APPENDICE

A.1 Derivate notevoli

$y = k$	$\frac{dy}{dx} = 0$	$y = x$	$\frac{dy}{dx} = 1$
$y = x^n$	$\frac{dy}{dx} = nx^{n-1}$	$y = \left[f(x) \right]^n$	$\frac{dy}{dx} = n\left[f(x) \right]^{n-1} \frac{df(x)}{dx}$
$y = \sqrt{x}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$y = \sqrt{f(x)}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{f(x)}} \frac{df(x)}{dx}$
$y = \sqrt[n]{x}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$y = \sqrt[n]{f(x)}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n\sqrt[n]{f(x)^{n-1}}} \frac{df(x)}{dx}$
$y = \sqrt[n]{x^m}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{m}{n\sqrt[n]{x^{n-m}}}$	$y = \sqrt[n]{\left[f(x) \right]^m}$	$\frac{dy}{dx} = \frac{m}{n\sqrt[n]{\left[f(x) \right]^{n-m}}} \frac{df(x)}{dx}$
$y = \sin x$	$\frac{dy}{dx} = \cos x$	$y = \sin f(x)$	$\frac{dy}{dx} = \cos f(x) \frac{df(x)}{dx}$
$y = \cos x$	$\frac{dy}{dx} = -\sin x$	$y = \cos f(x)$	$\frac{dy}{dx} = -\sin f(x) \frac{df(x)}{dx}$
$y = \tan x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x}$	$y = \tan f(x)$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos^2 f(x)} \frac{df(x)}{dx}$
$y = \cot x$	$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$y = \cot f(x)$	$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sin^2 f(x)} \frac{df(x)}{dx}$
$y = \arcsin x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arcsin f(x)$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-\left[f(x) \right]^2}} \frac{df(x)}{dx}$
$y = \arccos x$	$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$y = \arccos f(x)$	$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-\left[f(x) \right]^2}} \frac{df(x)}{dx}$
$y = \arctan x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-x^2}$	$y = \arctan f(x)$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+\left[f(x) \right]^2} \frac{df(x)}{dx}$
$y = \operatorname{arccot} x$	$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1-x^2}$	$y = \operatorname{arccot} f(x)$	$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{1+\left[f(x) \right]^2} \frac{df(x)}{dx}$
$y = \log_a x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x} \log_a e$	$y = \log_a f(x)$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f(x)} \log_a e \frac{df(x)}{dx}$
$y = \ln x$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$	$y = \ln f(x)$	$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f(x)} \frac{df(x)}{dx}$
$y = a^x$	$\frac{dy}{dx} = a^x \ln a$	$y = a^{f(x)}$	$\frac{dy}{dx} = a^{f(x)} \ln a \frac{df(x)}{dx}$
$y = e^x$	$\frac{dy}{dx} = e^x$	$y = e^{f(x)}$	$\frac{dy}{dx} = e^{f(x)} \frac{df(x)}{dx}$
$y = x^x$	$\frac{dy}{dx} = x^x (1 + \ln x)$	$y = \left[f(x) \right]^{g(x)}$	$\frac{dy}{dx} = \left[f(x) \right]^{g(x)} \left[\frac{dg(x)}{dx} \ln f(x) + \frac{g(x)}{f(x)} \frac{df(x)}{dx} \right]$

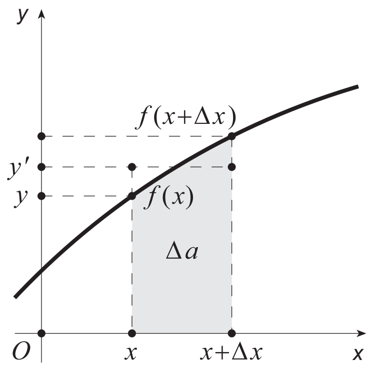
A.2 Integrali notevoli

$\int_{x_0}^{x} d\xi = x - x_0$	$\int_{x_0}^{x} k\, f(\xi)\, d\xi = k \int_{x_0}^{x} f(\xi)\, d\xi$
$\int_{x_0}^{x} \xi^n\, d\xi = \frac{x^{n+1}}{n+1} - \frac{{x_0}^{n+1}}{n+1} \qquad (n \neq -1)$	$\int_{x_0}^{x} \left[f(\xi) \right]^n \frac{df(\xi)}{d\xi} d\xi = \frac{\left[f(x) \right]^{n+1}}{n+1} - \frac{\left[f(x_0) \right]^{n+1}}{n+1}$
$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{2\sqrt{\xi}} d\xi = \sqrt{x} - \sqrt{x_0}$	$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{2\sqrt{f(\xi)}} \frac{df(\xi)}{d\xi} d\xi = \sqrt{f(x)} - \sqrt{f(x_0)}$
$\int_{x_0}^{x} \sin\xi\, d\xi = -(\cos x - \cos x_0)$	$\int_{x_0}^{x} \sin f(\xi) \frac{df(\xi)}{d\xi} d\xi = -\left[\cos f(x) - \cos f(x_0) \right]$
$\int_{x_0}^{x} \cos\xi\, d\xi = (\sin x - \sin x_0)$	$\int_{x_0}^{x} \cos f(\xi) \frac{df(\xi)}{d\xi} d\xi = \left[\sin f(x) - \sin f(x_0) \right]$
$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{\sin^2\xi} d\xi = -(\cot x - \cot x_0)$	$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{\sin^2 f(\xi)} \frac{df(\xi)}{d\xi} d\xi = -\left[\cot f(x) - \cot f(x_0) \right]$
$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{\cos^2\xi} d\xi = (\tan x - \tan x_0)$	$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{\cos^2 f(\xi)} \frac{df(\xi)}{d\xi} d\xi = \left[\tan f(x) - \tan f(x_0) \right]$
$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}} d\xi = \arcsin x - \arcsin x_0$	$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{\sqrt{1-\left[f(\xi) \right]^2}} \frac{df(\xi)}{d\xi} d\xi = \arcsin f(x) - \arcsin f(x_0)$
$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{1+\xi^2} d\xi = \arctan x - \arctan x_0$	$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{1+\left[f(\xi) \right]^2} \frac{df(\xi)}{d\xi} d\xi = \arctan f(x) - \arctan f(x_0)$
$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{\xi} d\xi = \ln\lvert x \rvert - \ln\lvert x_0 \rvert$	$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{f(\xi)} \frac{df(\xi)}{d\xi} d\xi = \ln\lvert f(x) \rvert - \ln\lvert f(x_0) \rvert$
$\int_{x_0}^{x} e^{\xi}\, d\xi = e^{x} - e^{x_0}$	$\int_{x_0}^{x} e^{f(\xi)} \frac{df(\xi)}{d\xi} d\xi = e^{f(x)} - e^{f(x_0)}$
$\int_{x_0}^{x} a^{\xi}\, d\xi = \frac{a^{x}}{\ln a} - \frac{a^{x_0}}{\ln a}$	$\int_{x_0}^{x} a^{f(\xi)} \frac{df(\xi)}{d\xi} d\xi = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} - \frac{a^{f(x_0)}}{\ln a}$
$\int_{x_0}^{x} (\xi + a)^m\, d\xi = \frac{(x+a)^{m+1}}{m+1} - \frac{(x_0+a)^{m+1}}{m+1}$	$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{a^2+\xi^2} d\xi = \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x}{a} \right) - \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{x_0}{a} \right)$
$\int_{x_0}^{x} (a + b\xi)^n\, d\xi = \frac{(a+bx)^{n+1}}{b(n+1)} - \frac{(a+bx_0)^{n+1}}{b(n+1)}$	$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{1-\xi^2} d\xi = \frac{1}{2} \ln\left\lvert \frac{1+x}{1-x} \right\rvert - \frac{1}{2} \ln\left\lvert \frac{1+x_0}{1-x_0} \right\rvert$
$\int_{x_0}^{x} \tan\xi\, d\xi = -\left[\ln(\cos x) - \ln(\cos x_0) \right]$	$\int_{x_0}^{x} \cot\xi\, d\xi = \ln\lvert \sin x \rvert - \ln\lvert \sin x_0 \rvert$
$\int_{x_0}^{x} \sin^2\xi\, d\xi = \frac{1}{2}(x - \sin x \cos x) - \frac{1}{2}(x_0 - \sin x_0 \cos x_0)$	$\int_{x_0}^{x} \cos^2\xi\, d\xi = \frac{1}{2}(x + \sin x \cos x) - \frac{1}{2}(x_0 + \sin x_0 \cos x_0)$
$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{\sin\xi} d\xi = \ln\left\lvert \tan\left(\frac{x}{2} \right) \right\rvert - \ln\left\lvert \tan\left(\frac{x_0}{2} \right) \right\rvert$	$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{\cos\xi} d\xi = \frac{1}{2} \ln\left\lvert \frac{1+\sin x}{1-\sin x} \right\rvert - \frac{1}{2} \ln\left\lvert \frac{1+\sin x_0}{1-\sin x_0} \right\rvert$
$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{1+\cos\xi} d\xi = \tan\left(\frac{x}{2} \right) - \tan\left(\frac{x_0}{2} \right)$	$\int_{x_0}^{x} \frac{1}{1-\cos\xi} d\xi = -\left[\cot\left(\frac{x}{2} \right) - \cot\left(\frac{x_0}{2} \right) \right]$

A.3 Teorema fondamentale del calcolo

Consideriamo una funzione continua $y = f\left(x\right)$ e stabiliamo il tasso di accrescimento dell'area sottesa dalla sua curva tra due punti. Sia *y* il valore assunto dalla funzione in corrispondenza di un punto *x* e consideriamo l'intervallo di ampiezza Δx compreso tra *x* e $x + \Delta x$. In tale intervallo l'area *a* considerata risulterà aumentata di una quantità Δa così il corrispondente tasso di crescita sarà:

$$\frac{\Delta a}{\Delta x}.$$



Possiamo considerare un valore y' dell'ordinata *y* tale che l'area $y'\,\Delta x$ è uguale a Δa:

$$y'\,\Delta x = \Delta a,$$

allora il tasso di crescita dell'area può esprimersi come:

$$\frac{\Delta a}{\Delta x} = \frac{y'\Delta x}{\Delta x} = y'.$$

D'altra parte risulta (si veda la figura):

$$f\left(x\right) < y' < f\left(x + \Delta x\right),$$

così, passando al limite per $\Delta x \to 0$ si ha:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta a}{\Delta x} = \frac{da}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} y' = y = f\left(x\right).$$

L'area sottesa dalla curva $y = f\left(x\right)$ a partire da un punto arbitrario x_0 al punto *x* è pari all'integrale di $f\left(x\right)$ calcolato tra tali punti:

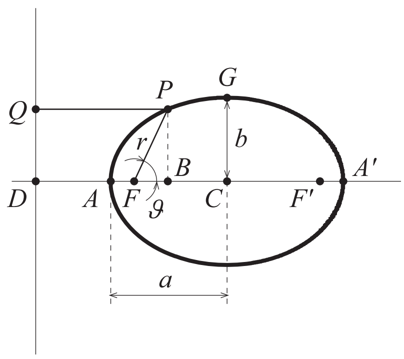
$$a = \int_{x_0}^{x} f\left(\xi\right) d\xi,$$

per cui, sostituendo nella relazione precedente, si ottiene:

$$\frac{d}{dx} \int_{x_0}^{x} f\left(\xi\right) d\xi = f\left(x\right),$$

quindi l'operazione di integrazione può essere riguardata come l'operazione inversa della derivazione; questo risultato prende il nome di *teorema fondamentale del calcolo*.

A.4 Sezioni coniche



Si definisce *sezione conica* la curva generata da un punto che si sposta in modo tale da mantenere costante il rapporto fra la distanza da un punto, detto *fuoco*, ed una retta, detta *direttrice*. Tale valore costante prende il nome di *eccentricità*; in particolare, con riferimento alla figura, l'eccentricità ε vale:

$$\varepsilon = \frac{\overline{PF}}{\overline{PQ}}.$$

Posto:

$$r \equiv \overline{PF},$$
$$d \equiv \overline{FD},$$

allora risulta:

$$\overline{PQ} = \overline{FD} + \overline{FB} = d + r\cos\vartheta.$$

Poiché la lunghezza $\overline{PQ}$ può esprimersi attraverso l'eccentricità come:

$$\overline{PQ} = \frac{\overline{PF}}{\varepsilon} = \frac{r}{\varepsilon},$$

sostituendo nella relazione precedente, si trova:

$$\frac{r}{\varepsilon} = d + r\cos\vartheta,$$

da cui segue:

$$r = \frac{\varepsilon d}{1 - \varepsilon\cos\vartheta},$$

espressione che prende il nome di *equazione polare della sezione conica*. Se $\varepsilon < 1$ la curva è un'*ellisse*, se $\varepsilon = 1$ è un'*iperbole* e de $\varepsilon > 1$ è una parabola; in particolare, per un'ellisse, in A' si ha $\vartheta = 0$ e in A si ha $\vartheta = \pi$, per cui le corrispondenti lunghezze r_1 e r_2 del segmento $\overline{PF}$ valgono:

$$r_1 = \frac{\varepsilon d}{1-\varepsilon}, \qquad (\vartheta = 0)$$
$$r_2 = \frac{\varepsilon d}{1+\varepsilon}; \qquad (\vartheta = \pi)$$

posto quindi:

$$a \equiv \frac{1}{2}(r_1 + r_2),$$

che prende il nome di *semiasse maggiore*, si ha:

$$a = \frac{1}{2}(r_1 + r_2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon d}{1-\varepsilon} + \frac{\varepsilon d}{1+\varepsilon}\right) = \frac{1}{2}\frac{\varepsilon d + \varepsilon^2 d + \varepsilon d - \varepsilon^2 d}{1-\varepsilon^2} = \frac{\varepsilon d}{1-\varepsilon^2}.$$

Si prova inoltre che il *semiasse minore* b, pari alla lunghezza del segmento $\overline{GC}$ vale:

$$b = a\sqrt{1-\varepsilon^2}\ .$$

Infine l'area dell'ellisse risulta:

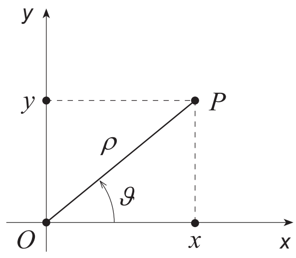
$$A = \pi ab = \pi a^2 \sqrt{1-\varepsilon^2}\ ,$$

e per $\varepsilon = 0$ l'ellisse coincide con un cerchio.

A.5 Sistemi di coordinate

In molteplici circostanze non risulta efficace l'impiego dei sistemi di coordinate cartesiani, sia nel piano che nello spazio. Ciò accade in particolare quando risulta più conveniente esprimere le posizioni dei punti attraverso degli angoli e delle distanze.

Nel piano l'identificazione della posizione di un punto P attraverso un raggio ed un angolo è detta *polare*: la coordinata radiale ρ rappresenta la distanza di P da un'origine O detta *polo*; la coordinata angolare ϑ è l'angolo che la retta posta in corrispondenza di 0° deve descrivere per sovrapporsi alla retta passante per P e per O. In figura sono confrontate le coordinate cartesiane del punto P con le corrispondenti coordinate polari. Note le coordinate cartesiane x e y di P è possibile dedurre le corrispondenti coordinate polari ρ e ϑ attraverso le relazioni:

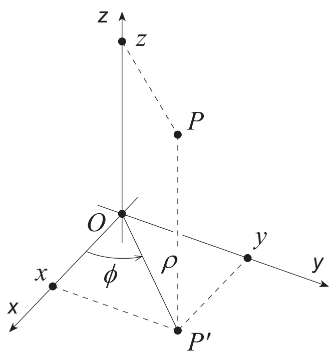


$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$
$$\tan\vartheta = \frac{y}{x}\,;$$

viceversa, risulta:

$$x = \rho\cos\vartheta\,,$$
$$y = \rho\sin\vartheta\,;$$

La naturale estensione del sistema di coordinate polari nelle tre dimensioni è rappresentata dal sistema *cilindrico*. In questo caso la posizione del punto P è rappresentata attraverso le coordinate polari ρ e ϕ della proiezione P' di P sul piano xy e dalla distanza z di P da tale piano (si veda la figura). Le coordinate cilindriche ρ, ϕ e z del punto P possono essere dedotte da quelle cartesiane attraverso le relazioni:

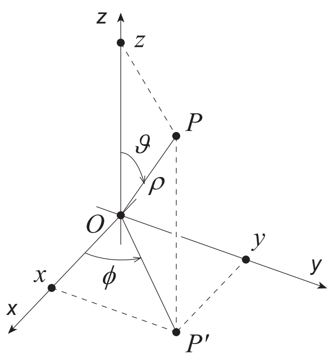


$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}\,,$$
$$\tan\phi = \frac{y}{x}\,,$$
$$z = z\,;$$

viceversa:

$$x = \rho\cos\vartheta\,,$$
$$y = \rho\sin\vartheta\,,$$
$$z = z\,.$$

Il sistema di coordinate *sferiche* identifica un punto nello spazio attraverso una distanza e due angoli. In particolare ρ è la distanza del punto P dall'origine O, ϑ è l'angolo compreso tra l'asse z e il segmento OP e ϕ è l'angolo compreso tra l'asse x e la proiezione OP' del segmento OP sul piano *xy* (si veda la figura). Le coordinate sferiche ρ, ϑ e ϕ del punto *P* possono essere dedotte da quelle cartesiane attraverso le relazioni:



$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,,$$
$$\tan\phi = \frac{y}{x}\,,$$
$$\cos\vartheta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\,;$$

viceversa, risulta:

$$x = \rho \sin\vartheta \cos\phi\,,$$
$$y = \rho \sin\vartheta \sin\phi\,,$$
$$z = \rho \cos\vartheta\,.$$

Spesso la necessità di un cambiamento di sistema di coordinate si ha nel calcolo di integrali; ciò accade, ad esempio, qualora il dominio di integrazione è caratterizzato da simmetrie tali da rendere inadeguato l'uso delle coordinate cartesiane. Supponiamo di dover integrare la funzione $f\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right)$ su un dominio *V*. Siano

$$x_1 = T_1\left(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n\right),$$
$$x_2 = T_2\left(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n\right),$$
$$\ldots$$
$$x_n = T_n\left(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n\right),$$

le formule di trasformazione nelle coordinate $\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n$, risulta allora:

$$\int_V f\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \int_{\mathcal{V}} f\left[T_1\left(\xi_1\right), T_2\left(\xi_2\right), \ldots T_n\left(\xi_n\right)\right] \frac{\partial\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right)}{\partial\left(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n\right)} d\xi_1 d\xi_2 \cdots d\xi_n$$

dove $\mathcal{V}$ è il dominio *V* trasformato attraverso *T* e

$$\frac{\partial\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right)}{\partial\left(\xi_1, \xi_2, \ldots \xi_n\right)} \equiv \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_2} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial \xi_n} \end{vmatrix}$$

è detta *matrice jacobiana* della trasformazione *T*.

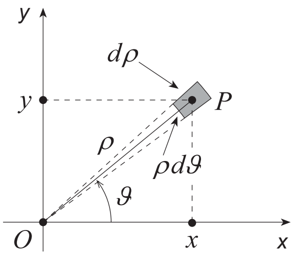
Esempio: Supponiamo di voler integrare la funzione $f(x, y)$ su un domino *S* e che risulti opportuno il cambiamento di variabile da cartesiane a polari; la matrice jacobiana della trasformazione è:

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\vartheta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial\rho}\rho\cos\vartheta & \frac{\partial}{\partial\vartheta}\rho\cos\vartheta \\ \frac{\partial}{\partial\rho}\rho\sin\vartheta & \frac{\partial}{\partial\vartheta}\rho\sin\vartheta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\vartheta & -\rho\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \rho\cos\vartheta \end{vmatrix} = \rho\,;$$

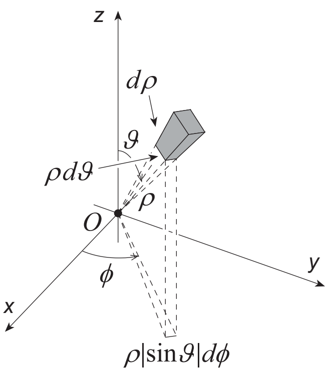
ne segue che l'integrale di tale funzione nel domino specificato può esprimersi come:

$$\int_S f(x,y)\,dxdy = \int_{\mathcal{S}} f(\rho\cos\vartheta,\rho\sin\vartheta)\frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\vartheta)}d\rho d\vartheta = \int_{\mathcal{S}} f(\rho\cos\vartheta,\rho\sin\vartheta)\rho d\rho d\vartheta\,,$$

in cui $\mathcal{S}$ rappresenta il nuovo dominio di integrazione.



Il risultato conseguito attraverso l'esempio precedente si presta ad un'utile interpretazione geometrica. Il cambiamento di variabile richiede che si stabilisca l'espressione dell'elemento di area *dxdy* nelle coordinate specificate, in questo caso le coordinate polari. Dalla figura mostrata si può osservare che l'elemento infinitesimo di area può esprimersi attraverso queste coordinate come un rettangolo infinitesimo di lati $\rho d\vartheta$ e $d\rho$; l'elemento d'area vale pertanto $\rho d\rho d\vartheta$, così come dedotto in maniera analitica. Analogamente, nello spazio, come è mostrato dalla figura, l'elemento infinitesimo di volume in coordinate sferiche è il parallelepipedo di lati $\rho d\vartheta$, $d\rho$ e $\rho|\sin\vartheta|d\phi$, pertanto il volume di tale elemento vale $\rho^2|\sin\vartheta|d\rho d\vartheta d\phi$; infatti la matrice jacobiana della trasformazione da coordinate cartesiane a coordinate sferiche vale



$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\vartheta,\phi)} = \begin{vmatrix} \sin\vartheta\cos\phi & \rho\cos\vartheta\cos\phi & -\rho\sin\vartheta\sin\phi \\ \sin\vartheta\sin\phi & \rho\cos\vartheta\sin\phi & \rho\sin\vartheta\cos\phi \\ \cos\vartheta & -\rho\sin\vartheta & 0 \end{vmatrix} = \rho^2|\sin\vartheta|\,.$$