha) = \frac{1}{\left|\frac{d\alpha}{dx}\right|}$$

per ottenere esplicitamente la dipendenza da $\alpha$ dobbiamo ricavare $x(\alpha)$ dalla (2), prestando attenzione al fatto (vedi grafici precedenti) che per alcuni valori di $\alpha$ abbiamo due possibili valori di $x$; la (2) va dunque invertita separatamente a destra e a sinistra del massimo e i due contributi ad $h(\alpha)$ vanno sommati. Non è possibile scrivere $x(\alpha)$ in termini di funzioni elementari, quindi l'inversione va fatta numericamente [come ?] ; il risultato per il flusso di energia per unità di tempo e per unità di angolo di deviazione è mostrato nella figura seguente per tre lunghezze d'onda nelle regioni del blu, del verde e del rosso:



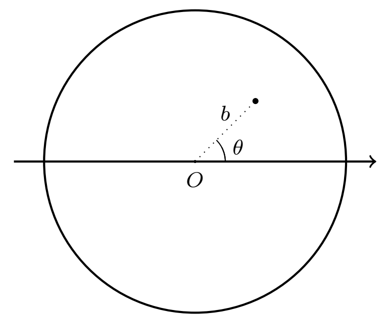
Come vediamo, la meraviglia dell'arcobaleno si produce nell'intervallo di circa $2^o$ che contiene i massimi per i diversi colori: ogni colore si concentra e predomina sugli altri in uno stretto intervallo al disotto del suo angolo massimo; fuori dall'intervallo che contiene i massimi i colori si rimescolano con all'incirca la stessa intensità.

## 4 - Commenti ed esercizi

a) Il valore di $\alpha_{max}$ dipende solo da $x_{max}$ e da $n$ e non da $R$, quindi è indipendente dal raggio delle gocce. Tuttavia per gocce troppo piccole ... continuate voi.

b) Il risultato del paragrafo 2 si applica a qualunque densità, e in effetti tutto il ragionamento di può rifare utilizzando la densità di energia al posto della densità di probabilità.

c) Riconsideriamo il problema nello spazio: la figura rappresenta la sezione della goccia passante per il centro e perpendicolare alla direzione dei raggi; il punto è l'intersezione di un raggio con tale sezione ed il piano di scattering è perpendicolare al piano della figura. Dimostrare che la distribuzione congiunta delle variabili $b$ e $\theta$ è data da:




$$f(b,\theta) = \frac{1}{\pi R^2} \qquad \text{e quella di } b \text{ da:} \qquad g(b) = \frac{2}{R^2} b$$

come vi spiegate la dipendenza da $b$ ? è in contradizione con l'ipotesi che abbiamo fatto di distribuzione uniforme nel piano di scattering?

d)Vi sembra semplice ? Leggete questo:
`http://www.dmf.unisalento.it/~manca/lab3/Jackson-Rainbow.pdf`.