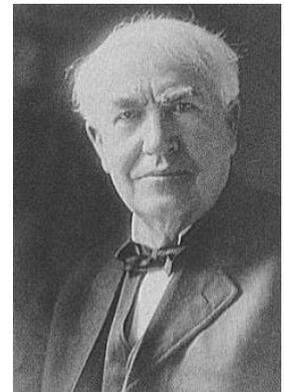


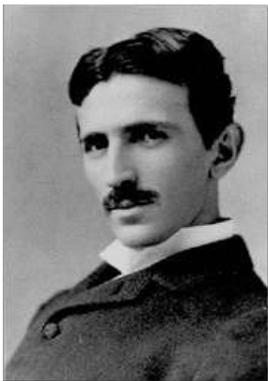
# 7 CIRCUITI ELETTRICI IN REGIME SINUSOIDALE

Il primo generatore di corrente continua fu realizzato nel 1831 da Faraday; questo dispositivo era costituito da un disco di rame posto in rotazione tra le espansioni polari di una calamita. Collegando un rudimentale misuratore di corrente tra l'asse del disco ed il bordo, Faraday osservò la generazione di una corrente costante di intensità proporzionale alla velocità di rotazione del disco. Nel 1832 il costruttore di strumenti scientifici francese Hippolyte Pixii ponendo in rotazione un magnete permanente a forma di ferro di cavallo in prossimità di un'elettrocalamita realizzò il primo generatore di corrente alternata; questo primitivo dispositivo venne migliorato nel 1844 da Luigi Palmieri che sviluppò il primo generatore moderno di corrente alternata.

Intorno al 1880 l'energia prodotta attraverso i generatori di corrente continua aveva raggiunto un costo di molte volte inferiore a quella ottenuta attraverso le pile elettriche, tuttavia l'industria elettrotecnica incontrava notevoli difficoltà nel trasporto a distanza della corrente generata. Nondimeno, con l'invenzione di Thomas Alva Edison della lampadina ad incandescenza nel 1879, l'illuminazione elettrica cominciò progressivamente a sostituire quella a gas nei centri urbani delle grandi città. Tuttavia, a causa della caduta di tensione lungo i cavi il sistema di elettrificazione di Edison, basato sulla corrente continua, richiedeva l'installazione di generatori di corrente a distanze di circa un chilometro l'uno dall'altro. Consapevole dei vantaggi della corrente alternata, dovuti essenzialmente alla possibilità di variane l'ampiezza con elevati rendimenti per mezzo di trasformatori, nel 1888 il fisico di origine croata Nikola Tesla propose all'imprenditore George Westinghouse una rete elettrica basata su questo tipo di corrente. Contemporaneamente, per



Thomas Alva Edison



Nikola Tesla

garantire il funzionamento degli impianti industriali con la corrente alternata, Tesla perfezionò il motore a corrente alternata sviluppato da Galileo Ferraris nel 1885 che utilizzava un campo magnetico rotante ottenuto da due bobine ortogonali, comandate da correnti opportunamente sfasate per trascinare un indotto costituito da un elettromagnete. La competizione tra i due sistemi di elettrificazione si concluse col favore della corrente alternata nel 1895 quando fu inaugurata la prima centrale idroelettrica della potenza di poco più di  $300\text{ kW}$  presso le cascate del Niagara, collegata ad una rete in grado di trasportare energia con basse perdite sino alla città di Buffalo distante circa  $30\text{ km}$

dall'impianto.

Lo studio dei circuiti sollecitati attraverso generatori che erogano forze elettromotrici variabili sinusoidalmente nel tempo oltre ad essere importante dal punto di vista pratico riveste particolare interesse anche dal punto di vista teorico; come si vedrà nel seguito un qualsiasi segnale reale periodico può essere rappresentato come la composizione di infiniti segnali sinusoidali, per cui lo



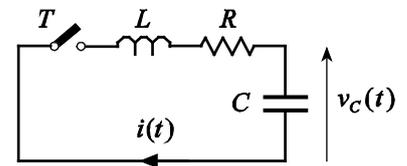
Interno della centrale elettrica delle cascate del Niagara, in basso a destra sono visibili i generatori di corrente alternata (*alternatori*) progettati da Tesla.

studio delle eccitazioni sinusoidali rappresenta il punto di partenza per uno studio più generale dei circuiti. Infine, il metodo generalmente adoperato per l'analisi dei circuiti eccitati sinusoidalmente si presta ad essere facilmente applicato ad altri sistemi stimolati nella stessa maniera.

Per affrontare tale studio occorre fare delle ipotesi relative alle grandezze in gioco in questo contesto; tali ipotesi, tuttavia, non risultano limitanti per un ampio intervallo di frequenze e per la maggior parte dei componenti in uso in tali circuiti. Si assume che in ogni istante le correnti sono le stesse che vi sarebbero nel caso stazionario, ossia il vettore densità di corrente dovrà essere considerato sinusoidale, quindi varranno la legge di Ohm e le leggi di Kirchhoff. Si riterrà inoltre che la corrente cambi nel tempo in modo sufficientemente lento perché tutte le sue variazioni si propaghino istantaneamente attraverso il circuito. Infine si assume che le caratteristiche capacitive, induttive e resistive della rete in esame siano localizzate in regioni di estensione limitata del circuito in esame.

## 7.1 Circuito RLC

La rete costituita dalla serie di una resistenza  $R$ , un'induttanza  $L$  ed una capacità  $C$  prende il nome di *circuito RLC*. Sia  $V_{C_0}$  la differenza di potenziale presente tra le armature del condensatore nell'istante iniziale in cui viene chiuso l'interruttore  $T$ . Indicando con  $v_C(t)$  la differenza di potenziale ai capi del condensatore al tempo generico, si ha:



$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + v_C(t) = 0, \quad (7.1)$$

dove, se  $q(t)$  indica la carica sul condensatore,  $v_C(t)$  vale:

$$v_C(t) = \frac{q(t)}{C} = V_{C_0} + \frac{1}{C} \int_0^t i(\xi) d\xi, \quad (7.2)$$

per cui, sostituendo nell'espressione precedente, si ha:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + V_{C_0} + \frac{1}{C} \int_0^t i(\xi) d\xi = 0,$$

e derivando ambo i membri segue:

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{LC} i(t) = 0. \quad (7.3)$$

Per integrare questa equazione differenziale poniamo  $i(t) = \lambda e^{\alpha t}$  dove, in generale, il coefficiente  $\alpha$  è un numero complesso; sostituendo tale espressione della corrente nella (7.3) si ottiene:

$$\alpha^2 \lambda e^{\alpha t} + \frac{R}{L} \alpha \lambda e^{\alpha t} + \frac{1}{LC} \lambda e^{\alpha t} = 0$$

e, dividendo ambo i membri per  $\lambda e^{\alpha t}$  si perviene all'equazione caratteristica:

$$\alpha^2 + \frac{R}{L}\alpha + \frac{1}{LC} = 0,$$

che ha soluzioni:

$$\alpha_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\Delta},$$

dove si è posto:

$$\Delta \equiv \frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC};$$

le corrispondenti soluzioni dell'equazione differenziale,  $e^{\alpha_1 t}$  e  $e^{\alpha_2 t}$ , sono due soluzioni indipendenti e di conseguenza è soluzione anche una loro combinazione lineare:

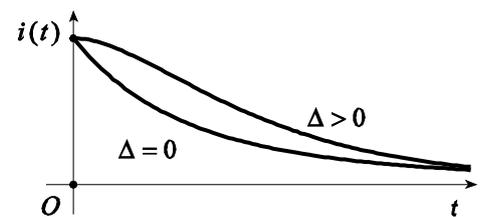
$$i(t) = a e^{\alpha_1 t} + b e^{\alpha_2 t}.$$

Si noti che, siccome  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  sono complessi, anche  $e^{\alpha_1 t}$  e  $e^{\alpha_2 t}$  lo sono, così, poiché  $i(t)$  deve essere una quantità reale in quanto suscettibile di misura, necessariamente  $a$  e  $b$  devono essere complessi. In relazione al segno di  $\Delta$  si hanno tre differenti soluzioni dell'equazione differenziale. Se  $\Delta > 0$ , ovvero se  $R > 2\sqrt{L/C}$ , allora  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  sono dei numeri reali negativi, così la soluzione è la somma di due esponenziali decrescenti:

$$i(t) = a e^{-|\alpha_1|t} + b e^{-|\alpha_2|t}.$$

Se  $\Delta = 0$ , ovvero se  $R = 2\sqrt{L/C}$ , allora  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  sono reali e coincidenti e valgono, in particolare,  $-R/(2L)$ , così si prova che:

$$i(t) = (c + kt) e^{-\frac{R}{2L}t}.$$



Infine, se  $\Delta < 0$ , ovvero se  $R < 2\sqrt{L/C}$ , allora  $\alpha_1$  e  $\alpha_2$  sono complessi, pertanto, se si pone:

$$\omega_0^2 \equiv -\Delta = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2},$$

è possibile scrivere:

$$\alpha_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm j\omega_0$$

così, sostituendo nell'espressione di  $i(t)$  si ha<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} i(t) &= a e^{-\frac{R}{2L}t} e^{j\omega_0 t} + b e^{-\frac{R}{2L}t} e^{-j\omega_0 t} = \\ &= e^{-\frac{R}{2L}t} \left[ a \cos(\omega_0 t) + ja \sin(\omega_0 t) + b \cos(\omega_0 t) - jb \sin(\omega_0 t) \right] = \\ &= e^{-\frac{R}{2L}t} \left[ (a+b) \cos(\omega_0 t) + j(a-b) \sin(\omega_0 t) \right], \end{aligned}$$

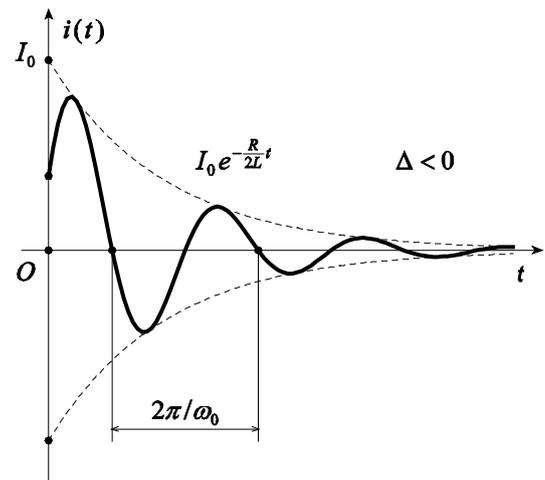
posto quindi:

$$\begin{aligned} a+b &\equiv I_0 \sin \phi, \\ j(a-b) &\equiv I_0 \cos \phi, \end{aligned}$$

segue:

$$\begin{aligned} i(t) &= I_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \left[ \cos(\omega_0 t) \sin \phi + \sin(\omega_0 t) \cos \phi \right] = \\ &= I_0 e^{-\frac{R}{2L}t} \sin(\omega_0 t + \phi). \end{aligned}$$

Si osservi che, indipendentemente dal segno del discriminante  $\Delta$ , la corrente  $i(t)$  si annulla sempre nel limite  $t \rightarrow \infty$ .



## 7.2 Bilanci energetici nel circuito $LC$

Il circuito  $RLC$  nel limite ideale in cui  $R$  è nulla è detto *circuito LC*, in tale caso l'equazione differenziale che lo descrive si ricava da quella del circuito  $RLC$  (7.3) ponendo  $R$  uguale a zero:

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC} i(t) = 0,$$

la cui soluzione è:

$$i(t) = I_0 \sin(\omega_0 t + \phi), \quad (7.4)$$

con:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \quad (7.5)$$

<sup>1</sup> Si fa uso della formula di Eulero:

$$e^{j\phi} = \cos \phi + j \sin \phi.$$

dove  $\omega_0$  prende il nome di *pulsazione di oscillazione libera* del circuito *RLC*. Le due costanti,  $\phi$  e  $I_0$ , sono ricavate a partire dalle condizioni iniziali. Assumendo che all'istante iniziale la bobina non sia percorsa da corrente, si ha:

$$\phi = 0.$$

Poiché questo circuito è privo di elementi dissipativi, il valore massimo dell'energia immagazzinata nella bobina,  $I_0^2 L/2$ , deve essere uguale al valore massimo dell'energia immagazzinata nel condensatore,  $V_{C_0}^2 C/2$ , essendo  $V_{C_0}$  la differenza di potenziale presente all'istante iniziale tra le armature del condensatore; pertanto:

$$I_0 = V_{C_0} \omega_0 C. \quad (7.6)$$

La differenza di potenziale ai capi del condensatore per  $\phi = 0$  si ottiene dalla (7.1) per  $R = 0$ , sostituendo a  $i(t)$  la sua espressione dalla (7.4) con la posizione (7.6):

$$v_C(t) = -L \frac{di(t)}{dt} = -LI_0 \omega_0 \cos(\omega_0 t) = -V_{C_0} LC \omega_0^2 \cos(\omega_0 t) = -V_{C_0} \cos(\omega_0 t),$$

così l'energia immagazzinata istantaneamente nel condensatore è:

$$U_e(t) = \frac{1}{2} C v_C^2(t) = \frac{1}{2} C V_{C_0}^2 \cos^2(\omega_0 t),$$

mentre l'energia immagazzinata istantaneamente nella bobina è:

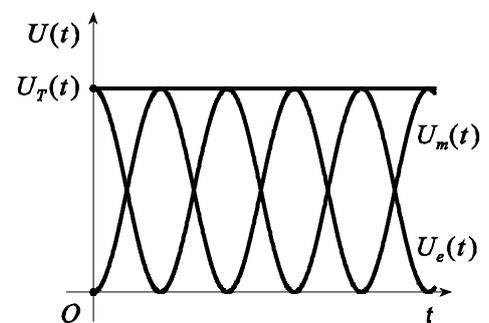
$$U_m(t) = \frac{1}{2} L i^2(t) = \frac{1}{2} L I_0^2 \sin^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2} C V_{C_0}^2 \sin^2(\omega_0 t),$$

e l'energia totale immagazzinata istantaneamente nel circuito *LC* è:

$$U_T(t) = U_e(t) + U_m(t) = \frac{1}{2} C V_{C_0}^2 \cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2} C V_{C_0}^2 \sin^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2} C V_{C_0}^2,$$

cioè pari all'energia immagazzinata nel condensatore all'istante iniziale. In figura sono mostrati i grafici delle funzioni  $U_e(t)$ ,  $U_m(t)$  e della loro somma  $U_T(t)$ .

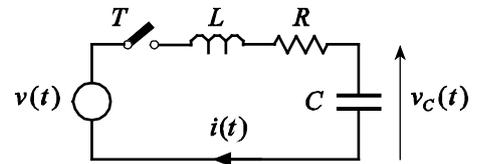
L'osservazione che la scarica di una bottiglia di Leida non consiste nel solo passaggio di elettricità da un'armatura all'altra ma da una serie di oscillazioni smorzate fu fatta da Henry nel 1842. Sebbene non conoscesse tale studio, Hermann von Helmholtz adottò questa ipotesi nella formulazione del principio di conservazione dell'energia. Il processo di scarica fu studiato analiticamente da Thomson nel 1855 che, utilizzando la teoria del potenziale, identificò le circostanze in cui si manifestava la scarica oscillatoria e trovò l'espressione (7.5) della pulsazione di oscillazione. Infine nel 1869 Helmholtz provò che si potevano ottenere delle oscillazioni elettriche in una bobina collegata alle armature di un condensatore.



### 7.3 Circuito *RLC* forzato

Supponiamo di aggiungere un generatore di forza elettromotrice sinusoidale  $v(t)$ , di pulsazione  $\omega$ , alla serie dei componenti che costituiscono il circuito *RLC*. Se:

$$v(t) = V_0 \cos(\omega t), \quad (7.7)$$



allora l'equazione che descrive il nuovo circuito è:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + v_c(t) = v(t).$$

Sostituendo a  $v_c(t)$  e a  $v(t)$  le loro espressioni, rispettivamente dalle (7.2) e (7.7), e riordinando, si ha:

$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) + \frac{1}{LC} \int_0^t i(\xi) d\xi = \frac{V_0}{L} \cos(\omega t) - \frac{V_{C0}}{L}. \quad (7.8)$$

L'equazione che esprime la legge di variazione della differenza di potenziale ai capi del condensatore si ricava derivando ambo i membri dell'equazione integrale (7.2) che lega  $v_c(t)$  a  $i(t)$ :

$$\frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{i(t)}{C},$$

sostituendo  $i(t)$  da tale equazione nella (7.8) si ha:

$$\frac{d^2v_c(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dv_c(t)}{dt} + \frac{1}{LC} v_c(t) = \frac{V_0}{LC} \cos(\omega t) - \frac{V_{C0}}{LC}. \quad (7.9)$$

L'equazione integro-differenziale (7.8) che stabilisce la legge di variazione della corrente attraverso il circuito e l'equazione differenziale (7.9) che stabilisce la legge di variazione della differenza di potenziale ai capi del condensatore, definite le opportune condizioni iniziali, possono essere risolte facendo uso dei tradizionali metodi, così come si è fatto per il circuito privo di sollecitazione. Tuttavia nel caso di stimoli sinusoidali conviene far uso di un metodo particolare, introdotto dall'ingegnere tedesco Charles Proteus Steinmetz nel 1893, la cui applicazione si rivela particolarmente efficace in tale ambito.



Charles Proteus Steinmetz

## 7.4 Metodo simbolico

A partire dall'equazione differenziale:

$$a \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + b \frac{dy(t)}{dt} + cy(t) = f(t) \quad (7.10)$$

consideriamo la nuova equazione che si ottiene aggiungendo al secondo membro della (7.10) la funzione  $yg(t)$

$$a \frac{d^2 w(t)}{dt^2} + b \frac{dw(t)}{dt} + cw(t) = f(t) + yg(t). \quad (7.11)$$

Si noti che si è fatto uso di un simbolo diverso,  $w(t)$ , per rappresentare la soluzione di questa equazione che, in generale, è diversa dalla soluzione  $y(t)$  della (7.10). La funzione  $w(t)$  è, in generale, complessa e pertanto può essere espressa come:

$$w(t) = u(t) + jv(t),$$

dove  $u(t)$  e  $v(t)$  sono due funzioni reali. La funzione  $w(t)$  prende il nome di *estensione complessa* di  $u(t)$ . Sostituendo nella (7.11), si ha:

$$a \left[ \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + j \frac{d^2 v(t)}{dt^2} \right] + b \left[ \frac{du(t)}{dt} + j \frac{dv(t)}{dt} \right] + c [u(t) + jv(t)] = f(t) + yg(t)$$

ed uguagliando, quindi, le parti reali e quelle immaginarie, seguono le identità:

$$a \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + b \frac{du(t)}{dt} + cu(t) = f(t),$$

$$a \frac{d^2 v(t)}{dt^2} + b \frac{dv(t)}{dt} + cv(t) = g(t),$$

ovvero la funzione  $u(t)$  è soluzione dell'equazione originaria (7.10). Queste considerazioni sono la base della regola di soluzione di equazioni differenziali detta *metodo simbolico*. A partire da una certa equazione, (7.10), scritta in forma normale, si costruisce una seconda equazione (7.11), sommando una funzione  $yg(t)$  al secondo membro; per una conveniente scelta di  $g(t)$ , l'equazione (7.11) risulta più semplice da risolvere della (7.10) ed è caratterizzata dal fatto che la parte reale  $u(t)$  della sua soluzione,  $w(t)$ , è soluzione dell'equazione (7.10). L'identificazione della forma funzionale di  $g(t)$  dipende dalla espressione di  $f(t)$ ; se, ad esempio, risulta:

$$f(t) = K \cos(\omega t),$$

allora è opportuno che sia

$$g(t) = K \sin(\omega t),$$

così:

$$f(t) + jg(t) = K \cos(\omega t) + jK \sin(\omega t) = Ke^{j\omega t}.$$

Pertanto, in questo caso, per ottenere l'equazione (7.11) a partire dalla (7.10), l'applicazione del metodo corrisponde alla sostituzione formale, nella (7.10) del termine  $\cos(\omega t)$  con  $e^{j\omega t}$ .

## 7.5 Soluzione del circuito *RLC* forzato a regime

Applichiamo il metodo simbolico all'equazione (7.8); pertanto sostituiamo formalmente  $\cos(\omega t)$  con  $e^{j\omega t}$ :

$$\frac{d\bar{\mathcal{Z}}(t)}{dt} + \frac{R}{L}\bar{\mathcal{Z}}(t) + \frac{1}{LC} \int_0^t \bar{\mathcal{Z}}(\xi) d\xi = \frac{V_0}{L} e^{j\omega t} - \frac{V_{C0}}{L},$$

e deriviamo rispetto al tempo:

$$\frac{d^2\bar{\mathcal{Z}}(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{d\bar{\mathcal{Z}}(t)}{dt} + \frac{1}{LC} \bar{\mathcal{Z}}(t) = j\omega \frac{V_0}{L} e^{j\omega t}. \quad (7.12)$$

La soluzione  $\bar{\mathcal{Z}}(t)$  di questa equazione può essere espressa nella forma  $\bar{I}(t) + \bar{I}_o(t)$  dove  $\bar{I}_o(t)$  indica la soluzione dell'equazione omogenea associata alla (7.12):

$$\frac{d^2\bar{I}_o(t)}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{d\bar{I}_o(t)}{dt} + \frac{1}{LC} \bar{I}_o(t) = 0, \quad (7.13)$$

mentre  $\bar{I}(t)$  rappresenta una soluzione particolare della (7.12). L'equazione omogenea (7.13), uguale alla (7.3), è già stata risolta nell'ambito dello studio del circuito *RLC* non forzato e, in particolare, si è verificato che la corrispondente soluzione si annulla nel limite dei tempi lunghi. Essendo interessati allo studio del circuito *RLC* a regime, quando il transitorio si può ritenere esaurito, non prendiamo in considerazione il termine  $\bar{I}_o(t)$  dell'espressione di  $\bar{\mathcal{Z}}(t)$ .

Per stabilire l'espressione di  $\bar{I}(t)$  supponiamo che sia:

$$\bar{I}(t) = \bar{I}_0 e^{j\omega t}, \quad (7.14)$$

sostituendo nella (7.12) si ha:

$$-\omega^2 \bar{I}_0 e^{j\omega t} + \frac{R}{L} j\omega \bar{I}_0 e^{j\omega t} + \frac{1}{LC} \bar{I}_0 e^{j\omega t} = j\omega \frac{V_0}{L} e^{j\omega t},$$

da cui, dividendo per  $e^{j\omega t}$  e sviluppando, segue:

$$\bar{I}_0 = \frac{j\omega V_0}{L} \frac{1}{-\omega^2 + j\omega \frac{R}{L} + \frac{1}{LC}} = \frac{V_0}{\frac{-\omega^2 L}{j\omega} + \frac{j\omega R}{L} \frac{L}{j\omega} + \frac{1}{LC} \frac{L}{j\omega}} = \frac{V_0}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}. \quad (7.15)$$

Poniamo quindi:

$$\bar{Z} \equiv R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right), \quad (7.16)$$

allora, indicando con  $Z$  e  $\phi$  rispettivamente il modulo e l'argomento di  $\bar{Z}$ :

$$Z \equiv |\bar{Z}| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

$$\tan \phi \equiv \frac{1}{R} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right), \quad (7.17)$$

l'espressione (7.14) per  $\bar{I}(t)$  diventa:

$$\bar{I}(t) = \bar{I}_0 e^{j\omega t} = \frac{V_0}{\bar{Z}} e^{j\omega t} = \frac{V_0 e^{j\omega t}}{Z e^{j\phi}} = \frac{V_0}{Z} e^{j(\omega t - \phi)}. \quad (7.18)$$

Alla luce dell'applicazione del metodo simbolico, la corrente  $i(t)$  si valuta determinando la parte reale di  $\bar{I}(t)$ :

$$i(t) = \mathcal{R}e\{\bar{I}(t)\} = \mathcal{R}e\left\{\frac{V_0}{Z} e^{j(\omega t - \phi)}\right\} = \frac{V_0}{Z} \cos(\omega t - \phi);$$

**Esempio:** La differenza di potenziale ai capi del condensatore  $v_c(t)$  può essere determinata applicando lo stesso metodo all'equazione (7.9), tuttavia, poiché:

$$v_c(t) = V_{c0} + \frac{1}{C} \int_0^t i(\xi) d\xi,$$

facendo uso del metodo simbolico, si ha:

$$\bar{V}_c(t) = V_{c0} + \frac{1}{C} \int_0^t \bar{I}(\xi) d\xi;$$

in questa espressione  $V_{c0}$  e l'addendo derivante dall'estremo inferiore di integrazione determineranno un termine il cui effetto è limitato alla durata del transitorio, pertanto non ne teniamo conto essendo interessati alla soluzione a regime; così, sostituendo a  $\bar{I}(t)$  la sua espressione (7.14), si ha:

$$\bar{V}_c(t) = \frac{1}{C} \int_0^t \bar{I}(\xi) d\xi = \frac{1}{C} \int_0^t \bar{I}_0 e^{j\omega \xi} d\xi = \frac{1}{j\omega C} \bar{I}_0 e^{j\omega t} = \frac{\bar{I}(t)}{j\omega C},$$

la cui parte reale, dalla relazione (7.18), vale:

$$v_C(t) = \mathcal{R}_e\{\bar{V}_C(t)\} = \mathcal{R}_e\left\{\frac{\bar{I}(t)}{j\omega C}\right\} = \mathcal{R}_e\left\{\frac{V_0}{Z} e^{j(\omega t - \phi)} \frac{1}{\omega C e^{j\frac{\pi}{2}}}\right\} = \mathcal{R}_e\left\{\frac{V_0}{Z} \frac{1}{\omega C} e^{j(\omega t - \phi - \frac{\pi}{2})}\right\} = \frac{V_0}{Z} \frac{1}{\omega C} \cos\left(\omega t - \phi - \frac{\pi}{2}\right).$$

A causa della scarsa preparazione matematica degli ingegneri elettrotecnici della fine del 19° secolo, il metodo simbolico non fu immediatamente accettato. Per migliorarne la comprensione Steinmetz, a partire dal 1897, pubblicò diversi manuali in cui il metodo era applicato in varie circostanze, così, attraverso tali scritti e le lezioni tenute, il suo metodo fu gradualmente adottato nello studio dei circuiti eccitati sinusoidalmente.

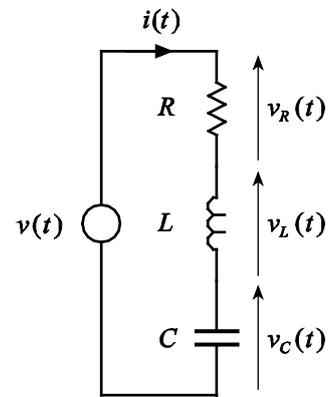
## 7.6 Impedenza

Nel circuito rappresentato in figura, indicando con  $v_R(t)$ ,  $v_L(t)$ , e  $v_C(t)$  rispettivamente le differenze di potenziale ai capi della resistenza, della bobina e del condensatore, risulta:

$$v_R(t) = Ri(t),$$

$$v_L(t) = L \frac{di(t)}{dt},$$

$$v_C(t) = V_{C0} + \frac{1}{C} \int_0^t i(\xi) d\xi.$$



Per la seconda legge di Kirchhoff, se  $v(t)$  è la forza elettromotrice erogata dal generatore data dalla (7.7), si ha:

$$v(t) = v_R(t) + v_L(t) + v_C(t). \quad (7.19)$$

La descrizione del circuito in esame può essere svolta in maniera equivalente attraverso l'uso del metodo simbolico. Moltiplicando ambo i membri della relazione (7.15) per  $e^{j\omega t}$  e sviluppando, si ottiene:

$$V_0 e^{j\omega t} = R \bar{I}_0 e^{j\omega t} + j\omega L \bar{I}_0 e^{j\omega t} + \frac{1}{j\omega C} \bar{I}_0 e^{j\omega t};$$

dalla (7.14) e considerando inoltre che  $V_0 e^{j\omega t}$  rappresenta l'estensione complessa della tensione (7.7), l'espressione precedente si può esprimere come<sup>2</sup>:

$$\bar{V} = R \bar{I} + j\omega L \bar{I} + \frac{1}{j\omega C} \bar{I} = \bar{V}_R + \bar{V}_L + \bar{V}_C. \quad (7.20)$$

Tale identità può essere riguardata come l'estensione complessa della relazione (7.19), in cui

<sup>2</sup> Per comodità di scrittura si sottintendono le dipendenze temporali delle estensioni complesse.

$$\begin{aligned}\bar{V}_R &\equiv R\bar{I}, \\ \bar{V}_L &\equiv j\omega L\bar{I}, \\ \bar{V}_C &\equiv \frac{1}{j\omega C}\bar{I},\end{aligned}$$

rappresentano, rispettivamente, le estensioni complesse delle funzioni  $v_R(t)$ ,  $v_L(t)$ , e  $v_C(t)$ .

Ponendo in evidenza la corrente  $\bar{I}$  nella relazione (7.20), si ottiene:

$$\bar{V} = \left( R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) \bar{I} = \bar{Z}\bar{I}.$$

La quantità  $\bar{Z}$  pari a  $R + j\omega L + 1/(j\omega C)$  prende il nome di *impedenza* del circuito in esame. Si osservi che, a differenza della resistenza di un circuito, l'impedenza non rappresenta una caratteristica intrinseca di un circuito poiché dipende dalla pulsazione dell'eccitazione sinusoidale applicata. L'unità di misura del modulo dell'impedenza è l'Ohm. La relazione

$$\bar{V} = \bar{Z}\bar{I},$$

che lega l'estensione complessa della forza elettromotrice applicata all'estensione complessa della corrente attraverso l'impedenza è detta *legge di Ohm generalizzata*. Dall'esame della forma di  $\bar{Z}$  è possibile ricavare l'espressione delle impedenze associate alla resistenza, alla bobina ed al condensatore:

$$\begin{aligned}\bar{Z}_R &\equiv R \\ \bar{Z}_L &\equiv j\omega L = jX_L,\end{aligned}\tag{7.21}$$

$$\bar{Z}_C \equiv \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} = -jX_C;\tag{7.22}$$

dove  $X_L$  pari a  $\omega L$  e  $X_C$  pari a  $1/(\omega C)$  prendono il nome, rispettivamente, di *reattanza induttiva* e *reattanza capacitiva*. Alla luce dell'espressione della legge di Ohm generalizzata e della validità delle leggi di Kirchhoff è possibile dedurre che lo studio delle reti soggette ad uno stimolo di tipo sinusoidale procede in maniera analoga al caso degli stimoli continui, purché si adoperi il concetto di impedenza per la descrizione dei componenti della rete. Pertanto il collegamento in serie di  $n$  impedenze  $\bar{Z}_1, \bar{Z}_2, \dots, \bar{Z}_n$  è equivalente ad un'unica impedenza  $\bar{Z}$  di valore pari a:

$$\bar{Z} = \sum_{k=1}^n \bar{Z}_k,$$

mentre se le  $n$  impedenze sono connesse in parallelo risulta:

$$\bar{Z} = \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{\bar{Z}_k}}.$$

Osserviamo infine che, in generale, un'impedenza può essere espressa nella forma:

$$\bar{Z} \equiv R + jX,$$

dove  $X$  è detta, in generale, *reattanza*. L'inverso di un'impedenza:

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}}$$

è denominato *ammettenza*. I tre elementi più semplici che costituiscono l'impedenza sono la resistenza, l'induttanza e la capacità; nel seguito analizzeremo separatamente le caratteristiche di ciascuno di questi componenti.

### 7.6.1 Impedenza resistiva

Consideriamo una resistenza  $R$  percorsa da una corrente:

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi),$$

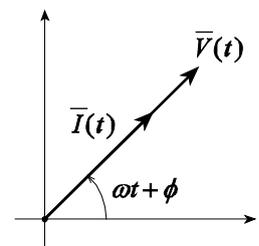
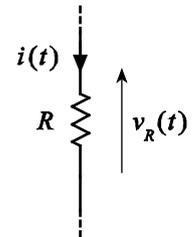
dalla legge di Ohm segue:

$$v_R(t) = Ri(t) = RI_0 \cos(\omega t + \phi) = V_0 \cos(\omega t + \phi),$$

dove si è posto:

$$V_0 \equiv RI_0.$$

Il fatto che l'impedenza associata ad un resistore coincida con la sua resistenza fa sì che le relazioni tradizionali forniscano il legame tra corrente e differenza di potenziale senza dover ricorrere al metodo simbolico. Ciò implica, per altro, che la differenza di potenziale ai capi della resistenza risulta in fase con la corrente che la percorre.



### 7.6.2 Impedenza induttiva

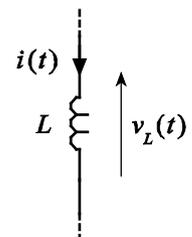
Consideriamo una bobina di induttanza  $L$  percorsa dalla corrente:

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi);$$

posto

$$\bar{I}(t) = I_0 e^{j(\omega t + \phi)},$$

siccome l'impedenza associata alla bobina vale:



$$\bar{Z}_L \equiv j\omega L = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}},$$

l'estensione complessa della differenza di potenziale ai suoi capi è:

$$\bar{V}_L = \bar{I} \bar{Z}_L = I_0 e^{j(\omega t + \phi)} \omega L e^{j\frac{\pi}{2}} = \omega L I_0 e^{j(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2})} = V_0 e^{j(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2})},$$

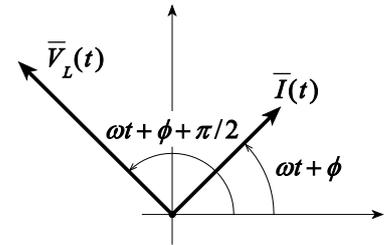
dove si è posto:

$$V_0 \equiv \omega L I_0.$$

I due termini:

$$\bar{I}(t) = I_0 e^{j(\omega t + \phi)},$$

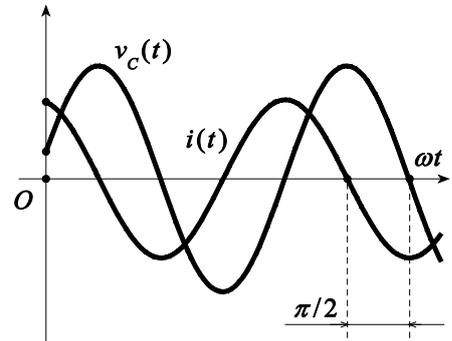
$$\bar{V}_L = V_0 e^{j(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2})},$$



possono essere considerati rappresentativi di due fasori (si veda l'Appendice B) che spiccano dal medesimo punto e ruotano nella stessa direzione, convenzionalmente antioraria, con velocità angolare pari a  $\omega$ , mantenendosi uno,  $\bar{V}_L$ , sfasato in anticipo di  $90^\circ$  rispetto all'altro,  $\bar{I}$ . Per ricavare la differenza di potenziale  $v_L(t)$  ai capi della bobina valutiamo la parte reale di  $\bar{V}$ :

$$v_L(t) = \mathcal{R}_e\{\bar{V}_L\} = \mathcal{R}_e\left\{V_0 e^{j(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2})}\right\} = V_0 \cos\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right)$$

quindi, la differenza di potenziale sinusoidale ai capi della bobina ha ampiezza pari a  $V_0$  ed è sfasata in anticipo di  $90^\circ$  rispetto alla corrente  $i(t)$ . Dall'espressione di  $V_0$  segue inoltre che:



$$\lim_{\omega \rightarrow 0} V_0 = \lim_{\omega \rightarrow 0} \omega L I_0 = 0,$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} I_0 = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{V_0}{\omega L} = 0;$$

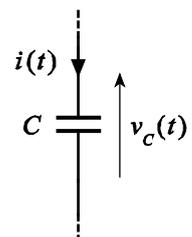
tali relazioni possono essere interpretate affermando che, nel limite di uno stimolo continuo ( $\omega \rightarrow 0$ ) la bobina agisce come un cortocircuito mentre, nel limite delle alte frequenze ( $\omega \rightarrow \infty$ ) la bobina si comporta come un circuito aperto.

### 7.6.3 Impedenza capacitiva

Consideriamo un condensatore di capacità  $C$  alimentato dalla corrente:

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi);$$

posto:



$$\bar{I}(t) = I_0 e^{j(\omega t + \phi)},$$

poiché l'impedenza associata al condensatore è:

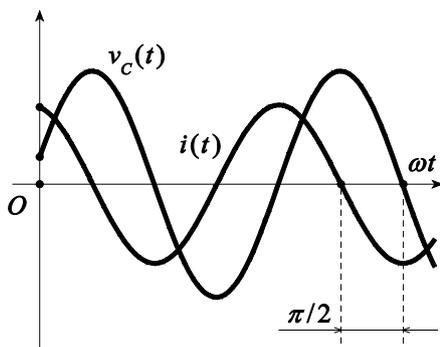
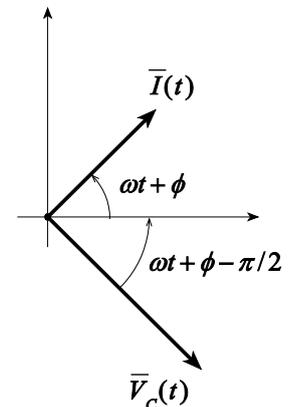
$$\bar{Z}_C = \frac{1}{j\omega C} = -j \frac{1}{\omega C} = \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}},$$

l'estensione complessa della differenza di potenziale ai suoi capi è:

$$\bar{V}_C = \bar{I} \bar{Z}_C = I_0 e^{j(\omega t + \phi)} \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}} = I_0 \frac{1}{\omega C} e^{j(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2})} = V_0 e^{j(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2})},$$

dove si è posto:

$$V_0 \equiv \frac{I_0}{\omega C}.$$



I termini:

$$\bar{I}(t) = I_0 e^{j(\omega t + \phi)},$$

$$\bar{V}_C = V_0 e^{j(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2})},$$

rappresentano due fasori, con  $\bar{V}_C$ , sfasato in ritardo di  $90^\circ$  rispetto a  $\bar{I}$ . La differenza di potenziale  $v_C(t)$  ai capi del condensatore vale:

$$v_C(t) = \mathcal{R}e\{\bar{V}_C\} = \mathcal{R}e\left\{V_0 e^{j(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2})}\right\} = V_0 \cos\left(\omega t + \phi - \frac{\pi}{2}\right),$$

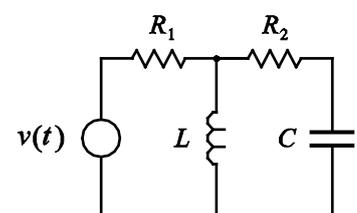
cioè tale differenza di potenziale ha ampiezza  $V_0$  ed è sfasata in ritardo di  $90^\circ$  relativamente alla corrente  $i(t)$ . Inoltre risulta:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} I_0 = \lim_{\omega \rightarrow 0} \omega C V_0 = 0,$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} V_0 = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{I_0}{\omega C} = 0;$$

ovvero, nel limite delle sollecitazioni continue il condensatore agisce come un circuito aperto, mentre, alle alte frequenze si comporta come un cortocircuito.

**Esempio:** Nel circuito di figura il generatore  $v(t)$  eroga una forza elettromotrice sinusoidale di ampiezza  $V_0$  pari a  $311V$  e pulsazione  $\omega$  di  $314 \text{ rad/s}$ . Stabiliamo



l'espressione della corrente che attraversa  $R_2$  nell'ipotesi che  $R_1$  e  $R_2$  valgano rispettivamente  $1 \Omega$  e  $2 \Omega$ ,  $L$  vale  $10 \text{ mH}$  e  $C$ ,  $12 \mu\text{F}$ . L'estensione complessa di  $v(t)$  è:

$$\bar{V} = V_0 e^{j\omega t},$$

così in corrispondenza nodo  $N$  risulta:

$$\bar{I}_3 = \bar{I}_1 + \bar{I}_2, \quad (7.23)$$

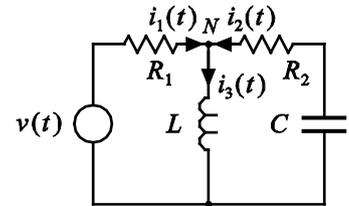
dove  $\bar{I}_1$ ,  $\bar{I}_2$  e  $\bar{I}_3$  rappresentano le estensioni complesse, rispettivamente, di  $i_1(t)$ ,  $i_2(t)$  e  $i_3(t)$ ; alla maglia comprendente il generatore,  $R_1$  e  $L$  e alla maglia comprendente  $L$ ,  $R_2$  e  $C$  si ha:

$$R_1 \bar{I}_1 + j\omega L \bar{I}_3 = V_0 e^{j\omega t}, \quad (7.24)$$

$$-j\omega L \bar{I}_3 - R_2 \bar{I}_2 - \frac{1}{j\omega C} \bar{I}_2 = 0. \quad (7.25)$$

Queste due equazioni sono formalmente identiche a quelle che si scriverebbero per un circuito in corrente continua, con l'associazione di una resistenza  $j\omega L$  all'induttanza  $L$  e di una resistenza  $1/(j\omega C)$  alla capacità  $C$ . Esprimiamo il sistema delle tre equazioni in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ R_1 & 0 & j\omega L \\ 0 & -R_2 - \frac{1}{j\omega C} & -j\omega L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \bar{I}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_0 e^{j\omega t} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$



allora l'estensione complessa della corrente  $i_2(t)$  vale:

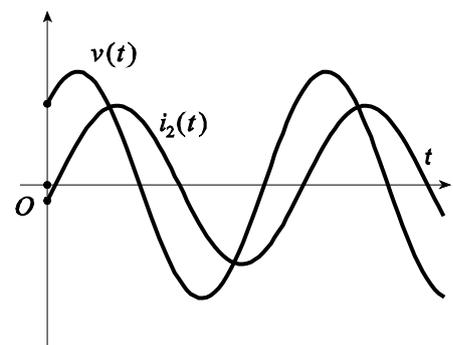
$$\begin{aligned} \bar{I}_2 &= \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ R_1 & V_0 e^{j\omega t} & j\omega L \\ 0 & 0 & -j\omega L \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ R_1 & 0 & j\omega L \\ 0 & -R_2 - \frac{1}{j\omega C} & -j\omega L \end{vmatrix}} = V_0 \frac{-j\omega L e^{j\omega t}}{R_1 R_2 + \frac{L}{C} + j\left(\omega L R_1 + \omega L R_2 - \frac{R_1}{\omega C}\right)} = \\ &= \frac{V_0}{R_1} \frac{e^{j\omega t}}{\left(\frac{1}{\omega^2 L C} - 1 - \frac{R_2}{R_1}\right) + j\left(\frac{1}{\omega R_1 C} + \frac{R_2}{\omega L}\right)}. \end{aligned}$$

Posto quindi:

$$I_{02} \equiv \frac{V_0}{R_1} \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{1}{\omega^2 L C} - 1 - \frac{R_2}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{1}{\omega R_1 C} + \frac{R_2}{\omega L}\right)^2}} \approx 1.1 \text{ A},$$

$$\vartheta \equiv \text{atan} \left( \frac{\frac{1}{\omega R_1 C} + \frac{R_2}{\omega L}}{\frac{1}{\omega^2 L C} - 1 - \frac{R_2}{R_1}} \right) \approx 73^\circ,$$

risulta:



$$i_2(t) = I_{02} \cos(\omega t - \vartheta).$$

In figura sono confrontati l'andamento di  $i_2(t)$  con quello di  $v(t)$ .

## 7.7 Risonanza

Consideriamo un circuito  $RLC$  soggetto ad una eccitazione sinusoidale:

$$v(t) = V_0 \cos(\omega t);$$

a regime la corrente  $i(t)$  attraverso la rete è data dall'espressione:

$$i(t) = \frac{V_0}{Z} \cos(\omega t - \phi) = I_0 \cos(\omega t - \phi),$$

in cui l'ampiezza  $I_0$  rappresenta il modulo della corrente complessa  $\bar{I}_0$  data dalla (7.15):

$$I_0 \equiv \frac{V_0}{Z} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}}. \quad (7.26)$$

L'ampiezza  $I_0$  presenta un massimo quando la pulsazione assume il valore  $\omega_0$  pari a:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad (7.27)$$

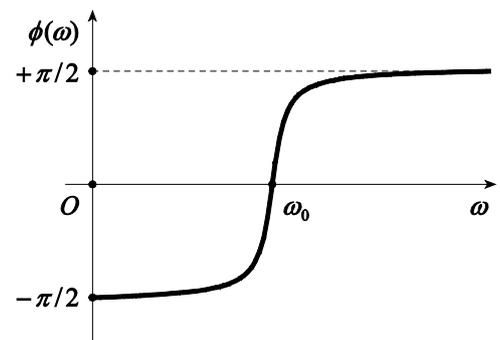
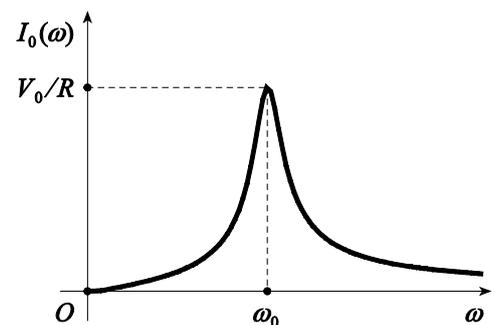
ovvero in corrispondenza della pulsazione di oscillazione libera del circuito. Relativamente a questo circuito  $\omega_0$  prende il nome di *pulsazione di risonanza*. Per  $\omega$  uguale a  $\omega_0$  si ha:

$$I_0(\omega_0) = \frac{V_0}{R},$$

inoltre, dalla (7.17) segue:

$$\phi(\omega_0) = 0,$$

così deduciamo che in corrispondenza della pulsazione di risonanza il circuito ha un comportamento di tipo resistivo, nel senso che la corrente  $i(t)$  attraverso il circuito risulta in fase con la tensione applicata  $v(t)$ . La reattanza di questo circuito vale:



$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C};$$

per  $\omega < \omega_0$  risulta:

$$X < 0;$$

per cui l'impedenza  $\bar{Z}$  può essere espressa come:

$$\bar{Z} = R - j|X|;$$

d'altra parte, dalla (7.22) osserviamo che il condensatore è caratterizzato da un'impedenza negativa, così concludiamo che per  $\omega < \omega_0$  il circuito  $RLC$  è visto dal generatore come la serie di una resistenza con un condensatore  $C'$  di valore<sup>3</sup>:

$$C' \equiv \frac{C}{1 - \omega^2 LC};$$

per  $\omega > \omega_0$  risulta:

$$X > 0;$$

per cui l'impedenza  $\bar{Z}$  può essere espressa come:

$$\bar{Z} = R + jX;$$

d'altra parte, dalla (7.21) osserviamo che l'induttanza è caratterizzata da un'impedenza positiva, così concludiamo che per  $\omega > \omega_0$  il circuito  $RLC$  è visto dal generatore come la serie di una resistenza con una bobina  $L'$  di valore<sup>4</sup>:

$$L' \equiv \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega^2 C}.$$

<sup>3</sup> Infatti l'impedenza (7.16) del circuito  $RLC$  può esprimersi come:

$$\bar{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R - j\frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{C} - \omega^2 L\right) = R - j\frac{1}{\omega}\frac{1 - \omega^2 LC}{C} = R - j\frac{1}{\omega\frac{C}{1 - \omega^2 LC}} = R - j\frac{1}{\omega C'},$$

in cui  $C'$ , pari a  $C/(1 - \omega^2 LC)$  è positivo, siccome  $\omega < \omega_0$ .

<sup>4</sup> Infatti l'impedenza (7.16) del circuito  $RLC$  può esprimersi come:

$$\bar{Z} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = R + j\omega\left(L - \frac{1}{\omega^2 C}\right) = R + j\omega\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega^2 C} = R + j\omega L',$$

in cui  $L'$ , pari a  $(\omega^2 LC - 1)/\omega^2 C$  è positivo, siccome  $\omega > \omega_0$ .

## 7.8 Fattore di merito

Sia  $U_M$  la massima energia che può immagazzinare un circuito risonante<sup>5</sup> e  $U_D$  l'energia dissipata in un periodo alla pulsazione di risonanza dallo stesso circuito; si definisce *fattore di merito* del circuito in questione la quantità:

$$Q \equiv 2\pi \frac{U_M}{U_D}, \quad \omega = \omega_0,$$

Questo fattore fornisce un indice di come il circuito impiega l'energia che gli viene fornita dal generatore. Per stabilire il fattore di merito del circuito *RLC* fino ad ora esaminato consideriamo l'energia immagazzinata nella bobina; se la corrente  $i(t)$  che percorre il circuito è:

$$i(t) = I \sin(\omega t),$$

la massima energia immagazzinata nel circuito è:

$$U_M = \frac{1}{2} LI^2.$$

Per valutare l'energia dissipata in un periodo, osserviamo che l'unico elemento che dissipa energia è la resistenza  $R$  che, in corrispondenza della corrente  $i(t)$ , dissiperà istantaneamente una potenza:

$$p(t) = Ri^2(t) = RI^2 \sin^2(\omega t),$$

così l'energia dissipata in un periodo, alla pulsazione di risonanza è:

$$U_D = \int_0^{T_0} p(t) dt = RI^2 \int_0^{T_0} \sin^2(\omega_0 t) dt = RI^2 \frac{T_0}{2} = \frac{RI^2 \pi}{\omega_0},$$

dove  $T_0$  indica il periodo  $2\pi/\omega_0$  alla pulsazione di risonanza. Dalla definizione segue quindi che il fattore di merito del circuito *RLC* vale:

$$Q = 2\pi \frac{U_M}{U_D} = 2\pi \frac{\frac{1}{2} LI^2}{\frac{RI^2 \pi}{\omega_0}} = \frac{\omega_0 L}{R},$$

inoltre valendo la (7.27) risulta anche:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}. \quad (7.28)$$

---

<sup>5</sup> Queste considerazioni sono di carattere generale, nel senso che si applicano a tutti i circuiti caratterizzati da una frequenza di risonanza e pertanto detti *circuiti risonanti*.

La grandezza testé introdotta oltre a caratterizzare il circuito risonante dal punto di vista energetico, consente di mettere in luce altri aspetti relativi alla funzionalità del circuito. Facendo uso del metodo simbolico determiniamo le differenze di potenziale ai capi della bobina e del condensatore del circuito  $RLC$  in corrispondenza di un'eccitazione sinusoidale di pulsazione pari a quella di risonanza, risulta:

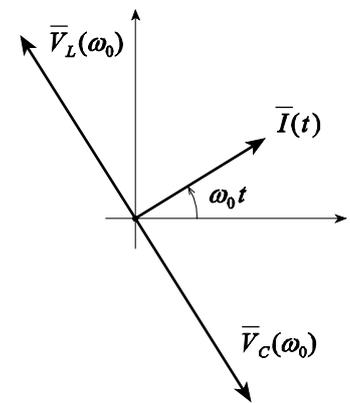
$$\bar{V}_L(\omega_0) = \bar{Z}_L(\omega_0)\bar{I}(\omega_0) = j\omega_0 L \frac{V_0}{R} e^{j\omega_0 t} = jQV_0 e^{j\omega_0 t} = QV_0 e^{j\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)},$$

$$\bar{V}_C(\omega_0) = \bar{Z}_C(\omega_0)\bar{I}(\omega_0) = \frac{1}{j\omega_0 C} \frac{V_0}{R} e^{j\omega_0 t} = -jQV_0 e^{j\omega_0 t} = QV_0 e^{j\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)},$$

cioè:

$$v_L(t) = QV_0 \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$v_C(t) = QV_0 \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right).$$



Quindi, alla risonanza le differenze di potenziale ai capi della bobina e del condensatore hanno un'ampiezza  $Q$  volte maggiore dell'ampiezza della forza elettromotrice applicata. D'altra parte, siccome le due tensioni oscillano mantenendosi sfasate tra loro di  $180^\circ$  (in *controfase*), la loro somma risulta istante per istante nulla. Indichiamo genericamente con:

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \vartheta)$$

l'espressione della corrente nel circuito  $RLC$ , dove  $I_0$  è l'ampiezza e  $\vartheta$ , pari all'opposto  $-\phi$  dell'argomento dell'impedenza  $\bar{Z}$ , la fase. Queste due quantità possono essere espresse come<sup>6</sup>:

<sup>6</sup> Dalle relazioni (7.26), (7.27) e (7.28) segue:

$$I_0 \equiv \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{V_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{V_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC}\right)^2}} = \frac{V_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega \omega_0 LC}\right)^2}} =$$

$$= \frac{V_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}.$$

Dalla relazione (7.17), tenendo conto che la fase della corrente  $i(t)$  è opposta all'argomento dell'impedenza  $\bar{Z}$  e dalle relazioni (7.27) e (7.28) si ha:

$$\tan \vartheta = -\tan \phi = -\frac{1}{R} \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = -Q \left(\frac{\omega L}{\omega_0 L} - \frac{1}{\omega \omega_0 LC}\right) = -Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega \omega_0 LC}\right) = -Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right).$$

$$I_0 = \frac{V_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}, \quad (7.29)$$

$$\tan \vartheta = -Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right).$$

Convenzionalmente le pulsazioni  $\omega_1$  e  $\omega_2$  in corrispondenza delle quali  $I_0$  assume un valore pari a  $1/\sqrt{2}$  volte il suo massimo, cioè  $V_0/(R\sqrt{2})$ , definiscono gli estremi della *banda passante*  $\Delta\omega$ , intesa come l'intervallo:

$$\Delta\omega \equiv \omega_2 - \omega_1;$$

questo intervallo si può ricavare osservando che quando  $I_0$  è pari a  $V_0/(R\sqrt{2})$ , dalla (7.29) deve risultare:

$$Q \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = \pm 1,$$

da cui segue:

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q};$$

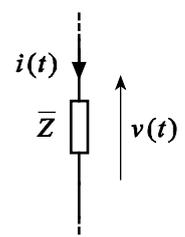
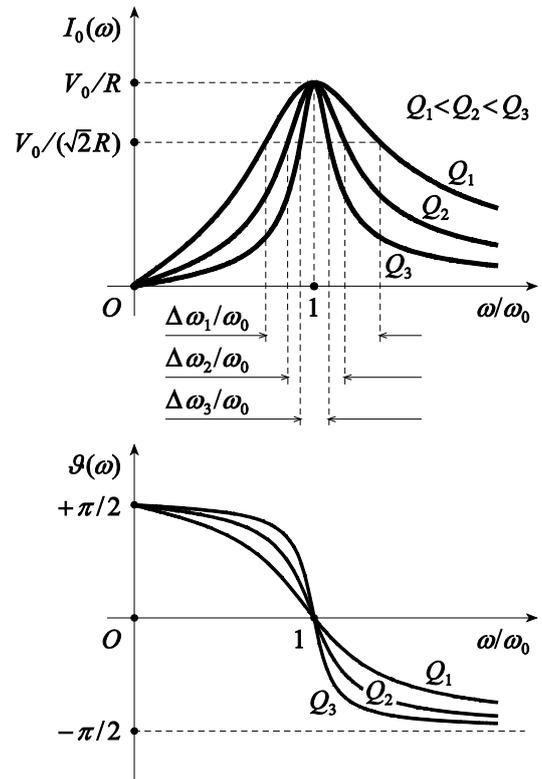
osserviamo pertanto che la curva di risonanza risulta tanto più "stretta", quanto più è grande il valore assunto dal fattore di merito. Il fenomeno della risonanza fu scoperto da Tesla nel 1890 nel corso dei suoi studi sui circuiti alimentati con tensioni sinusoidali ad alta frequenza; sfruttando tale effetto Tesla realizzò un dispositivo (*bobina di Tesla*) in grado di produrre altissime tensioni a frequenza elevata.

## 7.9 Potenze

La potenza istantanea fornita ad un generico carico da un generatore di forza elettromotrice  $v(t)$  che eroga una corrente  $i(t)$  è data dalla relazione:

$$w(t) = v(t)i(t);$$

convenzionalmente  $w(t) > 0$  corrisponde al trasferimento di energia dal generatore verso il carico mentre  $w(t) < 0$  corrisponde ad un flusso di energia nella direzione



opposta. Consideriamo una generica rete passiva, ovvero priva di generatori, e con due morsetti; sia  $\bar{Z}$  il rapporto tra l'estensione complessa  $\bar{V}$  della differenza di potenziale  $v(t)$  ai suoi morsetti e l'estensione complessa  $\bar{I}$  della corrente sinusoidale  $i(t)$  che la attraversa. Indicando con  $Z$  e  $\phi$  rispettivamente, il modulo e l'argomento di  $\bar{Z}$ , risulta:

$$\bar{Z} = Ze^{j\phi} = Z \cos \phi + jZ \sin \phi = R + jX,$$

dove si è posto:

$$\begin{aligned} R &\equiv Z \cos \phi, \\ X &\equiv Z \sin \phi. \end{aligned}$$

La corrente  $i(t)$  vale:

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t),$$

ed ha estensione complessa  $\bar{I}$  pari a  $I_0 e^{j\omega t}$ , pertanto l'estensione complessa della differenza di potenziale ai capi di  $\bar{Z}$  vale:

$$\bar{V} = \bar{I} \bar{Z} = I_0 e^{j\omega t} Z e^{j\phi} = I_0 Z e^{j(\omega t + \phi)} = V_0 e^{j(\omega t + \phi)},$$

in cui l'ampiezza  $V_0$  è pari a  $I_0 Z$ ; a  $\bar{V}$  corrisponde la differenza di potenziale:

$$v(t) = \Re \{ \bar{V} \} = I_0 Z \cos(\omega t + \phi).$$

Pertanto, la potenza istantanea assorbita dalla rete così schematizzata è:

$$\begin{aligned} w(t) &= v(t)i(t) = I_0^2 Z \cos(\omega t + \phi) \cos(\omega t) = I_0^2 Z \left[ \cos^2(\omega t) \cos \phi - \sin(\omega t) \cos(\omega t) \sin \phi \right] = \\ &= I_0^2 Z \cos \phi \cos^2(\omega t) - \frac{1}{2} I_0^2 Z \sin \phi \sin(2\omega t), \end{aligned}$$

posto quindi:

$$\begin{aligned} p(t) &\equiv I_0^2 (Z \cos \phi) \cos^2(\omega t) = I_0^2 R \cos^2(\omega t) = \frac{1}{2} I_0^2 R [1 + \cos(2\omega t)], \\ q(t) &\equiv -\frac{1}{2} I_0^2 (Z \sin \phi) \sin(2\omega t) = -\frac{1}{2} I_0^2 X \sin(2\omega t), \end{aligned}$$

risulta:

$$w(t) = p(t) + q(t);$$

il valor medio della potenza istantanea  $w(t)$  è la somma dei valori medi dei termini  $p(t)$  e  $q(t)$ , così, posto:

$$P_m \equiv \langle p(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} p(\xi) d\xi = \frac{1}{2} I_0^2 R + \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \left[ \frac{1}{2} I_0^2 R \cos(2\omega\xi) \right] d\xi = \frac{1}{2} I_0^2 R,$$

$$Q_m \equiv \langle q(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} q(\xi) d\xi = \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \left[ -\frac{1}{2} I_0^2 X \sin(2\omega\xi) \right] d\xi = 0,$$

segue:

$$W_m \equiv \langle w(t) \rangle = \langle p(t) + q(t) \rangle = \langle p(t) \rangle + \langle q(t) \rangle = P_m + Q_m = \frac{1}{2} I_0^2 R = I_{eff}^2 R,$$

dove  $I_{eff}$  è il valore efficace<sup>7</sup> della corrente  $i(t)$ . Quindi la potenza istantanea  $w(t)$  è la somma di due termini; il primo,  $p(t)$ , detto *potenza attiva istantanea*, di valor medio diverso da zero, rappresenta la potenza dissipata nella componente resistiva  $R$  dell'impedenza  $\bar{Z}$ ; l'altro,  $q(t)$ , detto *potenza reattiva istantanea*, di valor medio nullo, corrisponde all'energia che le capacità e le induttanze costituenti la componente reattiva  $X$  dell'impedenza  $\bar{Z}$  assorbono durante le fasi di carica e cedono nelle fasi di scarica; se l'impedenza  $\bar{Z}$  è costituita unicamente da un componente reattivo, tale scambio avviene col solo generatore. Notiamo infine che il valor medio  $W_m$  della potenza istantanea è pari al quadrato del valore efficace della corrente  $i(t)$  moltiplicato per la componente resistiva dell'impedenza  $\bar{Z}$ , quindi gli effetti dissipativi prodotti da una corrente alternata sono uguali a quelli di una corrente continua di intensità pari a quella del valore efficace della corrente alternata. Per tale motivo, quando in genere ci si riferisce all'ampiezza di una grandezza sinusoidale, come ad esempio  $230 V$  per la tensione adottata in Europa nelle reti domestiche, si intende il valore efficace di tale grandezza. Il valor medio della potenza attiva istantanea, pari a  $P_m$ , può esprimersi come:

$$P_m = \frac{1}{2} I_0^2 R = \frac{1}{2} I_0^2 Z \cos \phi = \frac{1}{2} I_0 V_0 \cos \phi = I_{eff} V_{eff} \cos \phi,$$

inoltre il valore massimo della potenza reattiva istantanea è:

$$Q_0 = \frac{1}{2} I_0^2 X = \frac{1}{2} I_0^2 Z \sin \phi = \frac{1}{2} I_0 V_0 \sin \phi = I_{eff} V_{eff} \sin \phi;$$

---

<sup>7</sup> Per una grandezza periodica  $x(t)$  di periodo  $T$ , ovvero tale che per ogni  $t$  risulta  $x(t) = x(t+T)$  si definisce *valore efficace* di  $x(t)$  la quantità:

$$X_{eff} \equiv \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} x^2(\xi) d\xi}.$$

Nel caso di una grandezza variabile con legge sinusoidale,  $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$  con  $\omega = 2\pi/T$ , risulta:

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} I_0^2 \cos^2(\omega\xi) d\xi} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}.$$

facendo uso di tali quantità, si definisce la *potenza apparente* come:

$$P_a \equiv \sqrt{P_m^2 + Q_0^2} = \sqrt{(I_{eff} V_{eff} \cos \phi)^2 + (I_{eff} V_{eff} \sin \phi)^2} = I_{eff} V_{eff};$$

sebbene priva di significato fisico, tale grandezza, fornisce un'indicazione della corrente assorbita dall'impedenza  $\bar{Z}$ , consentendo di determinare, ad esempio, le sezioni dei conduttori da impiegare nei collegamenti. Convenzionalmente la potenza  $P_m$ , detta *potenza attiva* (media), si misura in watt ( $W$ ), la *potenza reattiva* (massima)  $Q_0$  si misura in *voltampere reattivi* ( $VAR$ ) e la potenza apparente  $P_a$  si misura in *voltampere* ( $VA$ ).

La potenza apparente  $P_a$  coincide con la potenza attiva  $P_m$  solo se l'angolo di fase  $\phi$  è nullo, cioè se  $\cos \phi = 1$ , che corrisponde al caso di una impedenza puramente resistiva. Il termine  $\cos \phi$  è detto *fattore di potenza* e fornisce il rapporto:

$$\cos \phi = \frac{P_m}{P_a}$$

tra la potenza attiva e quella apparente.

**Esempio:** Consideriamo una bobina reale, ovvero tale da essere caratterizzata da una resistenza diversa da zero; supponiamo che la sua impedenza  $Z$  sia pari a  $100 \Omega$  e che la fase  $\phi$  sia di  $60^\circ$  anziché di  $90^\circ$  come per un induttore ideale. Tale bobina, connessa ad una rete di distribuzione elettrica che eroga una tensione efficace  $V_{eff}$  di  $230 V$  fa passare una corrente:

$$I_{eff} = \frac{V_{eff}}{Z} = \frac{230 V}{100 \Omega} = 2.3 A,$$

così la potenza apparente vale:

$$P_a = I_{eff} V_{eff} = 2.3 A \times 230 V = 529 VA.$$

Con un angolo di fase di  $60^\circ$  il fattore di potenza  $\cos \phi$  vale  $1/2$ , così la potenza attiva è:

$$P_m = I_{eff} V_{eff} \cos \phi = 2.3 A \times 230 V \times (1/2) = 264.5 W,$$

cioè la potenza media è la metà della potenza apparente. Qualora  $\cos \phi$  fosse uguale a 1, in corrispondenza della medesima potenza attiva si avrebbe una corrente assorbita dal generatore:

$$I_{eff}' = \frac{P_m}{V_{eff}} = \frac{264.5 W}{230 V} = 1.15 A,$$

pari alla metà di  $I_{eff}$ . Che la corrente  $I_{eff}$  sia così elevata a fronte di un suo non effettivo impiego non risulta conveniente in quanto i conduttori per il collegamento al generatore, gli interruttori, i fusibili ed altri componenti devono essere in grado di sostenere il doppio della corrente che sarebbe necessaria se il fattore di potenza fosse unitario. A tale scopo le apparecchiature commerciali sono sempre progettate in modo tale da mantenere il fattore di potenza della rete di alimentazione il più possibile prossimo all'unità.

## 7.10 Potenza complessa

Alla luce delle precedenti definizioni si evince che è possibile associare alla potenza  $P_a$  una quantità complessa  $\bar{P}_a$  definita come:

$$\bar{P}_a \equiv \bar{I}_{eff}^* \bar{V}_{eff},$$

dove  $\bar{I}_{eff}^*$  è il complesso coniugato di  $\bar{I}_{eff}$ ; pertanto, siccome:

$$\bar{V}_{eff} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} e^{j\omega t},$$

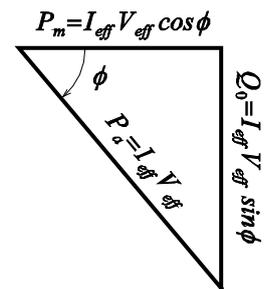
$$\bar{I}_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} e^{j(\omega t + \phi)},$$

allora:

$$\bar{P}_a = \bar{I}_{eff}^* \bar{V}_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} e^{-j(\omega t + \phi)} \frac{V_0}{\sqrt{2}} e^{j\omega t} = I_{eff} V_{eff} e^{-j\phi} = I_{eff} V_{eff} \cos \phi - j I_{eff} V_{eff} \sin \phi = P_m - j Q_0.$$

Il modulo di  $\bar{P}_a$  può essere riguardato come una misura dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cui  $P_m$  e  $Q_0$  rappresentano le lunghezze dei cateti; tale figura geometrica prende il nome di *triangolo delle potenze*. Infatti la potenza apparente  $P_a$  è pari al modulo di  $\bar{P}_a$ , ossia:

$$P_a = |\bar{P}_a| = \sqrt{P_m^2 + Q_0^2}.$$



**Esempio:** Stabiliamo i lati del triangolo delle potenze per la rete di figura, in cui  $R$  vale  $3 \Omega$  e  $L$  vale  $13 \text{ mH}$ , alimentata con un generatore sinusoidale di frequenza pari a  $50 \text{ Hz}$  e ampiezza efficace di  $100 \text{ V}$ . L'impedenza della rete è:

$$\bar{Z} = R + j\omega L = 3 \Omega + j2\pi \times 50 \text{ Hz} \times 13 \text{ mH} = (3 + j4) \Omega,$$

inoltre

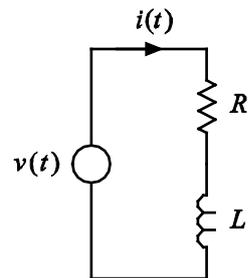
$$Z = |\bar{Z}| = \sqrt{3^2 + 4^2} \Omega = 5 \Omega,$$

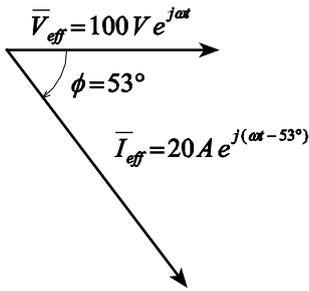
$$\phi = \text{atan}\left(\frac{\omega L}{R}\right) = \text{atan}\left(\frac{4}{3}\right) \sim 53^\circ.$$

Il valore efficace della corrente  $i(t)$  nel circuito è pertanto:

$$\bar{I}_{eff} = \frac{\bar{V}_{eff}}{\bar{Z}} = \frac{V_{eff}}{Z} e^{j\omega t} e^{-j\phi} = 20 \text{ A} e^{j(\omega t - 53^\circ)};$$

la potenza apparente complessa vale quindi:





$$\begin{aligned} \bar{P}_a &= \bar{I}_{eff} * \bar{V}_{eff} = 20 A e^{-j(\omega t - 53^\circ)} \times 100 V e^{j\omega t} = 2.0 kVA e^{j53^\circ} = \\ &= 1.2 kW + j1.6 kVAR, \end{aligned}$$

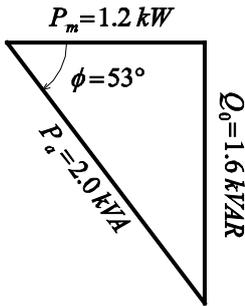
con  $P_a$  pari a 2.0 kVA. Si noti che era possibile pervenire allo stesso risultato osservando che:

$$\begin{aligned} P_m &= I_{eff}^2 R = (20 A)^2 \times 3 \Omega = 1.2 kW, \\ Q_0 &= I_{eff}^2 X = (20 A)^2 \times 4 \Omega = 1.6 kVAR, \\ P_a &= I_{eff}^2 Z = (20 A)^2 \times 5 \Omega = 2.0 kVA, \end{aligned}$$

inoltre dal rapporto  $P_m/P_a$  si ricava il fattore di potenza:

$$\cos \phi = \frac{P_m}{P_a} = \frac{1.2 kW}{2.0 kVA} = 0.6.$$

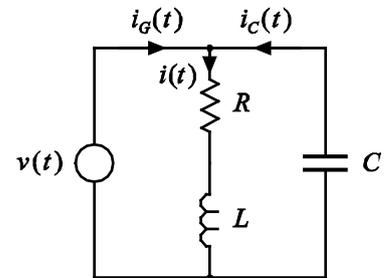
Supponiamo ora di applicare in parallelo all'impedenza  $Z$  un condensatore di capacità pari a 320  $\mu F$ . La corrente erogata dal generatore in questa nuova condizione ha valore efficace pari a:



$$\bar{I}_{G\,eff} = \bar{I}_{eff} + \bar{I}_{C\,eff},$$

dove

$$\begin{aligned} \bar{I}_{eff} &= \frac{\bar{V}_{eff}}{Z} = 20 A e^{j(\omega t - 53^\circ)}, \\ \bar{I}_{C\,eff} &= \frac{\bar{V}_{eff}}{\left(\frac{1}{j\omega C}\right)} = 10 A e^{j(\omega t + 90^\circ)}. \end{aligned}$$



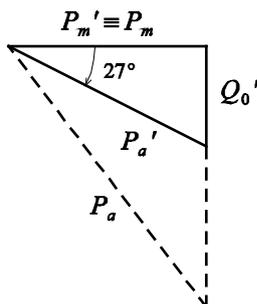
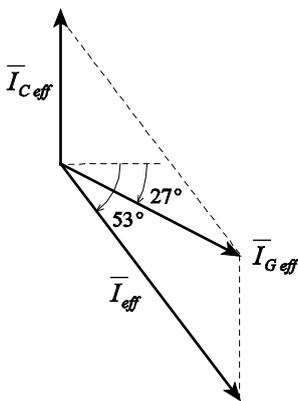
Allora  $\bar{I}_{G\,eff}$  vale:

$$\bar{I}_{G\,eff} = 20 A e^{j(\omega t - 53^\circ)} + 10 A e^{j(\omega t + 90^\circ)} = (12 - j6) A e^{j\omega t} = 13.4 A e^{j(\omega t - 27^\circ)},$$

quindi la potenza apparente in questa nuova condizione è:

$$\begin{aligned} \bar{P}_a &= \bar{I}_{G\,eff} * \bar{V}_{eff} = 13.4 A e^{-j(\omega t - 27^\circ)} \times 100 V e^{j\omega t} = 1.3 kVA e^{j27^\circ} = \\ &= 1.2 kW + j0.6 kVAR, \end{aligned}$$

cioè pur restando inalterata la potenza dissipata nella resistenza, la potenza apparente è diminuita essendo ridotta la corrente erogata dal generatore.

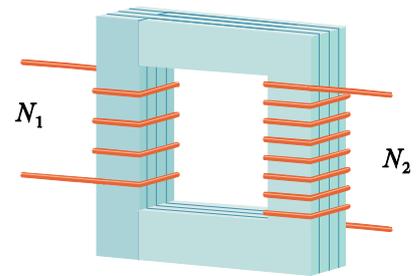


Questo esempio mostra una situazione abbastanza comune nella pratica, poiché la maggior parte dei carichi nelle utenze domestiche e industriali è di tipo resistivo-induttivo. Come visto la potenza attiva  $P_m$  misura il lavoro che il carico compie nell'unità di tempo mentre la potenza apparente  $P_a$  fornisce un'indicazione della massima corrente erogata dal generatore. In teoria se un utilizzatore fosse costituito da un carico puramente reattivo, il generatore sarebbe soggetto al carico nominale pur erogando potenza nulla. Col procedimento mostrato in questo esempio, detto *rifasamento*, si diminuisce l'angolo di fase dell'impedenza rendendo  $\cos \phi$  prossimo all'unità, così, pur restando inalterata la potenza attiva

dissipata si riduce la corrente assorbita. Sebbene in principio potrebbe sembrare conveniente imporre  $\cos\phi = 1$ , ciò risulta sconsigliabile perché in tali condizioni il circuito risultante sarebbe in condizioni di risonanza con la conseguente generazione di extratensioni in corrispondenza degli elementi reattivi.

## 7.11 Il trasformatore

Il *trasformatore* rappresenta una delle macchine elettriche più importanti in quanto consente di generare la potenza elettrica ad un certo potenziale e di trasmetterla ad un altro. La possibilità di trasmettere la potenza in alternata ad alto potenziale con piccole perdite e, successivamente trasformarla per l'utenza ad un potenziale più basso, spiega fundamentalmente la superiorità della distribuzione dell'energia per mezzo di correnti alternate rispetto alla distribuzione in continua. Consideriamo un anello di ferro dolce, laminato<sup>8</sup> secondo piani paralleli alle linee di forza del campo magnetico prodotto da due avvolgimenti di uguale lunghezza  $l$ , costituiti rispettivamente da  $N_1$  e  $N_2$  spire. Se  $S$  è la sezione dell'anello, in assenza di flusso magnetico disperso, le induttanze dei due avvolgimenti sono:



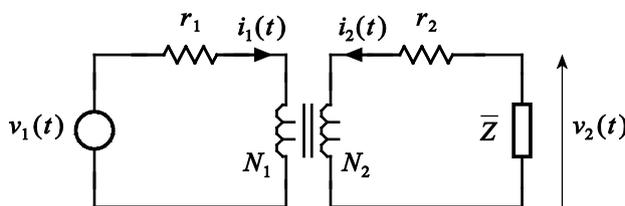
$$L_1 = \frac{\mu N_1^2 S}{l},$$

$$L_2 = \frac{\mu N_2^2 S}{l},$$

dove  $\mu$  è la permeabilità magnetica del ferro; il coefficiente di mutua induzione tra i due avvolgimenti vale:

$$M = \kappa \frac{\mu N_1 N_2 S}{l} = \kappa \sqrt{L_1 L_2}. \quad (7.30)$$

Nel seguito assumeremo che l'accoppiamento tra i due avvolgimenti sia tale che  $|\kappa|$  valga 1; convenzionalmente l'avvolgimento posto a sinistra dello schema del trasformatore è detto *primario* e l'altro è detto *secondario*.



Supponiamo di applicare un generatore di forza elettromotrice sinusoidale  $v_1(t)$  al primario di un trasformatore e di chiudere il secondario su un carico costituito da un'impedenza  $\bar{Z}$ ; con riferimento allo schema di figura, in cui  $r_1$  e  $r_2$  rappresentano le resistenze proprie dei due avvolgimenti,

<sup>8</sup> La laminazione del nucleo del trasformatore è necessaria per ridurre il suo riscaldamento a causa delle correnti parassite che si generano in esso per effetto del campo magnetico variabile cui è sottoposto. Si consideri, ad esempio, un nucleo di ferro massiccio sede di un campo magnetico variabile; dalla legge di Faraday-Henry la variazione di tale campo determina nel nucleo tanti percorsi chiusi sedi di forze elettromotrici indotte e quindi di correnti indotte; come provò sperimentalmente Léon Foucault nel 1855, tali correnti determinano per effetto Joule lo sviluppo di calore nella massa del nucleo di ferro. Così, per ridurre l'ampiezza di questi percorsi, il nucleo del trasformatore viene costituito da lamierini isolati tra loro con carta o con vernice. Inoltre, quando è possibile, i lamierini sono realizzati con materiali metallici ad elevata resistività, come ad esempio delle leghe di ferro e silicio.

applicando la legge di Kirchhoff alle due maglie comprendenti, rispettivamente, l'avvolgimento primario e quello secondario del trasformatore, si ha:

$$\begin{cases} \bar{V}_1 = r_1 \bar{I}_1 + j\omega L_1 \bar{I}_1 + j\omega M \bar{I}_2, \\ 0 = (r_2 + \bar{Z}) \bar{I}_2 + j\omega L_2 \bar{I}_2 + j\omega M \bar{I}_1. \end{cases} \quad (7.31)$$

Dalla seconda relazione segue:

$$\frac{\bar{I}_2}{\bar{I}_1} = -\frac{j\omega M}{r_2 + j\omega L_2 + \bar{Z}}. \quad (7.32)$$

In particolare, nel caso in cui alla frequenza del generatore di forza elettromotrice si possano trascurare le perdite resistive dell'avvolgimento secondario, cioè  $r_2 \ll \omega L_2$ , se il modulo dell'impedenza di carico è piccolo rispetto alla reattanza del secondario,  $Z \ll \omega L_2$ , dalla (7.30) tale espressione diventa:

$$\frac{\bar{I}_2}{\bar{I}_1} \approx -\frac{M}{L_2} = -\frac{l}{\mu N_2^2 S} \frac{\mu N_1 N_2 S}{l} = -\frac{N_1}{N_2} \quad (7.33)$$

cioè, sotto tale condizione, la corrente attraverso il carico è in controfase rispetto alla corrente che scorre nel primario del trasformatore<sup>9</sup>. Indicando con  $v_2(t)$  la differenza di potenziale ai capi dell'impedenza  $\bar{Z}$ , risulta:

$$\bar{V}_2 = -\bar{Z} \bar{I}_2;$$

ricavando  $\bar{I}_2$  dalla (7.32) e facendo uso della prima delle (7.31) si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\bar{V}_2}{\bar{V}_1} &= \frac{j\omega M \bar{Z}}{(r_1 + j\omega L_1) \bar{Z} + (r_1 + j\omega L_1)(r_2 + j\omega L_2) + \omega^2 M^2} = \\ &= \frac{j\omega M \bar{Z}}{(r_1 + j\omega L_1) \bar{Z} + (r_2 + j\omega L_2)r_1 + (r_1 + j\omega L_1)r_2} \end{aligned}$$

che, per  $|(r_1 + j\omega L_1) \bar{Z}| \gg |(r_2 + j\omega L_2)r_1 + (r_1 + j\omega L_1)r_2|$  diventa:

$$\frac{\bar{V}_2}{\bar{V}_1} \approx \frac{j\omega M}{r_1 + j\omega L_1};$$

se è possibile trascurare le perdite resistive dell'avvolgimento primario, cioè per  $r_1 \ll \omega L_1$ , dalla (7.30) si ha:



Trasformatore da 315 MVA, 420 kV/18 kV (Comelmar Italia)

<sup>9</sup> Tale risultato ha solo valore formale in quanto i terminali dell'avvolgimento secondario possono essere invertiti, riportando così in fase le correnti  $i_1(t)$  e  $i_2(t)$ .

$$\frac{\bar{V}_2}{\bar{V}_1} \approx \frac{j\omega M}{j\omega L_1} = \frac{l}{\mu N_1^2 S} \frac{\mu N_1 N_2 S}{l} = \frac{N_2}{N_1}.$$

Quindi, con le ipotesi fatte risulta che la differenza di potenziale presente sul secondario del trasformatore è in fase con la forza elettromotrice erogata dal generatore; il rapporto  $N_1/N_2$  che caratterizza il funzionamento del trasformatore prende il nome di *rapporto di trasformazione*.

**Esempio:** Consideriamo un generatore di forza elettromotrice  $v(t)$  sinusoidale che alimenta un carico attraverso una linea di lunghezza  $l$  caratterizzata da una resistenza per unità di lunghezza pari a  $r$ . La potenza erogata dal generatore è:

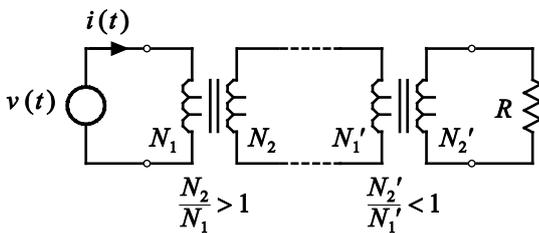
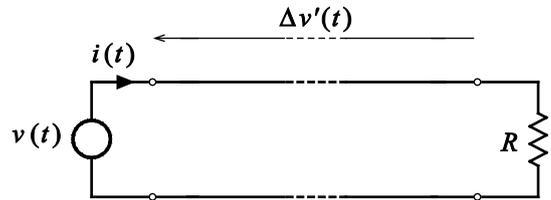
$$P_m = V_{eff} I_{eff},$$

dove  $I_{eff}$  è il valore efficace della corrente erogata dal generatore; indicando con  $\Delta V_{eff}'$  la caduta di tensione efficace lungo la linea, la potenza dissipata attraverso la resistenza della linea vale:

$$P_d = \Delta V_{eff}' I_{eff} = I_{eff}^2 r l,$$

pertanto il rapporto  $P_d/P_m$  è dato da:

$$\frac{P_d}{P_m} = \frac{I_{eff} r l}{V_{eff}}.$$



Quindi, a parità di potenza erogata, tanto maggiore è  $V_{eff}$ , tanto più è piccola la frazione di potenza persa nella linea rispetto a quella erogata. Poiché non è opportuno generare forze elettromotrici con alto potenziale e nemmeno adoperarle, si impiegano dei trasformatori per elevare il potenziale prodotto dal generatore per poi ridurlo, sempre facendo uso di trasformatori, in corrispondenza delle utenze.

Il primo a realizzare un trasformatore fu Faraday nelle sue esperienze sull'induzione elettromagnetica del 1831, tuttavia Faraday non si accorse delle potenzialità di tale dispositivo. Nel 1882 il fisico francese Lucien Gaulard e l'inglese John Dixon Gibbs brevettarono un sistema di distribuzione della corrente alternata che faceva uso di un apparato, denominato *generatore secondario*, funzionante sul principio della mutua induzione e realizzato con due bobine avvolte su un supporto metallico rettilineo. Utilizzando tale dispositivo nel 1884 venne effettuata l'illuminazione di un tratto di 12 km della metropolitana di Londra e successivamente della linea ferroviaria Torino-Lanzo, dove la lampadina più lontana era situata a circa 40 km da un alternatore di 2 kV con frequenza di 133 Hz. Solo nel seguito Gaulard comprese l'opportunità di adoperare un nucleo chiuso per il suo generatore secondario, ottenendo un dispositivo in grado convertire potenze dell'ordine del kW.



Trasformatore di Gaulard e Gibbs con nucleo rettilineo aperto

**Esempio:** (*Impedenza di ingresso di un trasformatore chiuso su un carico generico*) Facendo uso della relazione (7.32) per esprimere la corrente  $\bar{I}_2$  attraverso  $\bar{I}_1$  e sostituendo nella prima delle (7.31), dalla (7.30) si ottiene:

$$\frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} = r_1 + j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{r_2 + j\omega L_2 + \bar{Z}} = r_1 + \frac{j\omega L_1 (r_2 + \bar{Z}) - \omega^2 L_1 L_2 + \omega^2 M^2}{r_2 + j\omega L_2 + \bar{Z}} = r_1 + j\omega L_1 \frac{r_2 + \bar{Z}}{r_2 + j\omega L_2 + \bar{Z}};$$

trascurando le perdite resistive, per  $Z \ll \omega L_2$ , si ha:

$$\frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} \approx j\omega L_1 \frac{\bar{Z}}{j\omega L_2} = \frac{L_1}{L_2} \bar{Z} = \frac{\mu N_1^2 S}{l} \frac{l}{\mu N_2^2 S} \bar{Z} = \left( \frac{N_1}{N_2} \right)^2 \bar{Z}.$$

Cioè quando il secondario del trasformatore è chiuso su un carico di impedenza  $\bar{Z}$ , l'impedenza "vista" dal primario è pari al prodotto del quadrato del rapporto di trasformazione per l'impedenza di carico. Tale risultato suggerisce la possibilità di adoperare il trasformatore per adattare l'impedenza tra un generatore ed un carico generico. Supponiamo di dover alimentare un carico di impedenza  $\bar{Z}$  attraverso un generatore di impedenza interna  $\bar{Z}_g$ ; il collegamento diretto del generatore al carico non consentirebbe di ottenere il massimo trasferimento della potenza essendo diverse le due impedenze. L'interposizione tra il generatore ed il carico di un trasformatore il cui rapporto di trasformazione sia pari a  $\sqrt{\bar{Z}_g/\bar{Z}}$  consente l'adattamento di impedenza con basse perdite.

## 7.12 Serie di Fourier

Ogni elemento dello spazio vettoriale euclideo a tre dimensioni può essere descritto attraverso una combinazione lineare dei versori degli assi,  $\hat{x}$ ,  $\hat{y}$  e  $\hat{z}$ ; per questo motivo si dice che i versori formano una base per lo spazio vettoriale considerato. Analogamente è possibile provare che la successione di funzioni trigonometriche  $1, \sin(\omega t), \cos(\omega t), \sin(2\omega t), \cos(2\omega t), \dots$ , con  $\omega$  uguale a  $2\pi/T$ , forma una base per l'insieme delle funzioni periodiche nell'intervallo  $[0, T]$ , caratterizzate da un numero finito di discontinuità finite in tale intervallo e con derivata continua nei punti in cui la funzione è continua. Pertanto una funzione  $f(t)$  che gode di tali proprietà può esprimersi come:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)] = \\ &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + a_3 \cos(3\omega t) + \dots \\ &\quad + b_1 \sin(\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) + b_3 \sin(3\omega t) + \dots \end{aligned} \quad (7.34)$$

Questo sviluppo, noto come *serie di Fourier* o *serie trigonometrica* fu introdotto nel 1812 da Jean Baptiste Joseph Fourier nell'ambito dello studio della propagazione del calore. Il termine  $a_0/2$  vale:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt,$$

ovvero è uguale al valor medio di  $f(t)$  nell'intervallo considerato; i coefficienti  $a_n$  e  $b_n$  valgono rispettivamente:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(n\omega t) dt, \quad (7.35)$$



Jean Baptiste Joseph Fourier

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(n\omega t) dt. \quad (7.36)$$

Nei punti  $t_0$  di discontinuità della funzione considerata, la serie trigonometrica converge al valore  $\frac{1}{2} \left[ \lim_{\xi \rightarrow t_0^+} f(t) + \lim_{\xi \rightarrow t_0^-} f(t) \right]$ , cioè alla media tra il limite destro e quello sinistro della funzione nel punto di discontinuità. Conoscendo le proprietà di parità<sup>10</sup> della funzione  $f(t)$ , l'espressione della serie trigonometrica può essere notevolmente semplificata; siccome l'integrale calcolato su un periodo di una funzione periodica dispari è nullo, allora, se  $f(t)$  è pari, il prodotto  $f(t) \sin(n\omega t)$  è una funzione periodica dispari e pertanto i termini  $b_n$  dello sviluppo sono nulli; se  $f(t)$  è dispari, il prodotto  $f(t) \cos(n\omega t)$  è una funzione dispari e nello sviluppo sono nulli i termini  $a_n$ .

**Esempio:** Consideriamo la funzione  $v(t)$  così definita:

$$v(t) = \begin{cases} V_0 & 0 < t \leq T/4, \\ -V_0 & T/4 < t \leq 3T/4, \\ V_0 & 3T/4 < t \leq T, \end{cases}$$

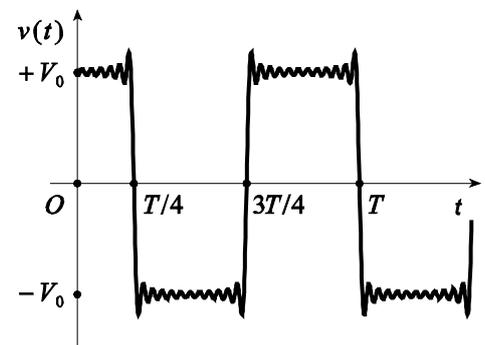
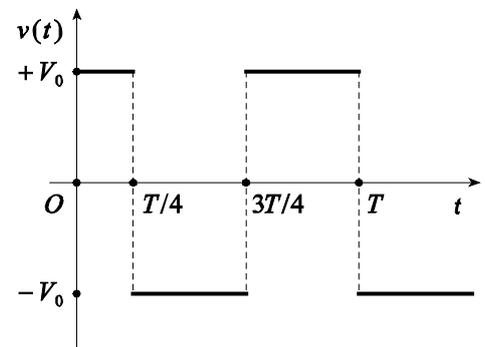
siccome è pari i termini  $b_n$  sono nulli; inoltre, poiché l'area della semionda positiva è uguale a quella della semionda negativa, il valor medio  $a_n/2$  è nullo. Pertanto, dalla (7.35) i termini  $a_n$  valgono:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T v(t) \cos(n\omega t) dt = \frac{2V_0}{T} \int_0^{T/4} \cos(n\omega t) dt - \frac{2V_0}{T} \int_{T/4}^{3T/4} \cos(n\omega t) dt + \frac{2V_0}{T} \int_{3T/4}^T \cos(n\omega t) dt = \\ &= \frac{4V_0}{T} \int_0^{T/4} \cos(n\omega t) dt - \frac{4V_0}{T} \int_{T/4}^{T/2} \cos(n\omega t) dt = \frac{4V_0}{T} \frac{T}{2n\pi} \int_0^{n\pi/2} \cos \xi d\xi - \frac{4V_0}{T} \frac{T}{2n\pi} \int_{n\pi/2}^{n\pi} \cos \xi d\xi = \frac{4V_0}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right). \end{aligned}$$

Siccome  $\sin(n\pi/2)$  può esprimersi come  $j^{n+1} [(-1)^n - 1]/2$ , lo sviluppo di  $v(t)$  è dato da:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j^{n+1}}{2n} [(-1)^n - 1] \cos(n\omega t) = \\ &= \frac{4V_0}{\pi} \cos(\omega t) - \frac{4V_0}{3\pi} \cos(3\omega t) + \\ &\quad + \frac{4V_0}{5\pi} \cos(5\omega t) - \frac{4V_0}{7\pi} \cos(7\omega t) + \dots \end{aligned}$$

In figura è mostrato il grafico dello sviluppo di  $v(t)$  troncato al 24 - esimo termine. La funzione  $v(t)$  viene generalmente denominata *onda quadra*.



La serie di Fourier può essere adoperata per lo studio dei circuiti quando questi sono sottoposti a sollecitazioni periodiche non sinusoidali. Alla luce del principio di sovrapposizione, la risposta del

<sup>10</sup> Una funzione  $f(t)$  si dice *pari* se risulta  $f(t) = f(-t)$  e si dice *dispari* se risulta  $f(t) = -f(-t)$ . Ad esempio  $\cos(\omega t)$  è una funzione pari e  $\sin(\omega t)$  è una funzione dispari. Si osserva che il prodotto di una funzione pari per una funzione dispari è una funzione dispari.

circuito viene ricavata dalla somma delle risposte a ciascuno dei termini sinusoidali in cui viene decomposto lo stimolo.

**Esempio:** Consideriamo la rete di figura in cui il generatore eroga una forza elettromotrice  $v(t)$  variabile nel tempo come nell'esempio precedente. L'estensione complessa di tale forza elettromotrice vale:

$$\bar{V} = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{j^{n+1}}{2n} [(-1)^n - 1] e^{jn\omega t} = \frac{4V_0}{\pi} e^{j\omega t} - \frac{4V_0}{3\pi} e^{j3\omega t} + \frac{4V_0}{5\pi} e^{j5\omega t} - \frac{4V_0}{7\pi} e^{j7\omega t} + \dots, \quad (7.37)$$

pertanto, siccome l'impedenza della rete è:

$$\bar{Z}(\omega) = R + \frac{1}{j\omega C} = Z(\omega) e^{j\phi(\omega)},$$

dove:

$$Z(\omega) = \sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}},$$

$$\tan \phi(\omega) = \frac{1}{\omega RC},$$

sono rispettivamente il modulo e la fase di  $\bar{Z}(\omega)$ , l'estensione complessa della corrente  $i(t)$  attraverso il circuito è:

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\bar{Z}(n\omega)} \frac{j^{n+1}}{2n} [(-1)^n - 1] e^{jn\omega t} = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{Z(n\omega)} \frac{j^{n+1}}{2n} [(-1)^n - 1] e^{j[n\omega t - \phi(n\omega)]} = \\ &= \frac{4V_0}{\pi Z(\omega)} e^{j[\omega t - \phi(\omega)]} - \frac{4V_0}{3\pi Z(3\omega)} e^{j[3\omega t - \phi(3\omega)]} + \frac{4V_0}{5\pi Z(5\omega)} e^{j[5\omega t - \phi(5\omega)]} - \frac{4V_0}{7\pi Z(7\omega)} e^{j[7\omega t - \phi(7\omega)]} + \dots \end{aligned}$$

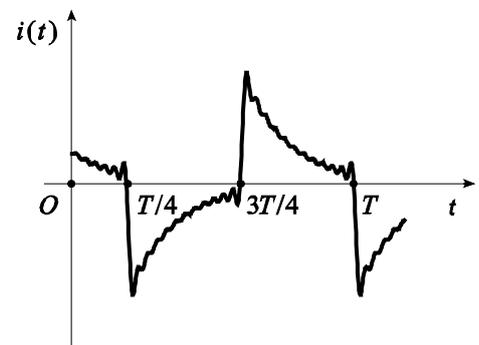
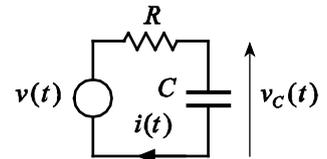
per cui la corrente  $i(t)$  vale:

$$\begin{aligned} i(t) &= \mathcal{R}e\{\bar{I}\} = \mathcal{R}e\left\{ \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{Z(n\omega)} \frac{j^{n+1}}{2n} [(-1)^n - 1] e^{j[n\omega t - \phi(n\omega)]} \right\} = \\ &= \frac{4V_0}{\pi Z(\omega)} \cos[\omega t - \phi(\omega)] - \frac{4V_0}{3\pi Z(3\omega)} \cos[3\omega t - \phi(3\omega)] + \frac{4V_0}{5\pi Z(5\omega)} \cos[5\omega t - \phi(5\omega)] + \dots \end{aligned}$$

In figura è mostrato il grafico di tale corrente. Per ricavare l'andamento della differenza di potenziale  $v_C(t)$  ai capi del condensatore, moltiplichiamo ciascun termine dello sviluppo dell'estensione complessa della corrente  $\bar{I}$  per l'impedenza del condensatore:

$$\bar{Z}_C(\omega) = \frac{1}{j\omega C},$$

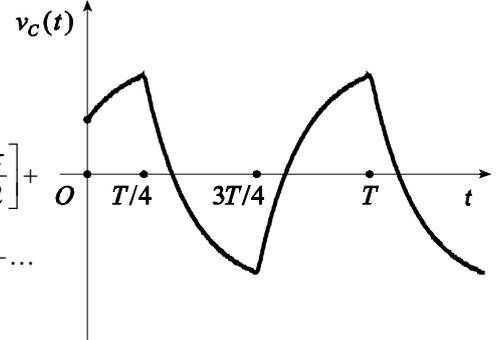
calcolata in corrispondenza pulsazione del termine considerato; così, l'estensione complessa della tensione  $v_C(t)$  vale:



$$\begin{aligned}\bar{V}_C &= \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{Z}_C(n\omega) \frac{1}{\bar{Z}(n\omega)} \frac{j^{n+1}}{2n} [(-1)^n - 1] e^{jn\omega t} = \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{jn\omega C} \frac{1}{\bar{Z}(n\omega)} \frac{j^{n+1}}{2n} [(-1)^n - 1] e^{jn\omega t} = \\ &= \frac{4V_0}{\pi\omega C} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 Z(n\omega)} \frac{j^{n+1}}{2} [(-1)^n - 1] e^{j[n\omega t - \phi(n\omega) - \frac{\pi}{2}]} = \\ &= \frac{4V_0}{\pi Z(\omega)} e^{j[\omega t - \phi(\omega)]} - \frac{4V_0}{9\pi\omega CZ(3\omega)} e^{j[3\omega t - \phi(3\omega) - \frac{\pi}{2}]} + \frac{4V_0}{25\pi\omega CZ(5\omega)} e^{j[5\omega t - \phi(5\omega) - \frac{\pi}{2}]} - \frac{4V_0}{49\pi\omega CZ(7\omega)} e^{j[7\omega t - \phi(7\omega) - \frac{\pi}{2}]} + \dots\end{aligned}$$

pertanto la tensione  $v_C(t)$  è data da:

$$\begin{aligned}v_C(t) &= \mathcal{R}e\{\bar{V}_C\} = \\ &= \mathcal{R}e\left\{ \frac{4V_0}{\pi\omega C} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 Z(n\omega)} \frac{j^{n+1}}{2} [(-1)^n - 1] e^{j[n\omega t - \phi(n\omega) - \frac{\pi}{2}]} \right\} = \\ &= \frac{4V_0}{\pi Z(\omega)} \cos[\omega t - \phi(\omega)] - \frac{4V_0}{9\pi\omega CZ(3\omega)} \cos\left[3\omega t - \phi(3\omega) - \frac{\pi}{2}\right] + \\ &\quad + \frac{4V_0}{25\pi\omega CZ(5\omega)} \cos\left[5\omega t - \phi(5\omega) - \frac{\pi}{2}\right] + \dots\end{aligned}$$



la cui rappresentazione grafica è mostrata in figura.

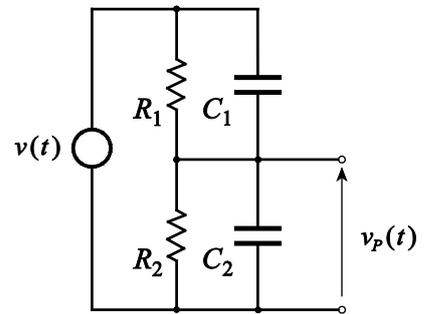
Il metodo descritto può essere ulteriormente generalizzato per consentire lo studio della sollecitazione dei circuiti con stimoli non periodici attraverso l'algoritmo della *trasformata di Fourier*.

**Esempio:** (*Partitore compensato*) Consideriamo la rete di figura; posto:

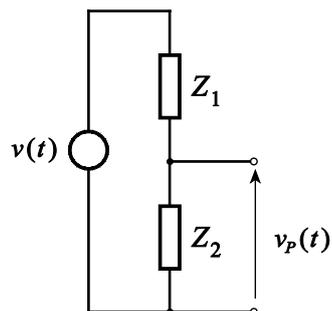
$$\begin{aligned}\tau_1 &\equiv R_1 C_1, \\ \tau_2 &\equiv R_2 C_2,\end{aligned}$$

e indicando con  $\bar{Z}_1$  e con  $\bar{Z}_2$ , rispettivamente, il parallelo della resistenza  $R_1$  e della reattanza di  $C_1$  e della resistenza  $R_2$  e della reattanza di  $C_2$ :

$$\begin{aligned}\bar{Z}_1 &\equiv \frac{1}{\frac{1}{R_1} + j\omega C_1} = \frac{R_1}{1 + j\omega R_1 C_1} = \frac{R_1}{1 + j\omega\tau_1}, \\ \bar{Z}_2 &\equiv \frac{1}{\frac{1}{R_2} + j\omega C_2} = \frac{R_2}{1 + j\omega R_2 C_2} = \frac{R_2}{1 + j\omega\tau_2},\end{aligned}$$



l'estensione complessa della tensione  $v_p(t)$  può esprimersi come:



$$\begin{aligned}\bar{V}_p &= \bar{V} \frac{\bar{Z}_2}{\bar{Z}_1 + \bar{Z}_2} = \bar{V} \frac{\frac{R_2}{1 + j\omega\tau_2}}{\frac{R_1}{1 + j\omega\tau_1} + \frac{R_2}{1 + j\omega\tau_2}} = \bar{V} \frac{R_2(1 + j\omega\tau_1)}{R_1(1 + j\omega\tau_2) + R_2(1 + j\omega\tau_1)} = \\ &= \bar{V} \frac{R_2(1 + j\omega\tau_1)}{R_1 + R_2 + j\omega(\tau_2 R_1 + \tau_1 R_2)} = \bar{V} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \frac{1 + j\omega\tau_1}{1 + j\omega\tau},\end{aligned}$$

in cui:

$$k \equiv \frac{R_2}{R_1 + R_2},$$

$$\tau \equiv \frac{\tau_2 R_1 + \tau_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

Nella circostanza in cui si abbia  $\tau_1 \equiv \tau_2$  dalle precedenti espressioni risulta segue che  $\bar{V}_p = \bar{V} k$ , ovvero:

$$v_p(t) = v(t)k,$$

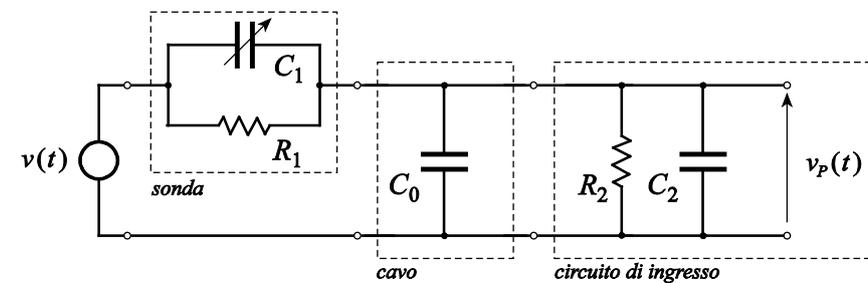
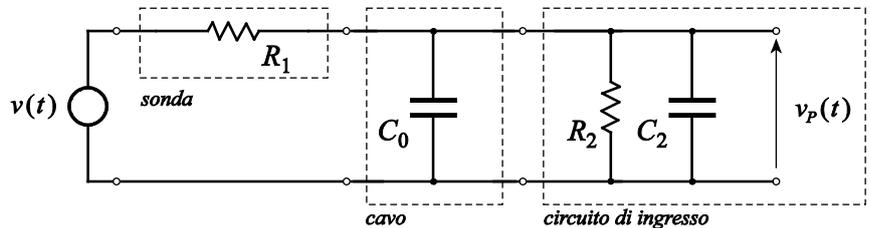
cioè la tensione  $v_p(t)$  risulta in fase con la tensione erogata dal generatore di forza elettromotrice  $v(t)$  e la sua ampiezza è pari a quella di  $v(t)$ , moltiplicata per il rapporto di partizione  $k$ ; in tale condizione si dice che la rete di figura agisce da *partitore compensato*. Questa rete costituisce parte integrante di alcuni strumenti di misura quali gli oscilloscopi che hanno la funzione di visualizzare in grafici bidimensionali l'andamento al variare del tempo delle tensioni applicate ai loro ingressi. Il circuito di ingresso di un oscilloscopio è solitamente schematizzabile con il parallelo di una resistenza, generalmente di valore molto elevato, dell'ordine di  $10\text{ M}\Omega$ , con una capacità dell'ordine di  $10\text{ pF}$ . Inoltre, per poter applicare la tensione da misurare a tale ingresso, usualmente si ricorre a cavi con conduttori coassiali, che presentano una capacità per unità di lunghezza generalmente di qualche decina di  $\text{pF}$  per metro. Infine, per aumentare l'impedenza di ingresso dello strumento, allo scopo di minimizzare l'effetto dello strumento stesso sull'oggetto della misura, generalmente si preleva la tensione da misurare attraverso una sonda ad alta resistenza. Pertanto il circuito di ingresso dello strumento, comprensivo del cavo di collegamento e della sonda, corrisponde a quello indicato in figura, dove  $C_0$  rappresenta la capacità del cavo e la rete costituita dalla resistenza  $R_2$  e dal condensatore  $C_2$  schematizza l'ingresso dell'oscilloscopio. L'applicazione diretta a tale circuito della tensione  $v(t)$  da

misurare comporta inevitabilmente un errore dovuto alla dipendenza dalla frequenza della risposta di questa rete. Per ovviare a tale problema la sonda dell'oscilloscopio viene completata tramite l'aggiunta di un condensatore variabile  $C_1$ , come mostrato in figura. Con questa modifica, attraverso un'opportuna regolazione di tale componente, il circuito può agire come un partitore compensato. La regolazione del condensatore  $C_1$  viene generalmente effettuata applicando una forza elettromotrice ad onda quadra, analoga a quella dell'esempio precedente, all'ingresso dell'intera rete così costituita. Facendo uso dello sviluppo in serie di Fourier, consideriamo l'applicazione di tale tensione al partitore compensato.

Posto:

$$\bar{K}(\omega) \equiv k \frac{1 + j\omega\tau_1}{1 + j\omega\tau} = K(\omega)e^{j\vartheta(\omega)},$$

dove:



$$K(\omega) = k \sqrt{\frac{1 + (\omega\tau_1)^2}{1 + (\omega\tau)^2}},$$

$$\tan \vartheta(\omega) = \omega\tau_1 - \omega\tau,$$

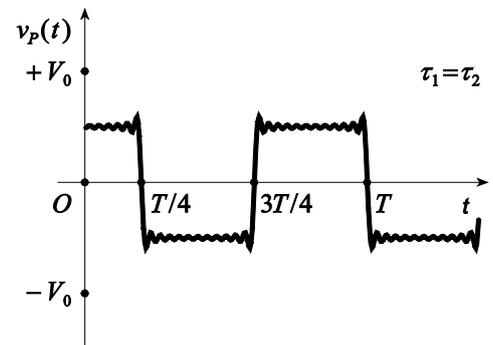
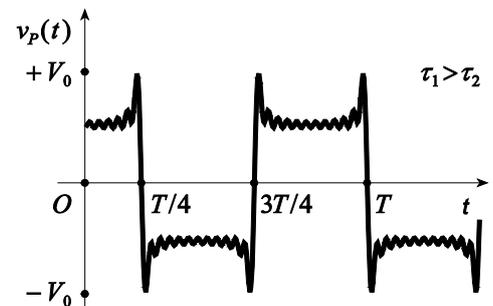
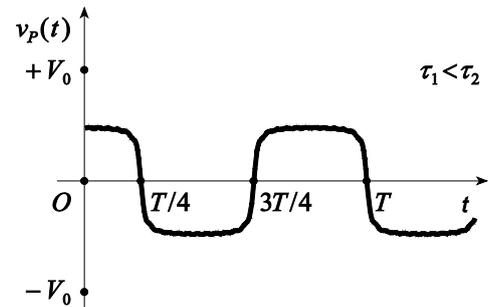
l'estensione complessa della tensione di uscita del partitore compensato, corrispondente alla forza elettromotrice la cui estensione complessa è data dalla (7.37), vale:

$$\begin{aligned}\bar{V}_p &= \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \bar{K}(n\omega) \frac{j^{n+1}}{2n} [(-1)^n - 1] e^{jn\omega t} = \\ &= \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} K(n\omega) \frac{j^{n+1}}{2n} [(-1)^n - 1] e^{j[n\omega t + \vartheta(n\omega)]} \\ &= \frac{4V_0}{\pi} K(\omega) e^{j[\omega t + \vartheta(\omega)]} - \frac{4V_0}{3\pi} K(3\omega) e^{j[3\omega t + \vartheta(3\omega)]} + \\ &\quad + \frac{4V_0}{5\pi} K(5\omega) e^{j[5\omega t + \vartheta(5\omega)]} - \frac{4V_0}{7\pi} K(7\omega) e^{j[7\omega t + \vartheta(7\omega)]} + \dots,\end{aligned}$$

così la tensione  $v_p(t)$  è data dall'espressione:

$$\begin{aligned}v_p(t) &= \mathcal{R}\{e\{\bar{V}_p\}\} = \\ &= \mathcal{R}\left\{ \frac{4V_0}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} K(n\omega) \frac{j^{n+1}}{2n} [(-1)^n - 1] e^{j[n\omega t + \vartheta(n\omega)]} \right\} = \\ &= \frac{4V_0}{\pi} K(\omega) \cos[\omega t + \vartheta(\omega)] + \\ &\quad - \frac{4V_0}{3\pi} K(3\omega) \cos[3\omega t + \vartheta(3\omega)] + \\ &\quad + \frac{4V_0}{5\pi} K(5\omega) \cos[5\omega t + \vartheta(5\omega)] + \dots\end{aligned}$$

Nell'esempio si è assunto che il rapporto di partizione  $k$  fosse pari a  $1/2$ . Nelle figure in alto ed al centro sono mostrati gli andamenti della tensione  $v_p(t)$  corrispondenti, rispettivamente, alle condizioni  $\tau_1 < \tau_2$  e  $\tau_1 > \tau_2$ . Nella figura in basso è mostrato lo stesso andamento nella condizione di compensazione del partitore,  $\tau_1 = \tau_2$ . La regolazione pertanto si effettua variando il valore della capacità  $C_1$  e controllando contemporaneamente sullo schermo dell'oscilloscopio la tensione  $v_p(t)$  fino a che il relativo andamento non diventa uguale a quello corrispondente alla condizione di compensazione.



## 7.13 Elementi di circuito reali

Per ragioni di carattere costruttivo i componenti che costituiscono i circuiti elettrici reali non risultano caratterizzati dal solo parametro principale per il quale sono inseriti nel circuito stesso, ma presentano delle proprietà resistive e reattive indesiderate che vengono generalmente indicate come *parametri parassiti*. L'effetto di tali parametri altera il comportamento dei componenti determinandone uno scostamento da quello ideale e solitamente il loro effetto è tanto più manifesto quanto più è elevata la frequenza alla quale opera il componente.

Per tenere conto di tale effetto nell'ambito dello studio di un circuito, il componente reale viene descritto attraverso una rete equivalente realizzata con componenti ideali. Le reti equivalenti vengono sviluppate in base a considerazioni di carattere fisico, in relazione ai fenomeni che originano i parametri parassiti stessi. Questo approccio comporta naturalmente una complicazione nell'analisi dei circuiti, per cui la tendenza è quella di sviluppare reti equivalenti semplificate che sono in grado di schematizzare il



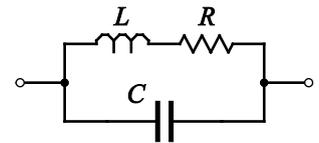
Sonda per oscilloscopio (Adafruit). In corrispondenza del connettore di collegamento all'oscilloscopio è visibile la vite per la regolazione del condensatore di compensazione.

comportamento del componente reale in intervalli limitati di frequenze delle eccitazioni cui è soggetto. Tali reti equivalenti sono costituite, in genere, dalla serie o dal parallelo di una resistenza e una reattanza, induttiva o capacitiva.

### 7.13.1 Resistore

I resistori sono costituiti da un supporto isolante che sostiene l'elemento resistivo, generalmente realizzato in ceramica, vetro o materiale plastico, un elemento resistivo attraverso il quale, per altro, viene distinto il tipo di resistore, un rivestimento per la protezione dell'elemento resistivo ed infine i terminali per il collegamento al circuito che ospita tale componente. A seconda dell'elemento resistivo adoperato, si possono distinguere tre classi di resistori: i resistori a filo, i resistori ad impasto ed i resistori a strato. I resistori a filo hanno come elemento resistivo un filo metallico, generalmente realizzato con leghe  $Ni-Cu$ ,  $Ni-Cr-Fe$  o  $Ni-Cr-Al$  avvolto su un supporto isolante piatto o cilindrico. Nei resistori a impasto l'elemento resistivo è costituito da polvere di carbone o grafite mescolata con resine sintetiche e materiali inerti come il talco, in proporzioni diverse in relazione al valore resistivo da ottenere. Infine l'elemento resistivo dei resistori a strato consiste di una sottile pellicola di materiale conduttore, depositata su un supporto realizzato generalmente in ceramica; i principali tipi di materiale di deposito sono la polvere di carbone o di grafite ed i film metallici o di ossidi metallici. Mentre nei resistori a impasto ed a strato i valori dei parametri parassiti reattivi sono spesso trascurabili, nel caso dei resistori a filo risultano solitamente piuttosto elevati.

I fenomeni che hanno luogo all'interno del resistore richiedono che occorra associare a tale componente una certa capacità ed una certa induttanza attraverso lo schema di figura, valido fino a frequenze non eccessivamente elevate. In tale circuito equivalente la capacità  $C$  rappresenta sia la capacità diretta tra i terminali che quella distribuita nel componente mentre l'induttanza  $L$  è sia quella dell'elemento resistivo che dei terminali. L'impedenza compresa tra i rami del resistore vale pertanto:



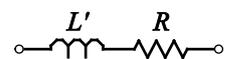
$$\bar{Z} = \frac{1}{\frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C} = \frac{R + j\omega L}{1 + j\omega RC - \omega^2 LC}. \quad (7.38)$$

Nella pratica, affinché prevalga l'effetto resistivo, il componente viene adoperato nell'intervallo di frequenze tale che risulti  $\omega L \ll R$  e  $1/(\omega C) \gg R$ , pertanto in tale intervallo risulterà  $\omega^2 LC \ll 1$  e la relazione precedente si esprimerà come:

$$\bar{Z} \approx \frac{R + j\omega L}{1 + j\omega RC} = \frac{R + \omega^2 LRC + j\omega(L - R^2C)}{1 + (\omega RC)^2};$$

inoltre, risultando  $\omega RC \ll 1$  si ha:

$$\bar{Z} \approx R(1 + \omega^2 LC) + j\omega(L - R^2C) \approx R + j\omega(L - R^2C),$$



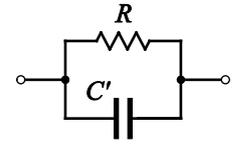
che corrisponde alla rete semplificata di figura, in cui:

$$L' \equiv L - R^2C.$$

Se  $L > R^2C$  la reattanza della rete è induttiva, se  $L < R^2C$  la reattanza è capacitiva.

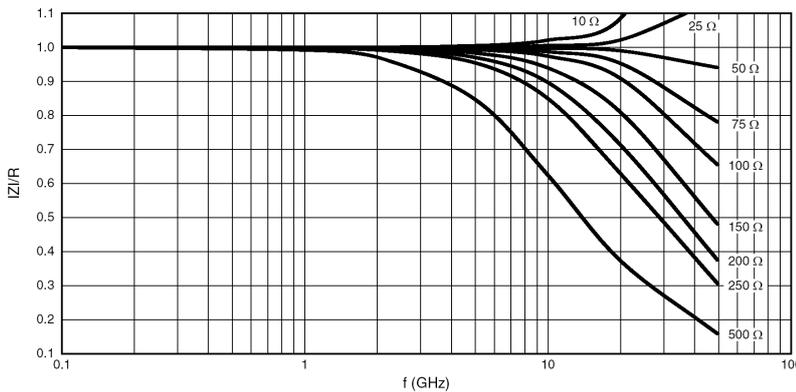
In modo analogo si può sviluppare l'espressione dell'ammettenza della rete considerata; cioè, valutando l'inverso della relazione (7.38), si ha:

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{R + j\omega L} + j\omega C = \frac{R - j\omega L}{R^2 - \omega^2 L^2} + j\omega C = \frac{R}{R^2 - \omega^2 L^2} + j\omega \left( C - \frac{L}{R^2 - \omega^2 L^2} \right).$$



D'altra parte, siccome  $\omega L \ll R$ , si ha:

$$\bar{Y} \approx \frac{1}{R} + j\omega \left( C - \frac{L}{R^2} \right),$$



Andamento del rapporto  $|Z|/R$  al variare della frequenza per resistori a film metallico a montaggio superficiale di formato 0603 di differenti valori (VISHAY).

che corrisponde alla rete semplificata di figura, in cui:

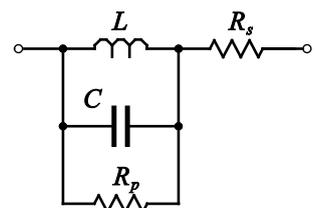
$$C' \equiv C - \frac{L}{R^2}.$$

I costruttori di resistori, in genere, descrivono il comportamento dei propri componenti dal punto di vista dei parametri parassiti rappresentando la variazione del rapporto  $|Z|/R$  al variare della frequenza.

### 7.13.2 Induttore

Per realizzare un opportuno valore di induttanza nel minore spazio possibile si avvolge un filo conduttore isolato a bassa resistenza in modo da realizzare un avvolgimento, denominato comunemente *bobina*. In genere, per ridurre le dimensioni geometriche della bobina a parità di induttanza, l'avvolgimento viene realizzato su un opportuno supporto ferromagnetico. Le bobine vengono pertanto distinte in relazione al supporto sul quale sono avvolte, cioè su un supporto ferromagnetico o su un supporto non ferromagnetico. Le bobine avvolte su nuclei ferromagnetici, sebbene più compatte delle altre, presentano elevati valori dei componenti parassiti ed inoltre, per correnti attraverso l'avvolgimento tali da determinare campi magnetici al di fuori del tratto rettilineo della caratteristica di magnetizzazione del materiale che costituisce il nucleo, manifestano una marcata dipendenza dell'induttanza dalla corrente che percorre l'avvolgimento. Le bobine avvolte su supporti non ferromagnetici, pur essendo caratterizzate da piccoli valori dei parametri parassiti, non consentono di ottenere elevati valori di induttanza e presentano una marcata sensibilità ai campi magnetici esterni.

La caduta di tensione lungo il filo conduttore che costituisce la bobina è rappresentata attraverso una resistenza  $R_s$  disposta in serie all'induttore; inoltre, per effetto delle differenze di potenziale tra le singole spire che costituiscono la bobina e tra esse e i conduttori limitrofi, la bobina è sede di un campo elettrico il cui effetto è schematizzabile attraverso una capacità  $C$  posta in parallelo all'induttore; infine le perdite dovute all'imperfetto isolamento tra le spire della bobina, le perdite dovute alle correnti di Foucault ed ai fenomeni di isteresi sono schematizzate attraverso una resistenza  $R_p$  disposta in parallelo all'induttore. L'impedenza compresa tra i rami dell'induttore vale pertanto:



$$\bar{Z} = R_s + \frac{1}{\frac{1}{R_p} + j\omega C + \frac{1}{j\omega L}} = R_s + \frac{j\omega LR_p}{R_p - \omega^2 R_p LC + j\omega L};$$

sviluppando tale espressione si ottiene:

$$\bar{Z} = R_s + R_p \frac{\omega^2 L^2 + j\omega LR_p (1 - \omega^2 LC)}{R_p^2 (1 - \omega^2 LC) + \omega^2 L^2}.$$

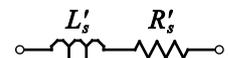
Pertanto è possibile identificare una pulsazione di risonanza data dalla relazione (7.27), in corrispondenza della quale la rete agisce come una resistenza di valore pari alla somma  $R_s + R_p$ . Per pulsazioni superiori a quella di risonanza prevalgono gli effetti capacitivi della rete ed il componente assume un comportamento resistivo-capacitivo. Per tale motivo i costruttori suggeriscono l'impiego degli induttori a frequenze inferiori di una decina di volte rispetto a tale frequenza di risonanza.

A basse frequenze, per  $\omega \ll 1/\sqrt{LC}$ , l'espressione dell'impedenza della bobina diventa:

$$\bar{Z} \approx R_s + R_p \frac{\omega^2 L^2 + j\omega LR_p}{R_p^2 + \omega^2 L^2} = R_s + \frac{\omega^2 L^2 R_p}{R_p^2 + \omega^2 L^2} + j \frac{\omega LR_p^2}{R_p^2 + \omega^2 L^2}$$

e tale impedenza presenta un comportamento resistivo-induttivo, in cui entrambe le componenti dipendono dalla frequenza e, in particolare, quella reattiva non dipende linearmente.

Alle basse frequenze si preferisce adoperare una schematizzazione semplificata dell'induttore che comprende una sola resistenza disposta in serie o in parallelo all'induttanza. In particolare, il circuito *serie* presenta un'impedenza:



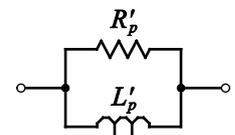
$$\bar{Z} = R'_s + j\omega L'_s$$

e il circuito parallelo presenta una ammettenza:

$$\bar{Y} = \frac{1}{R'_p} + \frac{1}{j\omega L'_p}.$$

Uguagliando l'inverso della prima relazione con la seconda, si ottiene l'identità:

$$\frac{R'_s - j\omega L'_s}{R_s'^2 + \omega^2 L_s'^2} = \frac{1}{R'_p} + \frac{1}{j\omega L'_p}$$



ed eguagliando le parti reali ed immaginarie, si ottengono le relazioni:

$$\begin{aligned} R'_p &= R'_s (1 + Q^2), \\ L'_p &= L'_s \left( 1 + \frac{1}{Q^2} \right), \end{aligned} \tag{7.39}$$

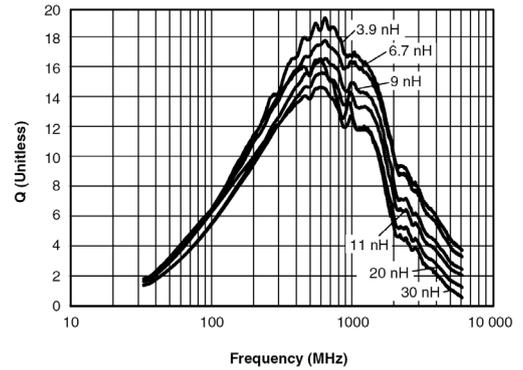
dove  $Q$  è detto *fattore di qualità della bobina*, vale:

$$Q \equiv \frac{\omega L'_s}{R'_s} \quad (7.40)$$

ed è pari alla tangente della fase dell'impedenza  $\bar{Z}$ . Dalle relazioni (7.39) e dalla definizione (7.40) segue, inoltre, che:

$$Q = \frac{R'_p}{\omega L'_p}$$

A causa dei diversi fenomeni fisici le resistenze  $R'_s$  e  $R'_p$ , rappresentative delle perdite nella bobina, dipendono dalla frequenza in maniera piuttosto complicata e, di conseguenza, il fattore di merito della bobina è funzione della frequenza ma non linearmente, come potrebbe sembrare, a prima vista, dalla relazione (7.40).

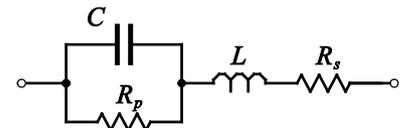


Andamento del fattore di qualità al variare della frequenza per induttori a spirale su un supporto in quarzo di differenti valori (VISHAY).

### 7.13.3 Condensatore

I condensatori sono realizzati a partire da fogli metallici, generalmente di alluminio, separati da un dielettrico isolante. Se il dielettrico è gassoso, come l'aria, le armature sono generalmente piane, di conseguenza non è possibile ottenere elevati valori capacitivi se non al costo di realizzare condensatori voluminosi; nondimeno i condensatori in aria presentano piccoli valori dei componenti parassiti. Se il dielettrico è costituito da un film di materiale plastico, come il polistirolo o il polietilene tereftalato, o di ceramica, è possibile ottenere grandi valori di capacità in piccole dimensioni con valori relativamente bassi dei parametri parassiti. Infine, adoperando elettroliti ad alta viscosità si realizzano condensatori con capacità molto grandi ma con elevati valori dei parametri parassiti.

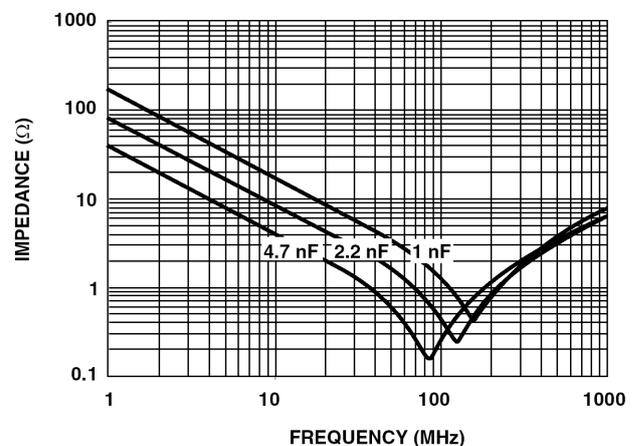
Il condensatore reale viene schematizzato attraverso una resistenza  $R_p$  disposta in parallelo al componente, che descrive il flusso di cariche attraverso il dielettrico non perfettamente isolante, una resistenza  $R_s$  disposta in serie al condensatore che rappresenta le perdite per effetto Joule lungo le armature e lungo i terminali e una induttanza  $L$  che schematizza gli effetti autoinduttivi dovuti sia alle armature che ai terminali del condensatore. L'impedenza ai capi del condensatore così schematizzato vale, pertanto:



$$\begin{aligned} \bar{Z} &= R_s + j\omega L + \frac{1}{\frac{1}{R_p} + j\omega C} = \\ &= R_s + j\omega L + \frac{R_p - j\omega R_p^2 C}{1 + \omega^2 R_p^2 C^2} \end{aligned}$$

da cui segue:

$$\bar{Z} = R_s + \frac{R_p}{1 + \omega^2 R_p^2 C^2} - j\omega \frac{R_p^2 C - L(1 + \omega^2 R_p^2 C^2)}{1 + \omega^2 R_p^2 C^2}$$



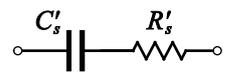
Andamento dell'impedenza al variare della frequenza per condensatori a montaggio superficiale per applicazioni di media frequenza (VISHAY).

Pertanto, è possibile identificare una pulsazione di risonanza  $\omega_0$  pari a

$$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{1}{R_p^2 C^2}},$$

in corrispondenza della quale la rete agisce come una resistenza di valore pari alla somma  $R_s + L/(R_p C)$ . Per pulsazioni superiori a quella di risonanza prevalgono gli effetti induttivi della rete ed il componente assume un comportamento resistivo-induttivo. Naturalmente il condensatore viene fatto funzionare a frequenze molto inferiori a quella di risonanza, per le quali è prevalente la reattanza capacitiva sugli altri parametri parassiti.

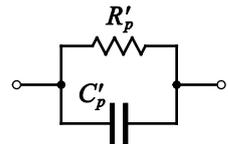
Alle basse frequenze si preferisce adoperare una schematizzazione semplificata del condensatore che comprende una sola resistenza disposta o in serie o in parallelo alla capacità, con parametri che possono essere determinati con un procedimento simile a quello adottato per l'induttore. In particolare, il circuito *serie* presenta un'impedenza:



$$\bar{Z} = R'_s + \frac{1}{j\omega C'_s} \quad (7.41)$$

e, il circuito *parallelo*, presenta una ammettenza:

$$\bar{Y} = \frac{1}{R'_p} + j\omega C'_p.$$



Uguagliando l'inverso della prima relazione con la seconda, si ottiene l'identità:

$$\frac{j\omega C'_s + \omega^2 R'_s C_s'^2}{1 + \omega^2 R_s'^2 C_s'^2} = \frac{1}{R'_p} + j\omega C'_p.$$

ed eguagliando le parti reali ed immaginarie, si ottengono le relazioni:

$$R'_p = R'_s \left( 1 + \frac{1}{\omega^2 R_s'^2 C_s'^2} \right),$$

$$C'_p = C'_s \left( \frac{1}{1 + \omega^2 R_s'^2 C_s'^2} \right).$$

Poiché risulta sempre  $\omega R'_s C'_s \ll 1$ , dalle relazioni precedenti si ha che  $R'_p \gg R'_s$  e  $C'_p \approx C'_s \approx C$ ; cioè, mentre il valore della capacità equivalente,  $C'_p$  o  $C'_s$ , risulta praticamente indipendente dal tipo di rete equivalente scelta, il valore della resistenza parassita,  $R'_p$  o  $R'_s$ , è notevolmente influenzato dalla scelta effettuata.

Quando un condensatore ideale è percorso da una corrente sinusoidale, la tensione ai suoi capi risulta sfasata in ritardo di  $90^\circ$  rispetto alla corrente, pertanto la potenza attiva assorbita dal condensatore è nulla. Nella pratica, a causa dei parametri parassiti, ciò non si verifica ed il ritardo  $\varphi$  della tensione rispetto alla corrente risulta inferiore a  $90^\circ$ ; la differenza:

$$\delta \equiv 90^\circ - |\varphi|,$$

denominata *angolo di perdita*, è un parametro generalmente fornito dai costruttori di condensatori per specificare le caratteristiche di tali componenti.

Dalla relazione (7.41) segue che l'impedenza *serie* del condensatore si esprime come:

$$\bar{Z} = R'_s + \frac{1}{j\omega C'_s} = R'_s - j \frac{1}{\omega C'_s} = \sqrt{R_s'^2 + \frac{1}{\omega^2 C_s'^2}} e^{j\varphi},$$

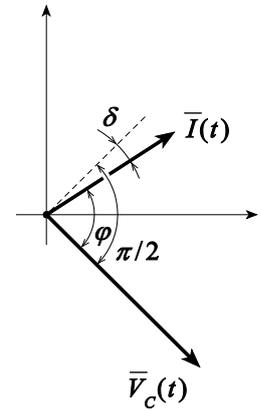
in cui

$$\tan \varphi = -\frac{1}{\omega R'_s C'_s}.$$

Pertanto, siccome  $C'_s \approx C$ , risulta:

$$\tan \delta = \tan(90^\circ - |\varphi|) = \frac{1}{|\tan \varphi|} = \omega R'_s C'_s \approx \omega R'_s C.$$

In genere i costruttori di condensatori specificano o l'angolo di perdita oppure la resistenza  $R'_s$ , spesso indicata con la sigla *ESR*, cioè *equivalent series resistance* del condensatore.



## 7.14 Studio dei circuiti nel dominio della frequenza

La descrizione di una rete sollecitata sinusoidalmente con le leggi di Kirchhoff, generalizzate al regime sinusoidale, determina un insieme di equazioni algebriche dipendenti dalla sola pulsazione. La valutazione delle correnti o delle tensioni a regime in questa rete, quali risposte a tale sollecitazione, è stabilita risolvendo delle equazioni algebriche anziché delle equazioni differenziali. Ciò è conseguenza del fatto che la rete è descritta tramite la variabile pulsazione anziché attraverso la variabile tempo; una grandezza sinusoidale, come corrente o tensione,  $x(t) = X \cos(\omega_0 t + \phi)$ , rappresentata in funzione del tempo, può essere descritta in maniera altrettanto completa in funzione della pulsazione. Allo scopo occorre specificare l'ampiezza e la fase della funzione in corrispondenza della pulsazione  $\omega_0$  della grandezza. Tale caratteristica consente di trasferire lo studio della rete sulla quale agisce questa grandezza, dal *dominio del tempo* al *dominio della frequenza*.

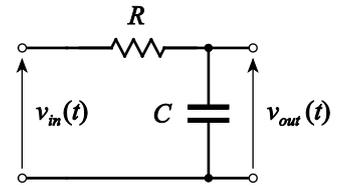
In particolare, per una rete, definite arbitrariamente due coppie di morsetti, rispettivamente, come morsetti di *ingresso* e morsetti di *uscita*, è possibile stabilire, nel dominio della frequenza, la relativa funzione di trasferimento introdotta nell'ambito della sua descrizione fatta attraverso il metodo della trasformata di Laplace (si veda l'Appendice B). Se  $x(t)$  rappresenta la sollecitazione sinusoidale della rete agente sui morsetti di ingresso ed  $y(t)$  è la risposta rilevabile ai morsetti di uscita, allora la funzione di trasferimento  $\bar{H}(\omega)$  della rete rispetto a tali morsetti, nel dominio della frequenza, vale:

$$\bar{H}(\omega) = \frac{\bar{Y}(\omega)}{\bar{X}(\omega)}, \quad (7.42)$$

in cui  $\bar{X}(\omega)$  e  $\bar{Y}(\omega)$  rappresentano le estensioni complesse, rispettivamente delle grandezze espresse nel dominio del tempo  $x(t)$  e  $y(t)$ .

**Esempio:** (circuito RC) Consideriamo il circuito di figura. La risposta  $v_{out}(t)$  ad un'eccitazione sinusoidale  $v_{in}(t)$  nel dominio della frequenza è:

$$\bar{V}_{out}(\omega) = \bar{V}_{in}(\omega) \frac{1}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \bar{V}_{in}(\omega) \frac{1}{1 + j\omega RC} = \bar{V}_{in}(\omega) \frac{1}{1 + j\omega\tau},$$



in cui  $\bar{V}_{in}(\omega)$  e  $\bar{V}_{out}(\omega)$  sono, rispettivamente, le estensioni complesse di  $v_{in}(t)$  e di  $v_{out}(t)$ , e  $\tau$  vale  $RC$ ; pertanto la funzione di trasferimento di tale circuito, nel dominio della frequenza, è:

$$\bar{H}(\omega) = \frac{\bar{V}_{out}(\omega)}{\bar{V}_{in}(\omega)} = \frac{1}{1 + j\omega\tau},$$

di cui modulo  $|\bar{H}(\omega)|$  e fase  $\phi(\omega)$  valgono, rispettivamente:

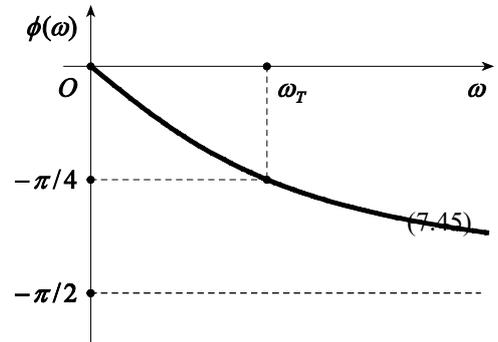
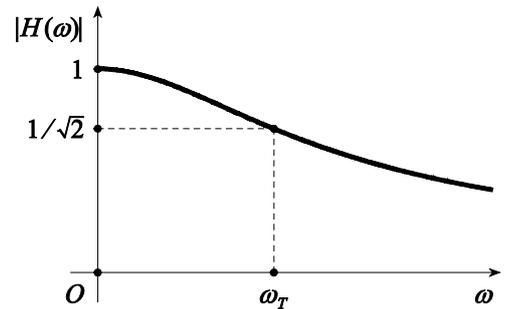
$$|\bar{H}(\omega)| = \left| \frac{1}{1 + j\omega\tau} \right| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega\tau)^2}}, \quad (7.43)$$

$$\phi(\omega) = -\arctan(\omega\tau). \quad (7.44)$$

In figura sono rappresentati i grafici di tali funzioni della pulsazione. Convenzionalmente si definisce *pulsazione di taglio* la pulsazione  $\omega_r$  in corrispondenza della quale la funzione di trasferimento assume il valore di  $1/\sqrt{2}$ ; dalla relazione (7.43) segue pertanto:

$$\omega_r = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC}.$$

Alla pulsazione di taglio, la fase (7.44) della funzione di trasferimento diventa pari a  $-\pi/4$ .



L'esempio precedente mette in luce che la descrizione nel dominio della frequenza della funzione di trasferimento ne consente la sua rappresentazione grafica, a dispetto dell'espressione stabilita col metodo della trasformata di Laplace.

Consideriamo una rete di funzione di trasferimento  $\bar{H}(\omega)$ ; poiché  $\bar{H}(\omega)$  è un numero complesso, può essere rappresentato in forma esponenziale:

$$\bar{H}(\omega) = |\bar{H}(\omega)| e^{j\phi(\omega)},$$

dove  $|\bar{H}(\omega)|$  e  $\phi(\omega)$  sono, rispettivamente, il modulo e la fase di  $\bar{H}(\omega)$ . Si noti che  $|\bar{H}(\omega)|$  e  $\phi(\omega)$  sono grandezze suscettibili di misura:  $|\bar{H}(\omega)|$  rappresenta il rapporto tra le ampiezze della grandezza all'uscita e di quella all'ingresso,  $\phi(\omega)$  lo sfasamento. Tali grandezze hanno un importante significato fisico perché permettono di dedurre da una sollecitazione sinusoidale agente in ingresso, la risposta della rete; infatti, se:

$$x(t) = X \cos(\omega t), \quad (7.46)$$

la cui estensione complessa vale:

$$\bar{X}(\omega) = X e^{j\omega t},$$

allora, dalla relazione (7.42) segue:

$$\bar{Y}(\omega) = \bar{H}(\omega) \bar{X}(\omega) = |\bar{H}(\omega)| e^{j\phi(\omega)} X e^{j\omega t} = |\bar{H}(\omega)| X e^{j[\omega t + \phi(\omega)]},$$

così la risposta  $y(t)$  della rete è:

$$y(t) = \mathcal{R}_e \{ \bar{Y}(\omega) \} = |\bar{H}(\omega)| X \cos[\omega t + \phi(\omega)]. \quad (7.47)$$

Pertanto  $|\bar{H}(\omega)|$  e  $\phi(\omega)$  permettono di stabilire la risposta della rete a qualsiasi eccitazione sinusoidale.

Dalla relazione (7.47) segue:

$$y(t) = |\bar{H}(\omega)| X \cos \left\{ \omega \left[ t + \frac{\phi(\omega)}{\omega} \right] \right\} = |\bar{H}(\omega)| X \cos[\omega(t + t_d)], \quad (7.48)$$

dove

$$t_d \equiv \frac{\phi(\omega)}{\omega}$$

Dal confronto tra l'espressione nel dominio del tempo della sollecitazione (7.46) e della corrispondente risposta (7.48) si deduce che non solo esse hanno, in generale, ampiezze diverse ma risultano sfasate temporalmente. Il tempo  $t_d$  definito attraverso l'espressione precedente viene detto *ritardo di fase*.

Affinché l'ampiezza della risposta e il ritardo di fase risultino indipendenti dalla pulsazione occorre che si abbia:

$$\begin{aligned} |\bar{H}(\omega)| &= \eta, \\ t_d &= \frac{\phi(\omega)}{\omega} = \tau, \end{aligned}$$

dove  $\eta$  e  $\tau$  sono costanti rispetto ad  $\omega$ . Tali relazioni sono dette *condizioni di non distorsione*, in quanto la rete che le soddisfa è caratterizzata dal fatto che la sua risposta  $y(t)$  è pari al suo stimolo  $x(t)$  moltiplicato la costante  $\eta$  e ritardato o anticipata del tempo  $\tau$ :

$$y(t) = \eta x(t + \tau).$$

Nelle reti reali, poiché la risposta può solo essere ritardata rispetto lo stimolo, risulta  $\tau < 0$ .

**Esempio:** Stabiliamo la risposta del circuito *RC* ad uno stimolo sinusoidale; quindi, data una sollecitazione:

$$v_{in}(t) = V_{in} \sin(\omega_0 t),$$

dalle relazioni (7.43) e (7.44) segue che la risposta  $v_{out}(t)$  della rete vale:

$$v_{out}(t) = V_{in} |\bar{H}(\omega_0)| \sin[\omega_0 t + \phi(\omega_0)] = V_{in} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega_0 \tau)^2}} \sin[\omega_0 t - \arctan(\omega_0 \tau)].$$

**Esempio:** Il circuito  $RC$  può essere considerato un quadripolo che soddisfa le condizioni di non distorsione per piccoli valori di  $\omega$ ; infatti, sviluppando in serie le relazioni (7.43) e (7.44) intorno a  $\omega = 0$ , si ha:

$$|\bar{H}(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \tau)^2}} \approx 1,$$

$$\phi(\omega) = -\arctan(\omega \tau) \approx -\omega \tau.$$

L'esempio successivo evidenzia una caratteristica propria dei circuiti sollecitati in maniera sinusoidale e strettamente connessa alla descrizione nel dominio della frequenza.

**Esempio:** Dalla relazione (7.43) segue che per pulsazioni  $\omega$  molto minori della pulsazione di taglio  $\omega_r$ , il modulo della funzione di trasferimento del circuito  $RC$  diventa prossimo all'unità e per pulsazioni molto maggiori della pulsazione di taglio  $\omega_r$ , il modulo della funzione di trasferimento si annulla; in particolare:

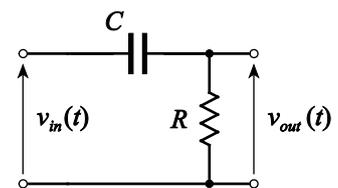
$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |\bar{H}(\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \tau)^2}} = 1,$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |\bar{H}(\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + (\omega \tau)^2}} = 0.$$

Pertanto, il circuito  $RC$  può essere riguardato come un *filtro passa basso*, ovvero un dispositivo che attenua fortemente le tensioni sinusoidali  $v_{in}(t)$  di pulsazione superiore a quella di taglio, mentre lascia inalterate quelle con pulsazione inferiore a quella di taglio.

**Esempio:** (circuito  $CR$ ) Consideriamo il circuito di figura in cui il condensatore è inizialmente scarico. La risposta  $v_{out}(t)$  ad un'eccitazione sinusoidale  $v_{in}(t)$  nel dominio della frequenza è:

$$\bar{V}_{out}(\omega) = \bar{V}_{in}(\omega) \frac{R}{R + \frac{1}{j\omega C}} = \bar{V}_{in}(\omega) \frac{j\omega RC}{1 + j\omega RC} = \bar{V}_{in}(\omega) \frac{j\omega \tau}{1 + j\omega \tau},$$



dove  $\tau$  vale  $RC$ , pertanto la funzione di trasferimento di tale circuito nel dominio della frequenza è:

$$\bar{H}(\omega) = \frac{\bar{V}_{out}(\omega)}{\bar{V}_{in}(\omega)} = \frac{j\omega \tau}{1 + j\omega \tau},$$

di cui modulo  $|\bar{H}(\omega)|$  e fase  $\phi(\omega)$  valgono, rispettivamente:

$$|\bar{H}(\omega)| = \left| \frac{j\omega \tau}{1 + j\omega \tau} \right| = \frac{\omega \tau}{\sqrt{1 + (\omega \tau)^2}}, \quad (7.49)$$

$$\phi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\omega \tau). \quad (7.50)$$

In figura sono rappresentati i grafici di tali funzioni della pulsazione. Il modulo della funzione di trasferimento (7.49) assume il valore di  $1/\sqrt{2}$  in corrispondenza della pulsazione di taglio data dalla relazione (7.45) e, per tale pulsazione, la fase (7.50) della funzione di trasferimento diventa pari a  $\pi/4$ . Dalla relazione (7.49) segue che per pulsazioni  $\omega$  molto minori della pulsazione di taglio  $\omega_T$ , il modulo della funzione di trasferimento del circuito  $CR$  si annulla e per pulsazioni molto maggiori della pulsazione di taglio  $\omega_T$ , il modulo della funzione di trasferimento diventa prossimo all'unità; in particolare:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |\bar{H}(\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\omega\tau}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} = 0,$$

$$\lim_{\omega \rightarrow +\infty} |\bar{H}(\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow +\infty} \frac{\omega\tau}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} = 1.$$

Pertanto, il circuito  $CR$  può essere riguardato come un *filtro passa alto*, ovvero un dispositivo che attenua fortemente le tensioni sinusoidali  $v_{in}(t)$  di pulsazione inferiore a quella di taglio, mentre lascia inalterate quelle con pulsazione superiore a quella di taglio.

