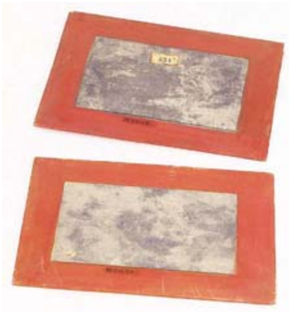
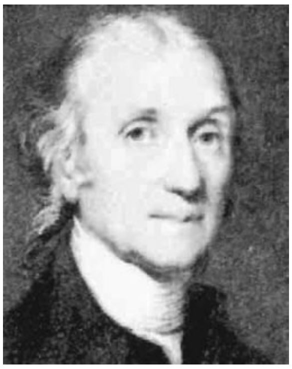
2 CAPACITÀ ELETTRICA E DIELETTRICI

2.1 Capacità elettrica



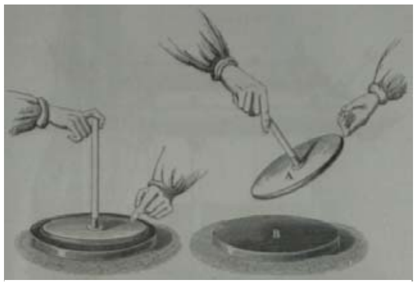
Quadri di Franklin

Già l'anno dopo la costruzione della bottiglia di Leyda da parte di Kleist e Musschenbroek ci si rese conto che l'acqua contenuta nella bottiglia poteva essere sostituita da fogli metallici disposti sia sulla faccia interna che su quella esterna della bottiglia, ottenendo così un dispositivo facilmente trasportabile. Collegando tra loro separatamente le facce interne e quelle esterne di una batteria di bottiglie di Leyda, Franklin comprese conto che era possibile aumentarne gli effetti, inoltre Franklin scoprì che si ottenevano effetti uguali a quelli della bottiglia di Leyda caricando due piani conduttori separati da un foglio sottile di vetro (*quadro di Franklin*). Nel 1758 Beccaria verificò che materiali resinosi o a base di zolfo potevano efficacemente rimpiazzare il vetro dei quadri di Franklin, osservando inoltre che l'intensità degli effetti elettrici erano dipendenti dal materiale di separazione adoperato. Sebbene gran parte dei suoi risultati non furono resi noti che nel 1879, circa settant'anni anni dopo la sua morte, il fisico inglese Henry Cavendish intorno alla fine del 18° secolo aveva per primo introdotto una grandezza, la *capacità*, in grado di fornire una misura degli effetti dovuti alla bottiglia di Leyda e aveva studiato diverse geometrie per realizzare le bottiglie di Leyda, stabilendone per ciascuna la relativa capacità. Alessandro Volta, probabilmente ispirato da alcuni lavori pubblicati da Cavendish nel 1771, nel 1782 provò che la differenza di potenziale tra due piatti metallici separati da un sottile strato resinoso aumenta quando i due piatti vengono allontanati; a questo sistema di conduttori Volta attribuì il nome di *condensatore*. Inoltre Volta verificò che la differenza di potenziale ai capi del condensatore varia in ragione inversa della capacità.



Henry Cavendish

Consideriamo due conduttori tra i quali è stabilita una certa differenza di potenziale V; sperimentalmente si osserva che la carica Q che essi assumono è proporzionale alla differenza di potenziale V. Il sistema costituito da due conduttori tra i quali c'è *induzione completa*, cioè il valore assoluto della carica su ciascun conduttore è lo stesso ma il segno è opposto, prende il nome di *condensatore*. Si definisce *capacità elettrica C* del condensatore il rapporto:



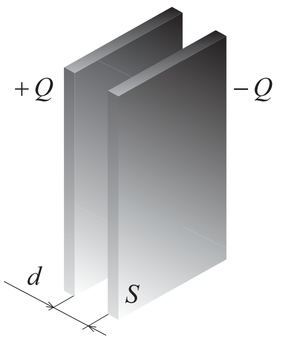
Descrizione dell'uso dell'apparato (*elettroforo*) adoperato da Volta per lo studio del condensatore

$$C \equiv \frac{Q}{V}, \tag{2.1}$$

inoltre tale rapporto risulta, in generale, indipendente dalla differenza di potenziale applicata ma dipende unicamente dalla geometria dei conduttori e dalla caratteristiche del mezzo circostante; per il momento assumiamo che tale mezzo sia il vuoto. L'unità di misura della capacità è il *Farad* (*F*) e risulta[1] $1F \equiv 1C/1V$. In figura è mostrato il simbolo adoperato nella schematizzazione dei circuiti elettrici per rappresentare il condensatore.

2.2 Calcolo di capacità

Tale calcolo si esegue assegnando un valore arbitrario di carica ai conduttori, che relativamente ai condensatori prendono il nome di *armature*, e valutando la corrispondente differenza di potenziale che si origina. Di seguito si svolgerà tale determinazione per alcune geometrie notevoli.



Esempio: (*Capacità di un condensatore piano*). Consideriamo due armature piane, parallele, della stessa superficie *S* e distanti *d*. Se sulle armature sono presenti delle cariche $+Q$ e $-Q$, la densità σ con cui è distribuita la carica su ciascuna armatura è, in valore assoluto, Q/S. Se la distanza tra le armature è molto più piccola della lunghezza e larghezza delle armature, si possono trascurare gli effetti ai bordi ed assumere che il campo elettrico nella regione compresa tra le armature sia uniforme e, dalla relazione (1.10) vale:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

pertanto dalla (1.12) la differenza di potenziale tra le armature è:

$$V = E\,d = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} d\,,$$

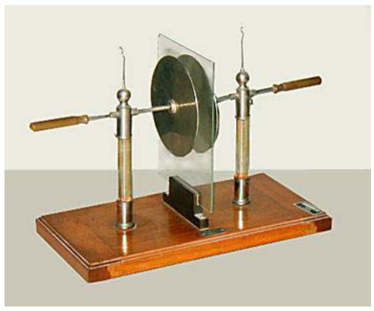
così, applicando la definizione (2.1), segue:

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\dfrac{Q}{\varepsilon_0 S} d},$$

ovvero:

$$C = \varepsilon_0 \frac{S}{d}. \tag{2.2}$$

Esempio: (*Capacità di un condensatore cilindrico*). Consideriamo due conduttori cilindrici coassiali di raggi R_1 e R_2, con $R_1 < R_2$ e sia l la lunghezza della superficie su cui è depositata la carica. Se sui conduttori sono presenti delle cariche, come mostrato in figura, dalla relazione (1.8) il campo elettrico nella regione compresa tra le armature è:



Apparato per lo studio delle caratteristiche del condensatore a facce piane e parallele.

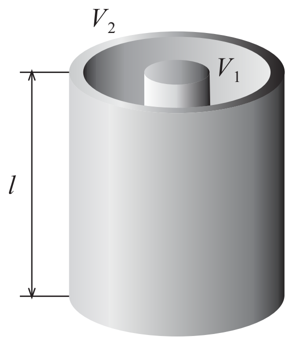
---

[1] Si noti che introducendo questa unità di misura si può esprimere l'unità della costante dielettrica del vuoto ε_0 come:

$$[\varepsilon_0] = \frac{C^2}{N\,m^2} = \frac{C}{N\,m} C \frac{1}{m} = \frac{C}{V}\frac{1}{m} = \frac{F}{m},$$

e, in particolare:

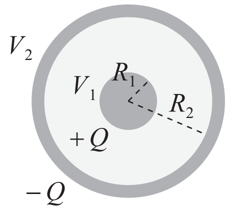
$$\varepsilon_0 \approx 8.85 \frac{pF}{m}.$$



$$\vec{E} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda}{r}\hat{r},$$

dove λ è la densità con cui è distribuita la carica per unità di lunghezza e r, con $R_1 < r < R_2$, la distanza dal comune asse dei cilindri. La differenza di potenziale tra due punti sulle armature è:

$$V_1 - V_2 = -\int_{R_2}^{R_1} \vec{E}\cdot d\vec{r} = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\int_{R_2}^{R_1}\frac{dr}{r} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right).$$



Si noti che $V_1 - V_2 > 0$ essendo l'armatura interna a potenziale maggiore di quella esterna. La carica distribuita sulle superfici dei conduttori è in valore assoluto λl, così dalla (2.1) si ha:

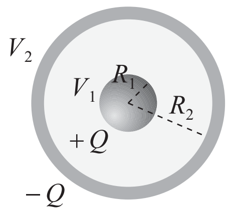
$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{\lambda l}{\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)}.$$

Se $R_1, R_2 \gg d$ e la differenza $R_2 - R_1 \equiv d$ si mantiene costante, si ottiene:

$$C = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\left(\dfrac{R_2}{R_1}\right)} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\left(\dfrac{R_1 + d}{R_1}\right)} = \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\ln\left(1 + \dfrac{d}{R_1}\right)} \approx \frac{2\pi\varepsilon_0 l}{\dfrac{d}{R_1}} = \varepsilon_0\frac{2\pi l R_1}{d} = \varepsilon_0\frac{S}{d},$$

dove $S = 2\pi l R_1$ è la superficie dell'armatura interna; così, in questo limite, l'espressione della capacità è la stessa di quella del condensatore piano (2.2).

Esempio: (*Capacità di un condensatore sferico*). Consideriamo due sfere conduttrici con carica, in valore assoluto pari a Q e di raggi R_1 e R_2, con $R_1 < R_2$. Il campo elettrico interno al volume compreso tra le armature dalla (1.9) è:



$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\hat{r},$$

così la differenza di potenziale tra il conduttore interno e quello esterno vale:

$$V_1 - V_2 = -\int_{R_2}^{R_1}\vec{E}\cdot d\vec{r} = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_2}^{R_1}\frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2},$$

Bottiglia di Leyda di forma cilindrica.

pertanto dalla relazione (2.1) la capacità vale:

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{Q}{\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}} = 4\pi\varepsilon_0\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}.$$

Anche in questo caso, se R_1 e R_2 sono molto maggiori della differenza $d = R_2 - R_1$, si ha:

$$C = 4\pi\varepsilon_0\frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} = 4\pi\varepsilon_0\frac{R_1 R_2}{d} \approx \varepsilon_0\frac{4\pi R_1^2}{d} = \varepsilon_0\frac{S}{d},$$

dove $S = 4\pi R_1^2$ è la superficie del conduttore interno; in questa maniera si ottiene quindi l'espressione della capacità del condensatore piano (2.2).

Si può definire la capacità di un conduttore isolato immaginandolo circondato da una superficie conduttrice posta a distanza infinita, il cui potenziale sia nullo. Se Q è la carica sul conduttore e V il suo potenziale, allora dalla (2.1) segue $C = Q/V$.

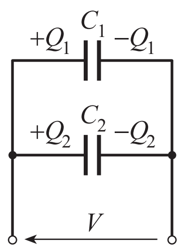
Esempio: Nel caso di una sfera di raggio R_1, mandando R_2 all'infinito nell'espressione della capacità del condensatore sferico, si trova:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 R_1.$$

Per valutare gli ordini di grandezza della capacità, se pensiamo la Terra come un conduttore, poiché il suo raggio è circa $6.4\times10^6\ m$, la corrispondente capacità vale $667\ \mu F$ circa.

2.3 Collegamenti tra condensatori

Consideriamo due condensatori, rispettivamente di capacità C_1 e C_2 collegati come mostrato in figura. Quando le armature sono sottoposte ad una comune differenza di potenziale V la connessione è detta in *parallelo*. Dalla relazione (2.1), le cariche presenti su ciascun condensatore sono:



$$Q_1 = C_1 V,$$
$$Q_2 = C_2 V,$$

allora la carica totale Q immagazzinata su entrambe le coppie di armature dei due condensatori collegati in parallelo è, in valore assoluto pari a:

$$Q = Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2)V = CV,$$

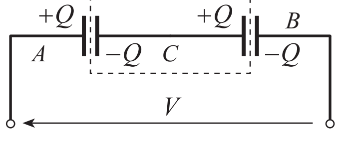
ove si è posto:

$$C \equiv C_1 + C_2.$$

Cioè i due condensatori connessi in parallelo sono equivalenti ad un unico condensatore di capacità pari alla somma delle capacità di ciascun condensatore. Per un sistema di N condensatori in parallelo, rispettivamente di capacità $C_1, C_2, \ldots, C_N$, la capacità equivalente è quindi:

$$C = \sum_{i=1}^{N} C_i.$$

Consideriamo due condensatori originariamente scarichi, rispettivamente di capacità C_1 e C_2 collegati come mostrato in figura. In tale connessione, detta in *serie*, il valore assoluto della carica su ciascuna armatura deve essere la stessa. Ciò è conseguenza del fatto che la carica totale racchiusa nel volume tratteggiato di figura deve essere nulla; infatti la carica inizialmente presente su queste armature è nulla e, siccome l'applicazione di una differenza di potenziale determina la sola separazione delle cariche, la carica totale su queste armature resta nulla. Se si esclude che attraverso i condensatori abbiano luogo delle scariche, non



c'è alcuna possibilità che della carica penetri o fuoriesca dalla regione racchiusa dal volume tratteggiato. Dalla relazione (2.1) si avrà quindi:

$$V_A - V_C = \frac{Q}{C_1},$$
$$V_C - V_B = \frac{Q}{C_2},$$

così la differenza di potenziale per la combinazione in serie è:

$$V = V_A - V_B = \left(V_A - V_C\right) + \left(V_C - V_B\right) = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) = \frac{Q}{C},$$

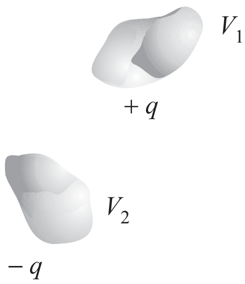
ove di è posto:

$$C \equiv \frac{1}{\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}} = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}.$$

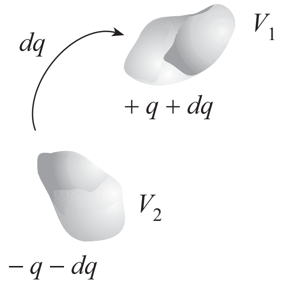
Cioè la capacità totale del sistema è l'inverso della somma dei reciproci delle singole capacità. Per un sistema di N condensatori in serie si ha:

$$C = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} \dfrac{1}{C_i}}.$$

2.4 Energia immagazzinata in un condensatore, energia del campo elettrico



Consideriamo un condensatore costituito da due conduttori di forma generica, uno con carica $+q$ e potenziale V_1 e l'altro con carica $-q$ e potenziale V_2, con $V_1 > V_2$. Supponiamo di accrescere, attraverso un dispositivo esterno, la carica in valore assoluto su entrambi i conduttori di una stessa quantità dq, ossia, in particolare, di portare la carica del primo conduttore da $+q$ a $+q+dq$ e la carica del secondo conduttore da $-q$ a $-q-dq$. Ovvero è come se la carica dq fosse stata spostata dall'armatura a potenziale minore all'armatura a potenziale maggiore. Tale processo non avrebbe modo di svilupparsi in maniera spontanea ma richiede una certa energia affinché possa essere svolto; infatti sarebbe spontaneo il processo inverso che porterebbe la carica dal conduttore a potenziale maggiore a quello a potenziale minore. Il lavoro che è necessario spendere contro la forza del campo elettrico è dato dall'espressione (1.11):



$$dL = \left(V_1 - V_2\right) dq$$

dove, attraverso la relazione (2.1), la differenza di potenziale $V_1 - V_2$ può essere espressa tramite la capacità C del sistema come:

$$V_1 - V_2 = \frac{q}{C} .$$

Il lavoro svolto incrementerà in eguale misura l'energia potenziale U_e del sistema, ovvero $dU_e = dL$, così:

$$dU_e = \frac{q}{C} dq .$$

L'integrazione del secondo membro di questa espressione tra una carica iniziale nulla ed una finita Q corrisponde alla circostanza in cui da un conduttore originariamente neutro viene prelevata la carica Q e trasportata su di un altro, anch'esso originariamente neutro, per ottenere l'induzione completa tra i due conduttori. Assumendo che l'energia potenziale sia nulla quando entrambi i conduttori sono scarichi, risulta:

$$U_e = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

ed utilizzando la relazione (2.1) in cui V indica la differenza di potenziale tra i due conduttori, questa energia può anche essere espressa come

$$U_e = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} C V^2 = \frac{1}{2} Q V , \tag{2.3}$$

relazione scoperta da Hermann von Helmholtz nel 1847 nell'ambito di uno studio generale sugli scambi energetici.

Consideriamo un condensatore piano tra le cui armature, di superficie S e separazione d, è applicata una differenza di potenziale V. La densità con cui è accumulata l'energia nel campo elettrico tra le armature è:

$$u_e = \frac{U_e}{\mathcal{V}} ,$$

dove $\mathcal{V} \equiv S\, d$ è il volume compreso tra le armature, quindi, dalla relazione (2.2) si ha:

$$u_e = U_e \frac{1}{Sd} = \frac{1}{2} C V^2 \frac{1}{Sd} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{S}{d} V^2 \frac{1}{Sd} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{V^2}{d^2} .$$

In questo caso, dalla (1.12) la differenza di potenziale V tra le armature vale,:

$$V = E\, d$$

così, sostituendo nella relazione precedente si trova:

$$u_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{E^2 d^2}{d^2},$$

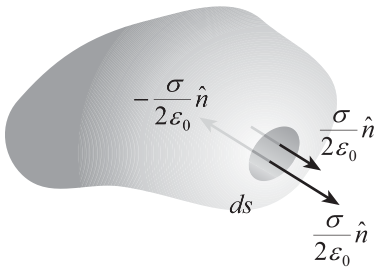
da cui segue:

$$u_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2.$$

Sebbene provata in un caso particolare, si verifica che tale relazione è di validità generale ed indica che in presenza di un campo elettrico esiste, allo stesso tempo, una distribuzione di energia con densità u_e. Pertanto, l'energia immagazzinata in un volume $\mathcal{V}$ in cui è presente un campo elettrico $\vec{E}$ è pari all'integrale su tale volume dell'espressione precedente:

$$U_e = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{\mathcal{V}} E^2 \, dv.$$

2.5 Forze elettrostatiche sui conduttori



Un elemento di carica $\sigma\, ds$ situato sulla superficie di un conduttore è soggetto al campo elettrico dovuto a tutte le altre cariche del conduttore stesso e, di conseguenza, è soggetto ad una forza $\vec{F}$. In condizioni di equilibrio elettrostatico tale forza si esplica perpendicolarmente alla superficie $d\vec{s}$ poiché, se vi fosse una componente tangenziale determinerebbe il moto delle cariche del conduttore. Per valutare l'intensità della forza elettrostatica $\vec{F}$ consideriamo un conduttore all'equilibrio sul quale è distribuita una carica con densità superficiale σ ed il cui campo elettrico in prossimità della superficie valga $\vec{E}$. Dal teorema di Coulomb (1.10), tale campo vale $(\sigma/\varepsilon_0)\hat{n}$. Tuttavia la forza sull'elemento di carica $\sigma\, ds$ non è $\vec{E}\sigma\, ds$ in quanto il campo che agisce sull'elemento $\sigma\, ds$ è soltanto quello prodotto dalle altre cariche del sistema considerato. Con riferimento alla figura, attraverso l'applicazione della legge di Gauss, possiamo dedurre che il campo elettrico prodotto dall'elemento di carica $\sigma\, ds$ vale $(\sigma/2\varepsilon_0)\hat{n}$ in prossimità della superficie esterna del conduttore e $-(\sigma/2\varepsilon_0)\hat{n}$ in corrispondenza della superficie interna. Quindi le altre cariche del conduttore determinano un campo pari a $(\sigma/2\varepsilon_0)\hat{n}$ in modo che il campo complessivo in prossimità dell'elemento di carica considerato, dalla (1.10) valga $(\sigma/\varepsilon_0)\hat{n}$ all'esterno e sia nullo all'interno.

Pertanto l'intensità della forza dF, agente sull'elemento di carica $\sigma\, ds$, è data da

$$dF = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\sigma\, ds = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} ds$$

e dalla (1.10), la densità di forza superficiale sul conduttore, o *pressione elettrostatica*, vale:

$$p = \frac{dF}{ds} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\right)^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 = u_e; \tag{2.4}$$

cioè la pressione elettrostatica è pari alla densità di energia del campo elettrico. La forza elettrostatica complessiva agente su un conduttore in equilibrio di superficie S, sul quale è distribuita una carica, è data da:

$$\vec{F} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_S E^2 \, d\vec{s} \; .$$

Poiché il vettore $d\vec{s}$ punta verso l'esterno del conduttore, la forza $\vec{F}$ è sempre diretta verso l'esterno del conduttore, cioè il campo elettrico esercita una pressione negativa sul conduttore.

La coincidenza espressa dalla relazione (2.4) non è accidentale. Supponiamo che un conduttore in equilibrio si espanda di un fattore dx per effetto della pressione elettrostatica; l'espansione determina un aumento del volume del conduttore di un fattore dV pari a $S\,dx$, dove S rappresenta la superficie del conduttore. Siccome il campo elettrico all'interno di un conduttore all'equilibrio è nullo, in corrispondenza dell'espansione si ha una diminuzione dell'energia elettrostatica del sistema; in particolare tale diminuzione vale:

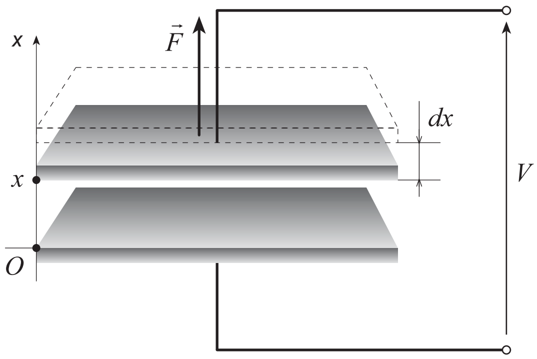
$$dU_e = u_e \, dV \; .$$

Questa variazione dell'energia è dovuta al lavoro dL esercitato dal campo elettrico sul conduttore per determinarne l'espansione:

$$dL = p\,dV$$

e, dal principio di conservazione dell'energia, siccome $dU_e = dL$, segue la relazione (2.4). Questa tecnica che consente di determinare una forza a partire dall'espressione dell'energia del sistema in termini di una certa variabile prende il nome di *principio dei lavori virtuali*.

Esempio: (*Forza esercitata tra le armature di un condensatore*) Stabiliamo la forza che si esercita tra le armature di un condensatore carico attraverso l'applicazione dei principio dei lavori virtuali. Consideriamo un condensatore piano con le armature di superficie S poste a distanza x, alle quali è collegato un dispositivo tale da mantenere costante la differenza di potenziale e pari a V. L'applicazione del principio dei lavori virtuali consiste nel valutare la variazione di energia del sistema, corrispondente ad un cambiamento infinitesimo (virtuale) della geometria del condensatore. Con riferimento alla figura supponiamo che una delle due armature del condensatore sia mantenuta fissa e che sull'altra agisca una forza $\vec{F}$ uguale in modulo e direzione ma opposta in verso alla forza di attrazione tra le armature e tale da allontanare le armature di una quantità dx. Sia dU_e la variazione di energia elettrostatica del sistema, dL il lavoro eseguito dalla forza $\vec{F}$ e Vdq il lavoro fatto dal dispositivo esterno per mantenere costante la differenza di potenziale tra le armature. Dalla relazioni (2.2), (2.3) e (1.12) la variazione di energia elettrostatica del condensatore è:



$$dU_e = d\left(\frac{1}{2}CV^2\right) = \frac{1}{2}V^2\frac{dC}{dx}dx = \frac{1}{2}V^2\frac{d}{dx}\left(\varepsilon_0\frac{S}{x}\right)dx = -\frac{1}{2}V^2\left(\varepsilon_0\frac{1}{x^2}\right)Sdx = -\frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{V}{x}\right)^2 Sdx = -\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 Sdx \; .$$

Siccome lo spostamento dx si esplica nella direzione della forza, il corrispondente lavoro vale:

$$dL = \vec{F}\cdot\left(\hat{x}\,dx\right) = F\,dx \; . \qquad (2.5)$$

Infine, dalle relazioni (2.1), (2.2) (2.3) e (1.12) il lavoro del dispositivo esterno è:

$$Vdq = Vd(VC) = V^2 \frac{dC}{dx} dx = V^2 \frac{d}{dx}\left(\varepsilon_0 \frac{S}{x} \right) dx = -V^2 \left(\varepsilon_0 \frac{1}{x^2} \right) dx = -\varepsilon_0 \left(\frac{V}{x} \right)^2 Sdx = -\varepsilon_0 E^2 Sdx \, .$$

Dal principio di conservazione dell'energia risulta allora:

$$dU_e = dL + qdV \, ,$$

cioè:

$$-\frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 Sdx = F\,dx - \varepsilon_0 E^2 Sdx \, ,$$

da cui segue:

$$F = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 S \, ,$$

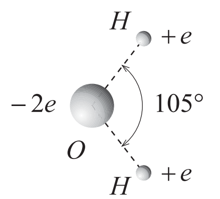
che coincide con l'espressione (2.4). Lo stesso risultato deve, ovviamente, ottenersi anche qualora si consideri il condensatore carico isolato; in tale circostanza dalle relazioni (2.1), (2.2), (2.3) e (1.12) la variazione di energia elettrostatica del condensatore vale:

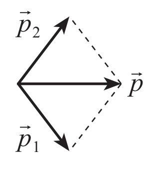
$$dU_e = d\left(\frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \right) = \frac{1}{2}Q^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{C} \right) dx = \frac{1}{2}Q^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{\varepsilon_0 S} \right) dx = \frac{1}{2}Q^2 \left(\frac{1}{\varepsilon_0 S} \right) dx = \frac{1}{2}\frac{C^2V^2}{\varepsilon_0 S} dx = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{V}{x} \right)^2 Sdx =$$
$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 Sdx \, .$$

che uguagliata al lavoro (2.5) porta al risultato già conseguito.

2.6 Dielettrici polari e apolari

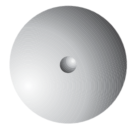
Un *dielettrico* è un materiale isolante che, introdotto tra le armature di un condensatore ne determina un aumento della capacità. Se il dielettrico satura lo spazio compreso tra le armature, la capacità aumenta di un fattore adimensionale ε_r che prende il nome di *costante dielettrica relativa* del materiale. I fenomeni che hanno luogo in un materiale dielettrico coinvolgono i momenti di dipolo elettrico elementari presenti normalmente nel materiale o indotti dall'applicazione di un campo elettrico esterno.

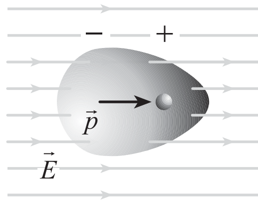




Esempio: Nell'acqua (si veda la figura) il momento di dipolo della molecola è presente anche senza che vi sia applicato alcun campo elettrico esterno; siccome la molecola può essere assimilata ad un sistema rigido, i due momenti $\vec{p}_1$ e $\vec{p}_2$ associati a ciascun legame che gli atomi di idrogeno formano con quello di ossigeno, si sommano vettorialmente producendo un momento di dipolo intrinseco $\vec{p}$ di intensità pari a $6.2\times10^{-3}\ Cm$ circa.

Le molecole caratterizzate da un *momento di dipolo intrinseco* si dicono *polari*; l'applicazione di un campo elettrico $\vec{E}$ sui materiali costituiti da tali molecole determina l'azione sui momenti di dipolo elementari $\vec{p}$ di un momento torcente pari a $\vec{p}\times\vec{E}$ che produce l'orientazione dei dipoli nella direzione parallela al campo. Esiste inoltre una classe di materiali le cui molecole sono prive di momento intrinseco e sono dette, pertanto, *apolari*. In questi materiali l'applicazione di un campo elettrico esterno può determinare la generazione di un momento di dipolo. Consideriamo, ad esempio, una molecola monoatomica; questa può essere schematizzata come un nucleo centrale carico positivamente e circondato da una nube sferica carica negativamente. In condizioni normali la molecola è neutra ed inoltre i baricentri delle cariche positive[2] e negative coincidono. L'applicazione di un campo elettrico esterno determina una deformazione della molecola provocando la separazione dei baricentri delle due cariche nella direzione del campo applicato. Ciò induce la formazione di un momento di dipolo (*momento di dipolo indotto*).





2.7 Polarizzazione

Consideriamo un condensatore piano con le armature di superficie S separate da una distanza d; la capacità C_0 di tale condensatore, quando tra le armature c'è il vuoto, è data dalla relazione (2.2):

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d}.$$

Supponiamo di riempire l'intercapedine tra le armature con un materiale dielettrico; in tale circostanza si verifica sperimentalmente che la capacità diventa:

$$C = \varepsilon_r C_0,$$

dove $\varepsilon_r > 1$ è una costante caratteristica del materiale dielettrico interposto e pertanto prende il nome di *costante dielettrica relativa*. Ponendo:

$$\varepsilon \equiv \varepsilon_0 \varepsilon_r,$$

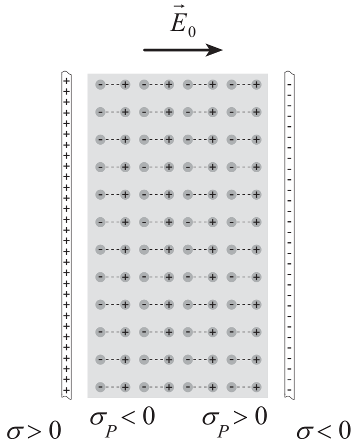
l'espressione della capacità del condensatore in questa nuova situazione vale:

$$C = \varepsilon_r \frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{\varepsilon S}{d}, \tag{2.6}$$

dove ε prende il nome di *costante dielettrica (assoluta)* del materiale. Fissata la carica presente sulle armature del condensatore, dalla relazione (2.1) si ha che l'aumento della capacità relativo all'inserimento del dielettrico tra le armature corrisponde alla diminuzione della differenza di potenziale V presente tra le armature. Siccome V nel condensatore piano è pari al prodotto del campo elettrico tra le armature per la distanza d tra queste, ne segue che l'introduzione del dielettrico comporta una diminuzione dell'intensità del campo elettrico nella regione compresa tra le armature del condensatore.

[2] Il baricentro delle cariche è definito in analogia col caso meccanico. Dato un sistema di cariche $q_1, q_2, \ldots, q_N$, rispettivamente di vettori posizione $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \ldots, \vec{r}_N$ rispetto ad un opportuna origine O, il baricentro del sistema è definito come:

$$\vec{r}_C \equiv \frac{q_1\vec{r}_1 + q_2\vec{r}_2 + \ldots + q_N\vec{r}_N}{q_1 + q_2 + \ldots + q_N}.$$

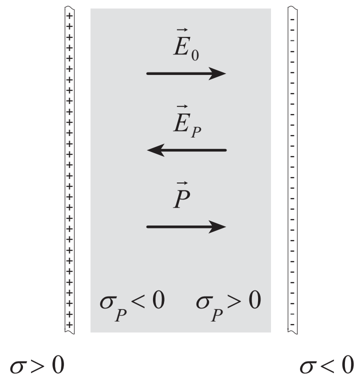


Gli effetti microscopici che hanno luogo nella regione di dielettrico compresa tra le armature del condensatore furono descritti fenomenologicamente da Faraday nel 1837 e successivamente, in termini analitici dal matematico italiano Ottaviano Fabrizio Mossotti nel 1846. All'applicazione di una differenza di potenziale tra le armature del condensatore, su queste si origineranno delle distribuzioni di carica superficiale di densità pari (in valore assoluto) a σ. Il campo elettrico $\vec{E}_0$ che si genera di conseguenza determina l'orientazione dei dipoli elementari nella propria direzione. Mentre le cariche interne al materiale vengono a due a due bilanciate, le cariche che si affacciano alle superfici delle armature restano scoperte. Si creano quindi due ulteriori distribuzioni di carica di densità pari (in valore assoluto) a σ_P; in particolare $\sigma_P < 0$ in corrispondenza dell'armatura carica positivamente (dove $\sigma > 0$) e $\sigma_P > 0$ in prossimità dell'altra armatura (dove $\sigma < 0$); si osservi che la carica associata a σ_P non è libera, nel senso che non può muoversi nel materiale ma è solo un effetto dell'orientazione dei dipoli elementari. La presenza della carica di polarizzazione determina, all'interno della regione compresa tra le armature, la creazione di un nuovo campo elettrico $\vec{E}_P$ diretto come $\vec{E}_0$ ma di verso opposto. Il campo totale presente all'interno del materiale è quindi:

$$\vec{E} = \vec{E}_0 + \vec{E}_P$$

e, in particolare, siccome $\vec{E}_0$ e $\vec{E}_P$ sono paralleli:

$$E = E_0 - E_P ,$$



così risulta che il campo elettrico agente sul materiale dielettrico ha intensità inferiore a quella del campo prodotto dalle sole cariche libere. Utilizzando la relazione (1.10) l'intensità del campo $\vec{E}_0$ può essere espressa attraverso la densità della carica libera σ come σ/ε_0 e l'intensità del campo prodotto dalle cariche di polarizzazione può essere espressa tramite la densità della carica di polarizzazione σ_P come σ_P/ε_0. Pertanto la relazione precedente si esprime come:

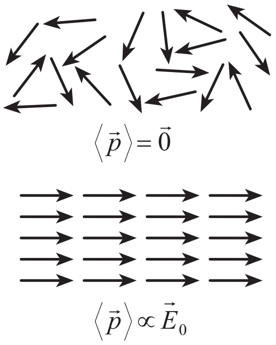
$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_P}{\varepsilon_0}$$

e, vettorialmente:

$$\vec{E} = \left(\frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_P}{\varepsilon_0} \right) \hat{n} = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(\sigma - \sigma_P \right) \hat{n} , \tag{2.7}$$

dove $\hat{n}$ rappresenta il versore normale alle armature del condensatore.

2.8 Il vettore spostamento elettrico



Un materiale dielettrico è caratterizzato da molecole dotate di un momento di dipolo intrinseco o di un momento di dipolo prodotto dall'applicazione di un campo elettrico esterno al materiale. Pertanto in assenza di un campo elettrico esterno applicato, i dipoli elementari o sono orientati a caso oppure sono del tutto assenti. Si osservi che l'azione di allineamento del campo elettrico esterno risulta comunque incompleta per effetto dell'agitazione termica. Il grado di allineamento aumenta al diminuire della temperatura e all'aumentare dell'intensità del campo elettrico. Il risultato dell'applicazione di un campo esterno è l'acquisizione da parte di ogni molecola di un momento di dipolo parallelo al campo esterno $\vec{E}_0$. Sia n il numero di molecole per unità di volume e $\langle \vec{p} \rangle$ il momento di dipolo medio delle molecole, allora una misura del grado di allineamento delle molecole di un dielettrico è data dal vettore $\vec{P}$ definito come:

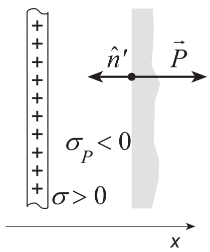
$$\vec{P} \equiv n \langle \vec{p} \rangle .$$

Tale grandezza è denominata *vettore polarizzazione* e si misura in C/m^2. Si noti che in generale, per effetto di eventuali disomogenie nel materiale o per la presenza di cariche libere interne al dielettrico, il vettore $\vec{P}$ può anche variare puntualmente. E' possibile stabilire l'intensità del vettore polarizzazione tra le armature del condensatore testè descritto osservando che l'insieme dei dipoli allineati dal campo elettrico è assimilabile ad un unico dipolo orientato nel verso del campo esterno $\vec{E}_0$, quindi il modulo del vettore polarizzazione è la risultante di tutti i dipoli, ovvero il prodotto della carica di polarizzazione per la distanza $q_P d$ diviso per il volume compreso tra le armature Sd:

$$P = \frac{q_P d}{Sd} = \frac{q_P}{S} = \sigma_P ; \tag{2.8}$$

vettorialmente, se $\hat{n}'$ è la normale (uscente) al dielettrico:

$$\vec{P} = \sigma_P \, \hat{n}' . \tag{2.9}$$



Si noti che, con riferimento alla figura, $\hat{n}'$ coincide con $-\hat{x}$, allora, siccome $\sigma_P < 0$, segue che il vettore $\vec{P}$ è diretto nel verso positivo delle x.

Sia $\hat{n}$ la normale alla superficie di un'armatura del condensatore, se σ rappresenta la densità di carica presente su questa superficie, si definisce *vettore spostamento elettrico* il vettore $\vec{D}$ tale che:

$$\vec{D} \cdot \hat{n} \equiv \sigma ; \tag{2.10}$$

dimensionalmente $\vec{D}$ si esprime in C/m^2. E' possibile verificare che nel condensatore descritto questo vettore ha la stessa direzione del campo elettrico $\vec{E}$ e del vettore polarizzazione $\vec{P}$, quindi $\vec{D}$ e $\hat{n}$ sono paralleli:

$$D = \sigma$$

e inoltre, siccome il modulo di $\vec{P}$ vale σ_P, sostituendo nella (2.7) si trova:

$$D = \varepsilon_0 E + P\,.$$

Sebbene ricavata in una accezione unidimensionale, si prova che tale relazione ha validità generale e risulta pertanto:

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}\,. \tag{2.11}$$

Nella maggior parte dei dielettrici $\vec{P}$ è proporzionale al campo elettrico $\vec{E}$:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E}\,; \tag{2.12}$$

i dielettrici che soddisfano tale relazione in cui χ_e è uno scalare, sono detti *lineari*, e sono dei materiali amorfi caratterizzati da isotropia spaziale. La quantità adimensionale χ_e prende il nome di *suscettività dielettrica* del mezzo materiale e fornisce un'indicazione della capacità che ha il mezzo di polarizzarsi sotto l'azione di un campo elettrico[3]. Consideriamo, per semplicità, un dielettrico lineare; esprimendo la densità di carica di polarizzazione σ_P tramite la (2.8) e la (2.12) come $\varepsilon_0 \chi_e E$ e sostituendo tale quantità nella (2.7), si ottiene:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{\sigma_P}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} - \frac{1}{\varepsilon_0}\varepsilon_0 \chi_e E\,,$$

da cui segue:

$$E = \frac{\sigma}{\left(1+\chi_e\right)\varepsilon_0}\,,$$

[3] La relazione (2.12) viene anche scritta nella forma $\vec{P} = \alpha \vec{E}$, sottintendendo con tale espressione la relazione:

$$\begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ P_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_x \\ E_y \\ E_z \end{pmatrix}.$$

In questo modo è possibile descrivere i materiali in cui il vettore polarizzazione non si allinea nella direzione del campo elettrico. La matrice:

$$\alpha \equiv \begin{pmatrix} \alpha_{xx} & \alpha_{xy} & \alpha_{xz} \\ \alpha_{yx} & \alpha_{yy} & \alpha_{yz} \\ \alpha_{zx} & \alpha_{zy} & \alpha_{zz} \end{pmatrix},$$

prende il nome di *tensore di polarizzabilità*. I dielettrici lineari sono quelli in corrispondenza dei quali il tensore di polarizzabilità è una matrice diagonale con gli elementi tutti uguali ($\alpha_{ii} = \alpha_{jj}, \alpha_{ij} = 0$, per $i, j = x, y, z$ e $i \neq j$).

che esprime l'intensità del campo elettrico nel condensatore piano col dielettrico. D'altra parte in un condensatore piano la differenza di potenziale V tra le armature vale Ed, pertanto:

$$V = Ed = \frac{\sigma d}{(1+\chi_e)\varepsilon_0} = \frac{Q}{S}\frac{d}{(1+\chi_e)\varepsilon_0},$$

dove Q rappresenta la carica distribuita sulle armature. Dalla (2.1) si ha, infine:

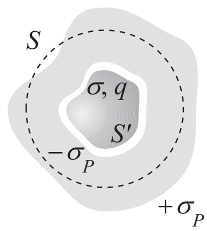
$$C = \frac{Q}{V} = (1+\chi_e)\frac{\varepsilon_0 S}{d}.$$

Confrontando questa relazione con la (2.6) segue quindi:

$$\varepsilon_r = 1+\chi_e; \tag{2.13}$$

si prova che questa identità, sebbene ricavata per il condensatore piano, ha validità generale; pertanto, sostituendo la (2.12) nella (2.11) e facendo uso di tale identità, si ha:

$$\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \varepsilon_0\vec{E} + \varepsilon_0\chi_e\vec{E} = \varepsilon_0(1+\chi_e)\vec{E} = \varepsilon_0\varepsilon_r\vec{E}. \tag{2.14}$$



Consideriamo un conduttore sulla cui superficie S' è presente una carica libera q distribuita con densità σ; supponiamo che il conduttore sia immerso in un materiale dielettrico omogeneo ed isotropo, privo di cariche libere al suo interno, di costante dielettrica relativa ε_r (si veda la figura). La carica q può esprimersi attraverso la densità σ come:

$$q = \int_{S'} \sigma\, ds;$$

d'altra parte, facendo uso dell'espressione (2.10), siccome $d\vec{s}$ è pari a $\hat{n}\,ds$, si trova:

$$q = \int_{S'} \vec{D}\cdot\hat{n}\, ds = \int_{S'} \vec{D}\cdot d\vec{s}. \tag{2.15}$$

Questa relazione mostra come si possa esprimere la carica presente sulla superficie del conduttore come il flusso del vettore $\vec{D}$ attraverso la stessa superficie S'. D'altra parte siccome il flusso di un vettore attraverso una superficie è una misura del numero di linee di forza che attraversano tale superficie, è evidente che se si considera una qualsiasi superficie S chiusa che contiene interamente il conduttore sul quale è presente la carica q, tale superficie risulterà attraversata dalle stesse linee di forza di $\vec{D}$ che originano da S', ossia:

$$\int_{S'} \vec{D}\cdot d\vec{s} = \int_{S} \vec{D}\cdot d\vec{s}$$

così, sostituendo nella (2.15) si trova:

$$q = \int_{S} \vec{D}\cdot d\vec{s}. \tag{2.16}$$

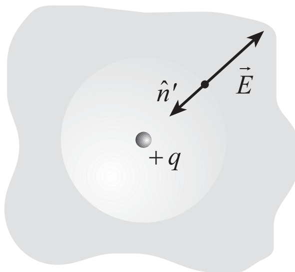
Questa espressione, che rappresenta la legge di Gauss per i materiali dielettrici, può essere interpretata affermando che il flusso del vettore spostamento attraverso una superficie chiusa, contenente in generale sia cariche libere che cariche di polarizzazione, dipende unicamente dalle cariche libere presenti all'interno. Il valore della precedente relazione è nel fatto che, in generale, la superficie chiusa *S* può intersecare il dielettrico, invece che contenerlo interamente, per cui la carica di polarizzazione contenuta all'interno di *S* non è, in generale, nulla. Sostituendo l'equazione (2.14) nella (2.16) si ha:

$$\int_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = q \, ,$$

dove, facendo l'ipotesi che il mezzo sia omogeneo ed isotropo si è portato fuori dal segno di integrale la costante ε_r. Quindi nei materiali dielettrici la legge di Gauss per il campo elettrico si esprime come:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} \, . \tag{2.17}$$

Alla luce di quanto appena mostrato, concludiamo che l'impiego del vettore spostamento per la descrizione dei dielettrici permette di non considerare la carica di polarizzazione.



Esempio: Consideriamo un blocco di materiale dielettrico omogeneo e isotropo di costante dielettrica ε_r, all'interno del quale è praticata una cavità sferica. Supponiamo che al centro della cavità sia posta una carica puntiforme q positiva e stabiliamo la carica di polarizzazione q_{pol} che si origina sulla superficie della cavità. Indicando con σ_P la densità di carica di polarizzazione, risulta:

$$q_{pol} = 4\pi R^2 \sigma_P \, ,$$

dove R è il raggio della cavità. La densità σ_P può essere dedotta dal vettore polarizzazione $\vec{P}$ attraverso la relazione (2.9), pertanto dalla (2.12), esprimendo la suscettività dielettrica tramite la (2.13), segue:

$$\vec{P} = \varepsilon_0 \chi_e \vec{E} = \varepsilon_0 \left(\varepsilon_r - 1 \right) \vec{E}$$

e moltiplicando ambo i membri per la normale alla superficie della cavità $\hat{n}'$, si ha:

$$\vec{P} \cdot \hat{n}' = \varepsilon_0 \left(\varepsilon_r - 1 \right) \vec{E} \cdot \hat{n}' \, .$$

Dalla (2.9) segue che il primo membro di questa identità è pari a σ_P, inoltre, siccome la carica è positiva, il campo elettrico $\vec{E}$ nel dielettrico è diretto nel verso opposto a $\hat{n}'$, per cui $\vec{E} \cdot \hat{n}' = -E$; pertanto, sostituendo, si ha:

$$\sigma_P = -\varepsilon_0 \left(\varepsilon_r - 1 \right) E \, .$$

Il campo elettrico nel dielettrico può essere ricavato dall'estensione della legge di Gauss (2.17) e si trova:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r} \frac{1}{R^2} \, ,$$

per cui, sostituendo nell'espressione precedente e ricavando q_{pol}, si ha:

$$q_{pol} = -q\frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r}.$$

Tale espressione prova che la carica di polarizzazione ha segno opposto rispetto a q e, in valore assoluto è sempre minore di q.

In generale, l'espressione della legge di Gauss all'interno di un materiale dielettrico, in cui sono presenti sia cariche libere q che di polarizzazione q_P vale:

$$\int_S \vec{E}\cdot d\vec{s} = \frac{q+q_P}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \left(\rho + \rho_P\right) dv,$$

dove ρ e ρ_P rappresentano rispettivamente la densità volumetrica delle cariche libere e la densità volumetrica delle cariche di polarizzazione. Facendo uso del teorema della divergenza si verifica che a tale relazione integrale corrisponde l'espressione puntuale:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho + \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_P$$

e, alla relazione (2.16) corrisponde l'espressione puntuale:

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho.$$

D'altra parte, applicando l'operatore divergenza ad ambo i membri della (2.11) si ottiene:

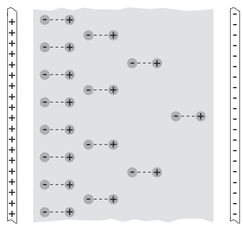
$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \varepsilon_0\vec{\nabla}\cdot\vec{E} + \vec{\nabla}\cdot\vec{P} \tag{2.18}$$

così, sostituendo $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$ e $\vec{\nabla}\cdot\vec{D}$ dalle precedenti relazioni si perviene all'identità:

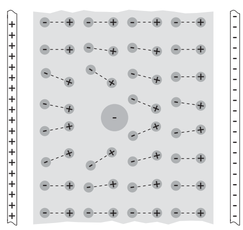
$$\rho = \varepsilon_0\left(\frac{1}{\varepsilon_0}\rho + \frac{1}{\varepsilon_0}\rho_P\right) + \vec{\nabla}\cdot\vec{P},$$

da cui segue:

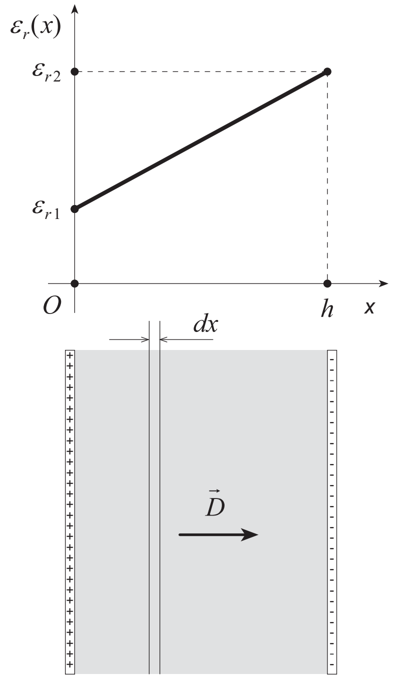
$$\rho_P = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P}. \tag{2.19}$$



$\vec{P}$ decrescente



La presenza di cariche volumetriche di polarizzazione, dipendendo dalla variazione del vettore $\vec{P}$ con la posizione nel dielettrico, è pertanto determinata dalla presenza di disomogenie nel materiale che fanno si che alcune regioni si polarizzino diversamente da altre; oppure un valore di ρ_P non nullo può essere causato dalla presenza di cariche libere interne al materiale che deformano la regolarità dell'allineamento dei dipoli elementari. In assenza di cariche libere nel dielettrico $\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = 0$ e inoltre, dalla (2.14), anche $\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0$ e, di conseguenza, dalla (2.18) $\rho_P = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = 0$. Quindi in un dielettrico lineare la densità volumetrica della carica di polarizzazione è nulla in assenza di cariche libere e, in tal caso, le cariche di polarizzazione sono distribuite esclusivamente sulle superfici.



Esempio: Consideriamo un condensatore piano la cui regione tra le armature è riempita da un dielettrico non omogeneo, la cui costante dielettrica relativa varia in modo lineare da un valore ε_{r1} a ε_{r2} passando dall'armatura positiva a quella negativa. Cioè, se h è la distanza tra le armature, il valore della costante dielettrica relativa al variare della distanza x tra le armature è dato dall'espressione:

$$\varepsilon_r(x) = \varepsilon_{r1} + \frac{\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1}}{h} x .$$

La capacità di tale condensatore si può stabilire schematizzandolo come la serie di infiniti condensatori caratterizzati, ciascuno, da una capacità il cui inverso vale $dx/\left[\varepsilon_r(x)\varepsilon_0 S\right]$, dove S è la superficie delle armature. Pertanto l'inverso della capacità del condensatore C vale:

$$\frac{1}{C} = \int_0^h \frac{dx}{\varepsilon_r(x)\varepsilon_0 S} = \frac{1}{\varepsilon_0 S}\int_0^h \frac{dx}{\varepsilon_{r1} + \dfrac{\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1}}{h} x} = \frac{1}{\varepsilon_0 S}\frac{h}{\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1}} \ln\left(\frac{\varepsilon_{r2}}{\varepsilon_{r1}}\right).$$

Siccome il dielettrico non è omogeneo, in questo caso la densità volumetrica delle cariche di polarizzazione all'interno del dielettrico è diversa da zero. Se q è la carica presente sull'armatura positiva, dalla (2.10) segue che il vettore spostamento vale:

$$\vec{D} = \sigma \hat{x} = \frac{q}{S}\hat{x} ,$$

poiché $\sigma = q/S$ è la densità con cui è distribuita la carica libera sull'armatura positiva. Dalla (2.12), facendo uso della (2.14) per esprimere il campo elettrico $\vec{E}$ nel dielettrico attraverso il vettore spostamento e adoperando inoltre la (2.13), si ha:

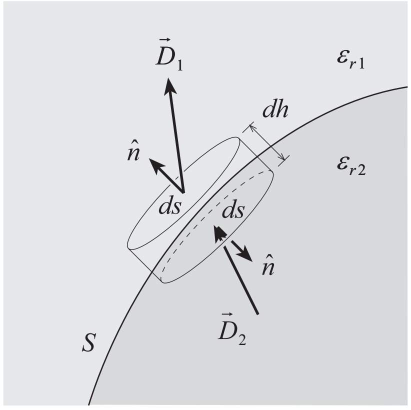
$$\vec{P}(x) = \chi_e(x)\varepsilon_0\vec{E} = \left[\varepsilon_r(x) - 1\right]\varepsilon_0 \frac{\vec{D}}{\varepsilon_0\varepsilon_r(x)} = \frac{\varepsilon_r(x) - 1}{\varepsilon_r(x)}\vec{D} = \frac{q}{S}\left[1 - \frac{1}{\varepsilon_r(x)}\right]\hat{x} = \frac{q}{S}\left(1 - \frac{1}{\varepsilon_{r1} + \dfrac{\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1}}{h} x}\right)\hat{x} ,$$

pertanto, dalla (2.19) segue che la densità volumetrica della carica di polarizzazione ρ_P vale:

$$\rho_P(x) = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} = -\frac{dP(x)}{dx} = -\frac{q(\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1})}{hS}\frac{1}{\left(\varepsilon_{r1} + \dfrac{\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1}}{h} x\right)^2} .$$

2.9 Condizioni di raccordo all'interfaccia tra due dielettrici

Consideriamo la superficie S di separazione tra due dielettrici diversi di costanti dielettriche relative ε_{r1} e ε_{r2}. Supponiamo che tale superficie sia priva di cariche libere. Consideriamo inoltre un cilindro infinitesimo di basi ds parallele a S la cui altezza dh sia un infinitesimo di ordine superiore a ds. Trascurando il flusso attraverso la superficie laterale, il flusso del vettore $\vec{D}$ attraverso l'intera superficie del cilindro vale:



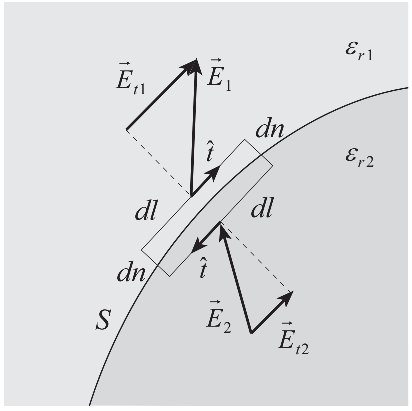
$$d\phi\left(\vec{D}\right) = \vec{D}_1 \cdot \hat{n}\, ds + \vec{D}_2 \cdot \hat{n}\, ds = \left(D_{n1} - D_{n2}\right) ds\,,$$

dove $\vec{D}_1$ e $\vec{D}_2$ rappresentano, rispettivamente, i vettori spostamento nelle due regioni e D_{n1} e D_{n2} rappresentano le proiezione lungo le normali alle basi del cilindro dei vettori spostamento; questo flusso è nullo in quanto, per ipotesi, la superficie di interfaccia tra i due dielettrici è priva di cariche libere, così:

$$D_{n1} = D_{n2}\,,$$

inoltre dalla (2.14) segue:

$$\varepsilon_{r1} E_{n1} = \varepsilon_{r2} E_{n2}\,. \tag{2.20}$$



Cioè, attraversando l'interfaccia tra due dielettrici diversi la componente del vettore spostamento, normale all'interfaccia, non subisce alcuna discontinuità mentre la componente normale del campo elettrico è discontinua.

Consideriamo un percorso chiuso infinitesimo costituito da due tratti elementari dl paralleli alla superficie S e due tratti dn perpendicolari alla superficie, infinitesimi di ordine superiore a dl. Trascurando il contributo dei due tratti dn, la circuitazione del vettore $\vec{E}$ lungo tale percorso vale:

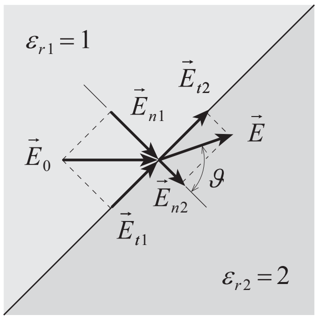
$$\vec{E} \cdot d\vec{l} = \vec{E}_1 \cdot \hat{t}\, dl + \vec{E}_2 \cdot \hat{t}\, dl = \left(E_{t1} - E_{t2}\right) dl\,,$$

dove $\vec{E}_1$ e $\vec{E}_2$ rappresentano i campi elettrici nelle due regioni e E_{t1} e E_{t2} rappresentano le proiezioni lungo la tangente $\hat{t}$ al percorso specificato dei campi elettrici. Siccome il campo elettrostatico è conservativo, la circuitazione del vettore $\vec{E}$ lungo un qualsiasi percorso chiuso è nulla e pertanto:

$$E_{t1} = E_{t2}\,, \tag{2.21}$$

quindi, dalla (2.14):

$$\frac{D_{t1}}{\varepsilon_{r1}} = \frac{D_{t2}}{\varepsilon_{r2}}.$$



Cioè, attraversando la superficie di separazione fra due dielettrici diversi la componente del campo elettrico parallela all'interfaccia non subisce alcuna discontinuità mentre la componente parallela del vettore spostamento è discontinua.

Pertanto, le relazioni di raccordo all'interfaccia tra due dielettrici diversi sono, per il campo elettrico:

$$\begin{cases} \varepsilon_{r1} E_{n1} = \varepsilon_{r2} E_{n2}, \\ E_{t1} = E_{t2} \end{cases},$$

e per il vettore spostamento:

$$\begin{cases} D_{n1} = D_{n2}, \\ \dfrac{D_{t1}}{\varepsilon_{r1}} = \dfrac{D_{t2}}{\varepsilon_{r2}}. \end{cases}$$

Esempio: Una lastra di dielettrico di costante dielettrica relativa pari a 2 è posta, nel vuoto, a 45° rispetto alle linee di forza di un campo elettrico esterno uniforme $\vec{E}_0$. A partire dalle condizioni di raccordo stabiliamo l'andamento delle linee di forza all'interno della lastra. Dalla (2.20) segue:

$$E_{n2} = \frac{\varepsilon_{r1}}{\varepsilon_{r2}} E_{n1}$$

così, sostituendo a ε_{r1}, 1 e a ε_{r2}, 2, rispettivamente le costanti dielettriche relative del vuoto e del mezzo materiale considerato, si ha:

$$E_{n2} = \frac{1}{2} E_{n1}$$

quindi, facendo il rapporto membro a membro con la (2.21)

$$E_{t2} = E_{t1},$$

siccome

$$E_{n1} = E_{t1},$$

si ha:

$$\tan\vartheta = \frac{E_{t2}}{E_{n2}} = 2\frac{E_{t1}}{E_{n1}} = 2,$$

essendo ϑ l'angolo compreso tra la direzione del campo elettrico $\vec{E}$ nel dielettrico e la normale all'interfaccia, così:

$$\vartheta \approx 63°.$$