

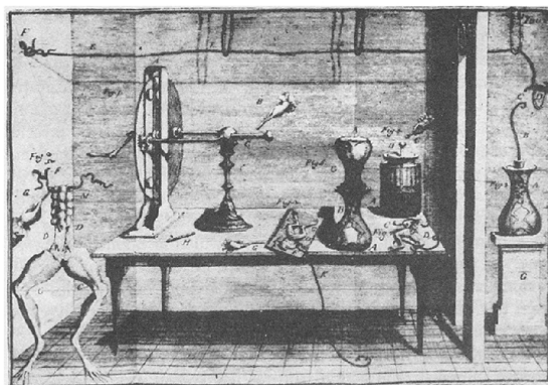
### 3 CORRENTE ELETTRICA E CIRCUITI

Nel 1791 il medico bolognese Luigi Galvani, nell'ambito dello studio delle azioni elettriche sugli organi animali, osservò che toccando con uno scalpello metallico i nervi crurali di una rana precedentemente dissecata mentre una macchina elettrostatica posta a breve distanza veniva messa in funzione, i muscoli risultavano soggetti a contrazioni. In seguito Galvani verificò che era sufficiente porre a contatto attraverso un arco metallico i nervi crurali con i muscoli delle zampe della rana per osservare le



Alessandro Volta

contrazioni, inoltre questo effetto risultava più intenso qualora l'arco che realizzava il contatto era costituito da due metalli differenti. Da tale fenomeno Galvani dedusse che il nervo agiva come una sorta di bottiglia di Leida la cui elettricità accumulata veniva fatta circolare attraverso l'arco bimetallico. A tale interpretazione si oppose Volta, il quale, dopo aver riprodotto gli esperimenti di Galvani, suggerì che le contrazioni delle rane non fossero dovute ad elettricità propria dell'animale bensì alla stimolazione dei nervi operata dalla corrente elettrica prodotta dalla diversità dei metalli costituenti l'arco (*effetto Volta*). In sostanza, secondo Volta la rana agiva come rivelatore di corrente elettrica anziché da generatore. Nel 1796 Volta, utilizzando un rudimentale strumento per la misura delle differenze di potenziale, rilevò le tensioni che si originano ai capi di coppie di conduttori costituiti da metalli diversi posti a contatto tra loro. La spiegazione dell'effetto Volta giunse poco più di cento anni dopo la sua scoperta, attraverso la meccanica quantistica. Interponendo un disco di feltro inumidito con una soluzione di acido solforico tra i due conduttori, uno di rame e l'altro di zinco, nel 1800 Volta realizzò la *pila elettrica*, il primo generatore di corrente elettrica non elettrostatico.



Descrizione dell'esperienza di Galvani

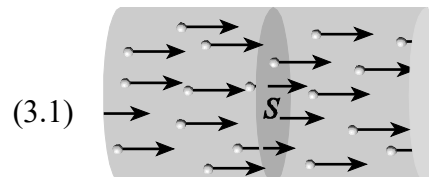


Pila di Volta

#### 3.1 Corrente elettrica e densità di corrente

Consideriamo il moto non accelerato e con velocità piccole rispetto a quella della luce nel vuoto di un insieme di particelle dotate di carica elettrica. In tali condizioni possono ritenersi valide le leggi dell'elettrostatica. Supponiamo, per semplicità, che il moto avvenga attraverso un conduttore filiforme; esaminando una sezione  $S$  di tale conduttore, osserveremo che in un tempo  $dt$  una quantità di carica  $dq$  attraversa la sezione considerata. Si definisce pertanto l'*intensità di corrente*  $I$  come:

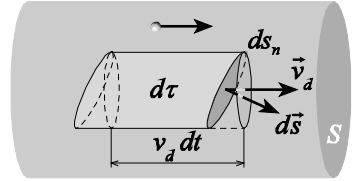
$$I \equiv \frac{dq}{dt},$$



(3.1)

e si misura in *ampere* ( $A$ ), dove  $1 A \equiv 1 C/1 s$ . Se con un opportuno dispositivo si stabilisce ai capi del conduttore una differenza di potenziale costante nel tempo, a regime si osserva che il conduttore è sede di una corrente costante che prende il nome di *corrente stazionaria*.

Una descrizione del moto delle cariche attraverso l'uso della sola intensità di corrente risulta incompleta poiché tale grandezza non fornisce alcuna informazione riguardo la direzione ed il verso del flusso delle cariche. Allo scopo di completare questa descrizione consideriamo un conduttore di sezione  $S$  all'interno del quale sia  $n$  il numero di portatori liberi di carica  $q$  per unità di volume. Sia  $\vec{v}_d$  la velocità media



di tali cariche (*velocità di deriva*). Per stabilire la quantità di carica  $dq$  che durante l'intervallo di tempo  $dt$  attraversa una sezione  $ds$ , consideriamo un volume  $d\tau$  di base  $ds_n$  e altezza  $v_d dt$ , dove  $ds_n$ , pari a  $ds \cos \vartheta$ , è la proiezione del vettore  $d\vec{s}$  associato alla sezione  $ds$ , lungo la direzione di  $\vec{v}_d$  e  $\vartheta$  è l'angolo tra  $d\vec{s}$  e  $\vec{v}_d$ . La quantità di carica che attraversa la sezione  $ds$  nel tempo  $dt$  è pari alla carica contenuta tra un tempo  $t$  e il tempo  $t + dt$  nel volume  $d\tau$ , cioè:

$$dq = nq d\tau = nq v_d dt ds_n = nq v_d ds \cos \vartheta dt = nq \vec{v}_d \cdot d\vec{s} dt. \quad (3.2)$$

Sia:

$$\vec{J} \equiv nq \vec{v}_d, \quad (3.3)$$

allora, dalla (3.2) segue:

$$dI = d \left( \frac{dq}{dt} \right) = \vec{J} \cdot d\vec{s};$$

quindi, integrando sulla sezione  $S$  dell'intero conduttore, si ha:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}. \quad (3.4)$$

Pertanto, il flusso del vettore  $\vec{J}$  attraverso la sezione  $S$  fornisce il valore dell'intensità della corrente attraverso la superficie considerata; il vettore  $\vec{J}$  prende il nome di *densità di corrente*.

Nei metalli le cariche associate alla corrente sono gli elettroni, così la carica che compare nella (3.2) è pari a  $-e$ :

$$\vec{J} = -en \vec{v}_d \quad (3.5)$$

e in questo caso i vettori  $\vec{J}$  e  $\vec{v}_d$  sono antiparalleli. Ne segue che, qualora in un conduttore metallico la corrente scorre in una certa direzione, il moto dei corrispondenti elettroni si esplica nella direzione opposta.

**Esempio:** Consideriamo un conduttore di rame di sezione uniforme  $S$  pari a  $1 \text{ cm}^2$ , percorso da una corrente di  $200 A$ ; stabiliamo la velocità media degli elettroni nell'ipotesi che partecipino alla conduzione due elettroni per atomo di rame. Siccome una quantità di rame pari al suo peso atomico  $A_{Cu}$ ,  $63.5$ , espresso in grammi, contiene un numero di atomi pari al *numero di Avogadro*  $N_A$ ,  $6.022 \times 10^{23}$ , il numero di atomi di rame per unità di volume è dato dalla relazione:

$$n_A \approx \frac{N_A}{A_{Cu} \times 1 \text{ g}} \rho = \frac{6.02 \times 10^{23} \text{ atomi}}{63.5 \text{ g}} 8.94 \times 10^6 \text{ g/m}^3 = 8.47 \times 10^{28} \text{ atomi/m}^3,$$

in cui  $\rho$  indica la densità del rame, così la concentrazione di elettroni di conduzione vale:

$$n = 2n_A = 1.69 \times 10^{29} \text{ elettroni/m}^3.$$

La densità di corrente attraverso il conduttore è:

$$J = \frac{I}{S} = \frac{200 \text{ A}}{10^{-4} \text{ m}^2} = 2 \times 10^6 \text{ A/m}^2,$$

così, dalla relazione (3.5) segue:

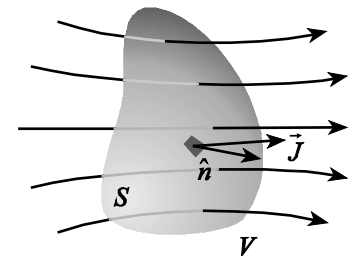
$$v_d = \frac{J}{ne} = \frac{2 \times 10^6 \text{ A/m}^2}{(1.69 \times 10^{29} \text{ elettroni/m}^3) \times (1.60 \times 10^{-19} \text{ C})} = 7.36 \times 10^{-5} \text{ m/s},$$

cioè un elettrone di conduzione impiega poco più di due minuti per percorrere un centimetro di lunghezza nel conduttore. Un valore così basso della velocità media degli elettroni non deve essere ritenuto contraddittorio con la velocità con la quale si propagano le variazioni del campo elettrico in seno al conduttore, che risulta essere dello stesso ordine di grandezza della velocità della luce nel vuoto. Analogamente, in corrispondenza dell'applicazione di una pressione ad una estremità di un tubo pieno d'acqua, un'onda di pressione viaggia molto rapidamente lungo il tubo, sebbene la velocità con la quale si sposta l'acqua dentro il tubo è notevolmente inferiore.

## 3.2 Equazione di continuità

Consideriamo un volume  $V$  racchiuso in una superficie  $S$  sottoposto ad un flusso di cariche con densità  $\vec{J}$ . Dalla relazione (3.4), la carica che passa nell'unità di tempo attraverso  $S$  è:

$$i = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int_S \vec{J} \cdot \hat{n} ds;$$



in particolare, nelle regioni di  $S$  in cui il prodotto  $\vec{J} \cdot \hat{n}$  è positivo, risulta che una carica positiva esce da  $S$  oppure una carica negativa entra in  $S$ ; viceversa,  $\vec{J} \cdot \hat{n}$  negativo indica che in tali regioni una carica positiva sta entrando oppure una carica negativa sta uscendo. Dal principio di conservazione della carica segue che la carica che attraversa nell'unità di tempo  $S$ , cioè la corrente  $i$ , è uguale alla variazione nell'unità di tempo della carica complessiva  $q_{int}$  contenuta in  $S$ :

$$i = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = -\frac{dq_{int}}{dt}.$$

Il segno meno è giustificato dal fatto che se l'integrale è complessivamente positivo, la carica all'interno diminuisce, così  $dq_{int}/dt < 0$  (e viceversa se l'integrale è negativo). D'altra parte, se  $\rho$  è la densità di carica interna a  $V$ , si ha:

$$\int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = -\frac{dq_{int}}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dv = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv;$$

applicando quindi il teorema della divergenza al primo membro, si ha:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \, dv = - \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dv,$$

ovvero:

$$\int_V \left( \vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} \right) dv = 0;$$

dovendo essere valida per qualunque volume  $V$ , da tale relazione segue:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0. \quad (3.6)$$

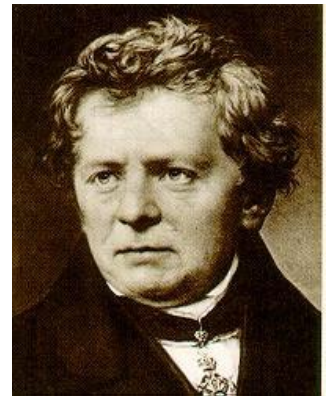
Questa espressione, nota col nome di *equazione di continuità*, esprime in maniera generale il principio di conservazione della carica elettrica. In condizioni stazionarie la densità di carica  $\rho$  è indipendente dal tempo, così  $\partial \rho / \partial t = 0$  e, di conseguenza:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = 0, \quad (3.7)$$

che esprime l'equazione di continuità della carica elettrica in regime stazionario.

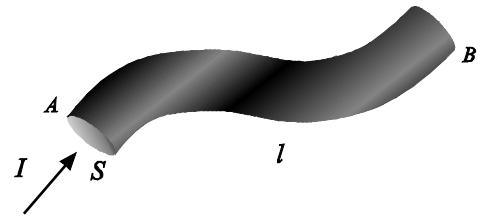
### 3.3 Legge di Ohm

Già nel 1772 Giambattista Beccaria comprese che non era corretto distinguere i corpi semplicemente in isolanti e conduttori, per cui introdusse il concetto di resistenza elettrica allo scopo di caratterizzare i materiali in relazione alla loro capacità di condurre più o meno efficacemente il fenomeno elettrico. Beccaria notò inoltre che la resistenza è proporzionale alla lunghezza del conduttore. Henry Cavendish nel 1776 osservò che collegando a più conduttori di diversa resistenza le armature di una bottiglia di Leida precedentemente caricate, la corrente attraversa tutti i conduttori ma in misura maggiore quelli di resistenza più bassa. Cavendish misurò la resistenza di varie soluzioni acquose e di alcuni metalli ed inoltre notò che tale grandezza è indipendente dalla corrente. Gli studi sulla conduzione ripresero circa vent'anni dopo l'invenzione della pila; nel 1827 il fisico tedesco Georg Simon Ohm pubblicò un resoconto delle misure svolte su conduttori filiformi, attraverso le quali aveva stabilito la dipendenza dell'intensità della corrente dalla sezione e dalla lunghezza dei conduttori. Inoltre, basandosi su una analogia tra il flusso di calore e quello di corrente elettrica, Ohm giunse alla conclusione che è la differenza di potenziale applicata ai conduttori a determinare la corrente e che questa varia direttamente con la differenza di potenziale e inversamente con la resistenza. Solo nel 1850 Gustav Robert Kirchhoff provò che la differenza di potenziale, denominata da Ohm forza elettroscopica, era la stessa introdotta da Poisson e Laplace

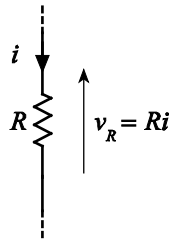


Georg Simon Ohm

Consideriamo un tratto di conduttore filiforme di lunghezza  $l$  e sezione uniforme  $S$  percorso da una corrente di intensità  $I$ . La misura della differenza di potenziale  $V$  agli estremi del filo evidenzia l'esistenza di una relazione di proporzionalità tra questa grandezza e la corrente  $I$ :



$$V \equiv V_B - V_A = RI, \quad (3.8)$$



il coefficiente di proporzionalità  $R$  è detto *resistenza* del tratto di conduttore considerato; tale espressione prende il nome di *legge di Ohm*. In figura è mostrato il simbolo elettrico della resistenza. Per conduttori metallici  $R$  è indipendente sia dalla differenza di potenziale  $V$  che dalla corrente  $I$ , ma dipende dalla geometria del conduttore, dal materiale che lo costituisce e dalla temperatura. In particolare, si verifica che per il conduttore filiforme considerato la resistenza è direttamente proporzionale alla sua lunghezza ed inversamente proporzionale alla sua sezione:

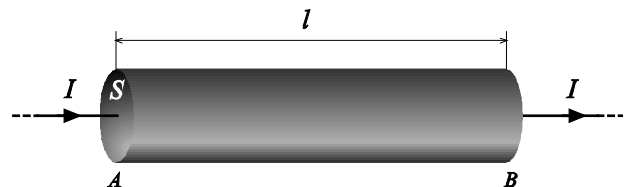
$$R = \rho \frac{l}{S}, \quad (3.9)$$

dove  $\rho$  è la *resistività* del conduttore. L'unità di misura della resistenza è l'*ohm* ( $\Omega$ ) e risulta  $1\Omega = 1V/1A$ , così la resistività si esprime in  $\Omega \cdot m$ . L'inverso della resistenza

$$G \equiv \frac{1}{R},$$

è detto *conduttanza*.

Consideriamo un tratto di conduttore metallico rettilineo e cilindrico di lunghezza  $l$ , sezione  $S$  e resistività  $\rho$ . Se  $V$  è la differenza di potenziale presente ai suoi estremi  $A$  e  $B$ , all'interno del materiale sarà presente un campo elettrico  $\vec{E}$  tale che:



$$V = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = El.$$

D'altra parte, la corrente che percorre il conduttore può essere espressa dalla (3.4) come il flusso del vettore densità di corrente  $\vec{J}$  attraverso la sezione  $S$ ; assumendo, per semplicità, che il vettore  $\vec{J}$  sia uniforme in corrispondenza dei punti della sezione del conduttore, si ha:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = JS.$$

D'altra parte, dalla relazione (3.8) risulta:

$$El = RJS,$$

e dalla (3.9) segue:

$$El = \rho \frac{l}{S} JS,$$

ovvero:

$$E = \rho J.$$

Sebbene ricavata in una accezione unidimensionale, si prova che tale identità è valida anche vettorialmente. Introducendo la *conducibilità*, definita come:

$$\sigma \equiv \frac{1}{\rho},$$

la relazione precedente si scrive come:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}. \quad (3.10)$$

Questa espressione è da interpretare come una formulazione di tipo puntuale della legge di Ohm, in quanto, assegnato il valore di  $\sigma$  in una data posizione del conduttore, fornisce il valore della densità di corrente  $\vec{J}$  una volta noto il campo elettrico  $\vec{E}$  agente in tale posizione. In un conduttore metallico la conducibilità è indipendente dal campo elettrico applicato.

Nel 1821 il fisico inglese Humphry Davy verificò che la capacità conduttiva dei metalli è influenzata dalla temperatura e, in particolare, tale capacità diminuisce all'aumentare della temperatura. Successivamente furono identificate molteplici eccezioni a tale legge; ad esempio, nel 1833 Faraday constatò che nel solfuro d'argento il potere conduttore aumenta con la temperatura. Per la maggior parte dei metalli la dipendenza della resistività dalla temperatura è espressa attraverso una relazione del tipo:

$$\rho = \rho_0 [1 + \alpha(T - T_0)], \quad (3.11)$$

dove  $\rho$  è la resistività alla temperatura  $T$ ,  $\rho_0$  la resistività alla temperatura di riferimento  $T_0$ , in genere  $20^\circ\text{C}$ , e  $\alpha$  un parametro noto come *coefficiente termico della resistività*. Dalla relazione precedente, posto  $\Delta\rho \equiv \rho - \rho_0$  e posto  $\Delta T \equiv T - T_0$ , segue:

$$\alpha = \frac{1}{\rho_0} \frac{\Delta\rho}{\Delta T}.$$

Nella tabella sono rappresentati i valori della resistività e del coefficiente termico per alcuni materiali. Facendo uso della relazione (3.9), per un conduttore di sezione uniforme è possibile scrivere la legge di variazione della resistenza con la temperatura:

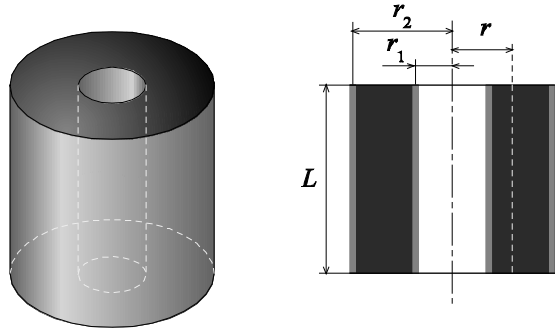
Materiale	Resistività ( $\Omega \cdot m$ )	Coefficiente Termico ( $^\circ\text{C}^{-1}$ )
<i>Argento</i>	$1.59 \times 10^{-8}$	$1 \times 10^{-3}$
<i>Rame</i>	$1.68 \times 10^{-8}$	$6.8 \times 10^{-2}$
<i>Alluminio</i>	$2.65 \times 10^{-8}$	$4.29 \times 10^{-3}$
<i>Tungsteno</i>	$5.6 \times 10^{-8}$	$4.5 \times 10^{-3}$
<i>Ferro</i>	$9.71 \times 10^{-8}$	$6.51 \times 10^{-3}$
<i>Platino</i>	$10.6 \times 10^{-8}$	$3.927 \times 10^{-3}$
<i>Grafite*</i>	$3 \div 60 \times 10^{-5}$	$-5 \times 10^{-4}$
<i>Germanio*</i>	$3 \div 500 \times 10^{-3}$	$-5 \times 10^{-3}$
<i>Silicio*</i>	$0.1 \div 60$	$-7 \times 10^{-2}$
<i>Vetro</i>	$1 \div 10000 \times 10^9$	-
<i>Quarzo fuso</i>	$7.5 \times 10^{17}$	-
<i>Gomma indurita</i>	$1 \div 100 \times 10^{13}$	-

\* In questi materiali, denominati semiconduttori, la resistività è fortemente condizionata dalla presenza di impurità nel materiale.

$$R = R_0 [1 + \alpha(T - T_0)].$$

La dipendenza della resistenza dalla temperatura trova applicazione nella realizzazione di termometri di precisione.

**Esempio:** Consideriamo due conduttori cilindrici, coassiali, di lunghezza  $L$  pari a  $10\text{ cm}$  e di raggi  $r_1$  e  $r_2$  rispettivamente pari a  $10\text{ cm}$  e  $20\text{ cm}$  la cui intercapedine è riempita con della grafite, di resistività pari a  $1.38 \times 10^{-5} \Omega \times m$ . Stabiliamo la resistenza corrispondente al flusso di una corrente nella grafite per effetto dell'applicazione di una differenza di potenziale tra i due conduttori. Applicando la legge di Gauss ad una superficie cilindrica concentrica ai due conduttori e di raggio  $r$  con  $r_1 < r < r_2$  si ricava che il campo elettrico  $\vec{E}$  nell'intercapedine è pari a  $Q/(2\pi\epsilon Lr)$ , dove  $Q$  indica la carica presente sul conduttore più interno ed  $\epsilon$  la costante dielettrica della grafite. La differenza di potenziale  $V$  tra i due conduttori è pari all'integrale di  $\vec{E}$  tra  $r_1$  e  $r_2$ , ossia  $[Q/(2\pi\epsilon L)] \ln(r_2/r_1)$ , così il campo elettrico può esprimersi come:



$$E = \frac{V}{r \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)}. \quad (3.12)$$

La densità di corrente  $J$  nella grafite può essere espressa come  $I/S$ , dove  $I$  è la corrente che attraversa lo spazio compreso tra i due conduttori e  $S$  è una generica superficie cilindrica di raggio  $r$  ( $r_1 < r < r_2$ ) e altezza  $L$ , concentrica ai due conduttori:

$$S = 2\pi rL,$$

così, adoperando la relazione (3.10), la corrente  $I$  vale:

$$I = SJ = S\sigma E = \frac{2\pi rL}{\rho} \frac{V}{r \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} = \frac{2\pi LV}{\rho \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)},$$

dove si è fatto uso delle relazioni (3.10) e (3.12). Pertanto, dalla legge di Ohm (3.8) segue che la resistenza  $R$  vale<sup>1</sup>:

$$R = \frac{V}{I} = \frac{\rho}{2\pi L} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) = \frac{1.38 \times 10^{-5} \Omega \times m}{2\pi \times 0.10 m} \ln\left(\frac{0.10 m}{0.05 m}\right) \approx 1.52 \times 10^{-5} \Omega. \quad (3.13)$$

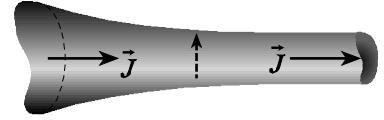
<sup>1</sup> Moltiplicando la relazione (3.13) per l'espressione della capacità  $C$  del condensatore cilindrico  $2\pi\epsilon L/\ln(r_2/r_1)$ , si trova:

$$RC = \frac{\rho}{2\pi L} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right) \frac{2\pi\epsilon L}{\ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right)} = \rho\epsilon,$$

è possibile dimostrare che questa identità lega, in maniera generale, la capacità e la resistenza del volume compreso tra due conduttori.

### 3.4 Caratteristiche dei conduttori in regime stazionario

L'equazione (3.7) che definisce il regime stazionario ha importanti conseguenze. Una di queste è che il vettore  $\vec{J}$  non ha componenti perpendicolari alla superficie del conduttore; infatti, se così non fosse, e  $\vec{J}$  avesse una componente diretta come il vettore tratteggiato di figura, si manifesterebbe localmente un progressivo accumulo di carica e risulterebbe conseguentemente  $\partial\rho/\partial t \neq 0$ . Dalla relazione (3.10) segue inoltre che in un conduttore omogeneo ed isotropo anche il campo elettrico all'interno del conduttore non ha componenti perpendicolari alla superficie del conduttore.



Consideriamo un conduttore percorso da una corrente stazionaria di densità  $\vec{J}$ , sia  $S$  una superficie chiusa che interseca il conduttore in corrispondenza delle sezioni  $S_1$  e  $S_2$ ; poiché il vettore  $\vec{J}$  non ha componenti normali alla superficie del conduttore, gli unici contributi al flusso di  $\vec{J}$  attraverso  $S$  provengono dalle sezioni  $S_1$  e  $S_2$ :

$$\int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{s} + \int_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{s}, \quad (3.14)$$

ma, per il teorema della divergenza e dalla (3.7), si ha:

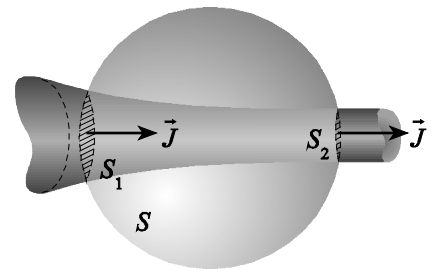
$$\int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{J} \, dv = 0, \quad (3.15)$$

essendo  $V$  il volume contenuto in  $S$ , così, con riferimento ai versi indicati in figura, siccome  $-\int_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{s}$  è pari alla corrente  $I_1$  che

attraversa la sezione  $S_1$  e, analogamente  $\int_{S_2} \vec{J} \cdot d\vec{s}$  è la corrente  $I_2$

che attraversa  $S_2$ , dalla (3.14) segue:

$$I_1 = I_2.$$



Questa relazione, verificata sperimentalmente da Peter Barlow nel 1825, afferma che in condizioni stazionarie la corrente attraverso ogni sezione del conduttore è la medesima. Tale risultato si presta ad una immediata generalizzazione al caso di  $n$  fili conduttori, ciascuno percorso, rispettivamente, dalle correnti  $I_1, I_2, \dots, I_n$ , che convergono in uno stesso punto, detto *nodo*. Applicando la relazione (3.15) ad una generica superficie chiusa  $S$  che racchiude il nodo, segue:

$$\sum_{k=1}^n I_k = 0, \quad (3.16)$$

cioè, in regime stazionario, la somma algebrica delle correnti che confluiscono in un nodo è nulla. Pertanto, assumendo, ad esempio, positive le correnti che entrano nel nodo e negative quelle uscenti, questa legge, detta *legge di Kirchhoff per le correnti* (o *prima legge di Kirchhoff*), afferma che la somma delle correnti entranti nel nodo è uguale alla somma delle correnti uscenti.



### 3.5 Modello della conduzione, effetto Joule

Dalla evidenza di una proporzionalità diretta tra densità di corrente in un conduttore e campo elettrico applicato, (3.10), segue che deve esistere una analoga relazione di proporzionalità tra la velocità  $\vec{v}_d$  dei portatori nel conduttore ed il campo elettrico  $\vec{E}$  ad esso applicato; infatti, dalle relazioni (3.3) e (3.10) segue che è possibile esprimere tale velocità come  $[\sigma/(nq)]\vec{E}$ . D'altra parte, siccome la forza  $\vec{F}$  agente sui portatori di carica è proporzionale al campo elettrico, necessariamente la loro velocità deve risultare proporzionale a questa forza, cioè si ha  $\vec{F} = (nq^2/\sigma)\vec{v}_d$ . Da tali considerazioni emerge un'apparente contraddizione con la seconda legge della dinamica, la quale afferma che l'azione di una forza su di un corpo ne determina l'accelerazione. Quindi, a differenza delle cariche poste nel vuoto, le cariche nei conduttori non



Paul Drude

accelerano sotto l'azione di un campo elettrico. Un'analogia con tale fenomeno si incontra nello studio della caduta di un corpo materiale attraverso un mezzo viscoso; per effetto della forza di gravità il corpo inizialmente accelera, tuttavia, agendo su di esso anche una forza proporzionale alla velocità, la forza di attrito viscoso, la velocità del corpo non cresce indefinitamente ma, da un certo istante in poi, diventa costante.

Nel 1900 il fisico tedesco Paul Drude formulò un modello del fenomeno della conduzione elettrica secondo cui un conduttore metallico può essere schematizzato come un reticolo ionico immerso in un gas di elettroni. Per effetto della presenza di impurità nel materiale che lo costituisce ed a causa dell'agitazione termica che sposta continuamente le posizioni di equilibrio degli ioni del reticolo, gli elettroni subiscono numerosi urti, cambiando ogni volta direzione in maniera casuale.

**Esempio:** Dal principio di equipartizione segue che gli elettroni posseggono un'energia cinetica media  $(1/2)m\langle v^2 \rangle$  pari a  $(3/2)kT$  pertanto, alla temperatura d'ambiente, per  $T$  uguale a  $300\text{ K}$ , la loro velocità quadratica media  $v_{rms}$ , che è di poco superiore alla loro velocità media  $v_m$ , vale:

$$v_{rms} = \sqrt{\frac{3kT}{m_e}} = \sqrt{\frac{3 \times (1.381 \times 10^{-23} \text{ J/K}) \times 300 \text{ K}}{9.109 \times 10^{-31} \text{ kg}}} \approx 1.168 \times 10^5 \text{ m/s}. \quad (3.17)$$

Quindi, in assenza di un campo elettrico applicato, il flusso netto degli elettroni attraverso una qualsiasi sezione del conduttore è nullo. All'applicazione di un campo elettrico  $\vec{E}$  si osserva che a tale moto disordinato viene a sovrapporsi un moto più lento degli elettroni, nella direzione opposta a quella del campo, con velocità media dell'ordine di  $10^{-6} \text{ m/s}$ . Tale piccolo valore non altera la velocità  $v_m$  degli elettroni che pertanto può ritenersi sostanzialmente indipendente dal campo  $\vec{E}$ . L'azione del campo elettrico su ciascun elettrone si esplica, di fatto, tra due urti successivi, per cui, in tale fase il moto dell'elettrone può ritenersi libero. La velocità  $\vec{v}$  dell'elettrone al termine di questa fase, che assumiamo abbia durata pari a  $\Delta t$ , vale:

$$\vec{v} = \vec{v}_0 - \frac{e}{m_e} \vec{E} \Delta t,$$

dove  $\vec{v}_0$  è la velocità con cui l'elettrone è emerso dall'urto precedente. Il valor medio di questa velocità per tutti gli elettroni, cioè la velocità di deriva, è:

$$\vec{v}_d \equiv \langle \vec{v} \rangle = \langle \vec{v}_0 \rangle - \frac{e}{m_e} \vec{E} \langle \Delta t \rangle = \langle \vec{v}_0 \rangle - \frac{e}{m_e} \vec{E} \tau,$$

in cui  $\tau$ , detto *tempo libero medio*, è il tempo medio che intercorre tra due urti successivi degli elettroni col reticolo. Poiché  $\vec{v}_0$  varia in maniera casuale, il suo valor medio è nullo, così la velocità di deriva, vale:

$$\vec{v}_d = -\frac{e}{m_e} \vec{E} \tau.$$

Quindi, dalla relazione (3.5) segue:

$$\vec{J} = -en \vec{v}_d = \frac{ne^2 \tau}{m_e} \vec{E},$$

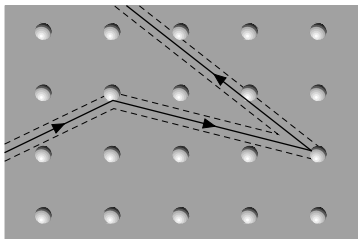
e, confrontando tale espressione con la legge di Ohm puntuale, (3.10), segue:

$$\sigma = \frac{ne^2 \tau}{m_e}; \quad (3.18)$$

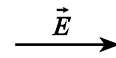
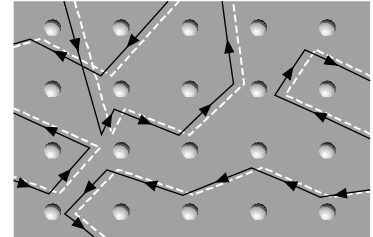
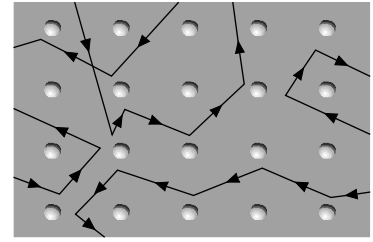
questa relazione indica che la conducibilità di un materiale aumenta sia col crescere del numero di elettroni disponibili alla conduzione che con l'aumentare del tempo  $\tau$ , poiché in tal caso gli elettroni posseggono un tempo maggiore per orientare il proprio moto nella direzione del campo elettrico. Il tempo libero medio può esprimersi come il rapporto tra la distanza media percorsa da un elettrone tra due urti consecutivi  $\lambda$ , detta *libero cammino medio*, e la velocità media degli elettroni  $v_m$ , pertanto:

$$\lambda = v_m \tau. \quad (3.19)$$

Per stimare il libero cammino medio consideriamo il moto di un elettrone nel reticolo ionico omogeneo, che schematizziamo come una disposizione regolare di sfere rigide di raggio  $R$ .



L'elettrone urterà contro uno ione se si sposterà lungo una traiettoria la cui distanza dal centro dello ione risulta inferiore a  $R$ . Consideriamo un intervallo di tempo  $\Delta t_1$ ; in tale intervallo l'elettrone percorre una distanza pari a  $v \Delta t_1$ . Se nel volume cilindrico  $\pi R^2 v \Delta t_1$  è contenuto uno degli ioni del reticolo, l'elettrone colliderà contro di esso modificando la sua traiettoria; analogamente, in un intervallo di tempo successivo  $\Delta t_2$ , l'elettrone urterà un altro ione se il centro di



Moto degli elettroni in un conduttore secondo il modello di Drude: in assenza di campo elettrico (in alto) ed in presenza di un campo elettrico (in basso)

quest'ultimo è contenuto nel volume cilindrico  $\pi R^2 v \Delta t_2$ . Così, in un intervallo di tempo  $\Delta t$  pari alla somma  $\Delta t_1 + \Delta t_2 + \dots$  l'elettrone urta con tutti gli ioni i cui centri sono situati nel volume  $\pi R^2 v \Delta t$  dato da  $\pi R^2 v \Delta t_1 + \pi R^2 v \Delta t_2 + \dots$ . Se il numero di ioni per unità di volume è pari a  $n_{ioni}$ , nel tempo  $\Delta t$  l'elettrone subirà un numero di collisioni pari a  $n_{ioni} \pi R^2 v \Delta t$  percorrendo una distanza complessiva pari a  $v \Delta t$ . Il libero cammino medio è pari al rapporto tra la distanza complessiva percorsa dall'elettrone e il numero di urti subiti:

$$\lambda = \frac{v \Delta t}{n_{ioni} \pi R^2 v \Delta t} = \frac{1}{n_{ioni} \pi R^2}.$$

Sostituendo questa espressione nella relazione (3.18) e facendo uso della (3.19), si ottiene:

$$\sigma = \frac{ne^2 \lambda}{m_e v_m} = \frac{ne^2}{m_e v_m n_{ioni} \pi R^2}. \quad (3.20)$$

In questa espressione nessuna delle quantità che compare dipende dal campo elettrico, in accordo con la legge di Ohm.

Sebbene il modello di Drude fornisca una corretta interpretazione della legge di Ohm, esso risulta in evidente disaccordo con alcuni risultati sperimentali. In particolare, dall'espressione (3.20) e dalla (3.17) emerge una dipendenza della conducibilità dalla temperatura, attraverso  $v_m$ , come  $1/\sqrt{T}$  e, di conseguenza, una dipendenza della resistività  $\rho$  dalla temperatura come  $\sqrt{T}$  a dispetto della relazione (3.11). Inoltre, facendo uso della (3.20) si trovano valori di resistività dei metalli alcune volte più grandi di quelli misurati. L'incompletezza del modello di Drude è originata dall'assunzione che l'interazione tra gli elettroni liberi ed il reticolo ionico del conduttore metallico si espliciti solo attraverso il meccanismo degli urti; di fatto esistono altre forme di interazione, spiegate nell'ambito della meccanica quantistica, che possono essere considerate modificando la relazione (3.18) nella maniera seguente:

$$\sigma = \frac{nq^2 \tau}{m^*},$$

in cui  $m^*$  e  $q$  prendono il nome, rispettivamente, di *massa efficace* e *carica efficace* dei portatori di carica che determinano la conduzione. Nel caso estremo, come per alcune leghe di uranio, l'interazione col reticolo è tale che la massa efficace dei portatori risulta essere anche cento volte superiore a  $m_e$ , mentre in altri solidi, come nelle eterostrutture di arseniuro di gallio, la massa efficace è pari ad appena il 7% circa di  $m_e$ . Nei materiali superconduttori, in cui, al di sotto di una certa temperatura critica la corrente circola senza resistenza, la carica efficace è pari a  $2e$ . In tali materiali si genera una debole forza attrattiva tra coppie di elettroni, formalmente analoga a quella che lega i due elettroni in uno ione  $H^-$  (un atomo di idrogeno al quale è stato aggiunto un elettrone); l'origine di questo legame, identificata nel 1957 da John Bardeen, Leon Cooper e John Schrieffer, è determinata dalle deformazioni locali che si generano nel reticolo ionico di questi materiali in corrispondenza del passaggio di un elettrone; tale modificazione, che permane per un certo tempo dal passaggio dell'elettrone, crea una regione di carica positiva che attrae un altro elettrone. Se l'energia di legame tra tali elettroni è superiore all'energia cinetica trasmessa dall'agitazione termica del reticolo, si forma una coppia stabile di elettroni (*coppia di Cooper*) che, spostandosi attraverso il reticolo incontra una minore resistenza di quanta ne trovi un elettrone isolato. Ciò accade in quanto, per una proprietà quantistica, per queste coppie di elettroni all'interno del materiale lo stato favorito è quello per il quale l'energia è la medesima; siccome gli urti con il reticolo determinano una variazione dell'energia dei singoli portatori, tali processi sono inibiti e le coppie si spostano senza incontrare alcuna resistenza; al di sopra della temperatura critica l'agitazione termica determina l'instabilità della coppia. Nei materiali semiconduttori (Appendice C) i portatori di carica sono rappresentati sia da elettroni che da altre entità, dette *lacune*, la cui carica è pari, in modulo, a quella dell'elettrone, ma ha segno opposto. Infine, studiando la conduzione attraverso catene lineari di poliacetilene, un polimero dell'acetilene, sono stati rilevati portatori la cui carica è pari a una frazione di  $e$ .

Il modello di conducibilità appena descritto suggerisce l'esistenza di un processo di dissipazione energetica intrinseco al meccanismo della conduzione. Infatti, l'energia fornita alle cariche attraverso l'applicazione di un campo elettrico non ne determina l'incremento dell'energia cinetica che, a quanto appena visto, resta in media costante. Così questa energia viene, di fatto, trasferita al reticolo ionico costituente il conduttore attraverso gli urti con gli elettroni; tale energia risulta quindi dissipata in calore, determinando l'aumento della temperatura del conduttore percorso da corrente. Questo processo, detto *effetto Joule*, fu descritto nel 1840 da James Prescott Joule e riscoperto indipendentemente da Heinrich Lenz due anni dopo. In generale, la potenza impiegata da una forza  $\vec{F}$  per imprimere una velocità  $\vec{v}_d$  ad un corpo vale  $\vec{F} \cdot \vec{v}_d$ , pertanto:

$$P_e = \vec{F} \cdot \vec{v}_d = -e\vec{E} \cdot \vec{v}_d,$$

dove si è specificato che  $\vec{F}$  è determinata dall'azione del campo elettrico  $\vec{E}$  su di un elettrone. Così, se  $n$  indica il numero di elettroni di conduzione per unità di volume all'interno conduttore, la potenza dissipata per unità di volume è:

$$p = nP_e = -en\vec{E} \cdot \vec{v}_d = \vec{J} \cdot \vec{E},$$

in cui si è fatto uso della relazione (3.5). Questa relazione esprime la legge di Joule in forma locale e  $p$  prende il nome di *densità di potenza*. Per un conduttore rettilineo, di sezione  $S$  e lunghezza  $l$  in cui la densità di corrente  $\vec{J}$  è uniforme attraverso  $S$ , la potenza dissipata vale:

$$P = \int_{\text{volume del conduttore}} p \, dv = pSl = JE Sl = (El)(JS) = VI,$$

che rappresenta la legge di Joule per un conduttore. Applicando la legge di Ohm (3.8) a questa espressione, risulta inoltre:

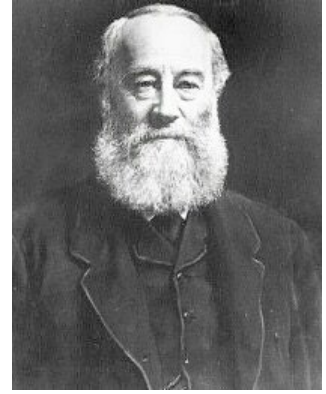
$$P = VI = \frac{V^2}{R} = I^2 R. \quad (3.21)$$

### 3.6 Forza elettromotrice, legge di Ohm generalizzata

Consideriamo un conduttore di resistenza  $R$  percorso da una corrente  $I$ , la differenza di potenziale tra i capi  $A$  e  $B$  di tale conduttore si esprime attraverso la legge di Ohm come:

$$V_A - V_B = \int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l} = RI; \quad (3.22)$$

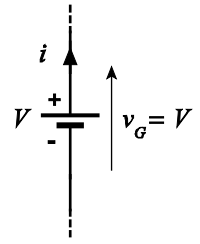
in particolare, applicando tale relazione ad un circuito chiuso  $\mathcal{C}$  di resistenza complessiva  $R_T$ , risulta:



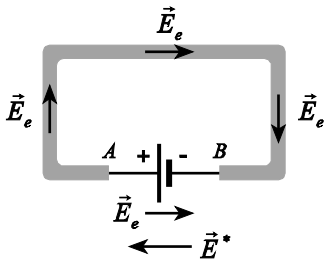
James Prescott Joule

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = R_T I$$

ossia, per ottenere nel circuito  $\mathcal{C}$  una corrente  $I$  è necessaria la presenza di un campo elettrico la cui circuitazione è diversa da zero. Tale campo non può avere natura elettrostatica poiché in tal caso risulterebbe  $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$ , quindi all'interno



del circuito deve agire un campo elettrico di natura non elettrostatica. Per *generatore elettrico* si intende un dispositivo capace di mantenere stabilmente una differenza di potenziale, e quindi un campo elettrico, tra due punti di un conduttore; in figura è mostrato il simbolo di tale componente. Consideriamo un circuito in cui un conduttore di resistenza  $R$  è connesso tra i poli  $A$  e  $B$  di un generatore, sui quali è costantemente presente una differenza di potenziale, ossia sono costantemente accumulate delle cariche di segno opposto. Il campo elettrostatico  $\vec{E}_e$  generato da tali cariche è diretto da  $A$  a  $B$  sia nel conduttore che nel generatore, così:



$$\oint_{\text{Circuito}} \vec{E}_e \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E}_e \cdot d\vec{l} + \int_B^A \vec{E}_e \cdot d\vec{l} = 0,$$

dove il primo addendo della somma è valutato lungo il conduttore e l'altro nel generatore. Il campo  $\vec{E}_e$ , quindi, non può determinare il moto all'interno del generatore di una carica positiva dal polo negativo  $B$  a quello positivo  $A$ ; ciò suggerisce l'esistenza di un campo elettrico  $\vec{E}^*$  di natura non elettrostatica, agente all'interno del generatore, tale che:

$$\oint_{\text{Circuito}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_A^B \vec{E}_e \cdot d\vec{l} + \int_B^A (\vec{E}_e + \vec{E}^*) \cdot d\vec{l} = \int_B^A \vec{E}^* \cdot d\vec{l} \neq 0. \quad (3.23)$$

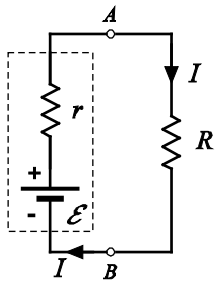
Il campo  $\vec{E}^*$  è detto *campo elettromotore*, mentre:

$$\mathcal{E} \equiv \int_B^A \vec{E}^* \cdot d\vec{l}$$

è detta *forza elettromotrice*. Adoperando tale definizione e la relazione (3.22), la (3.23) si scrive:

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \int_A^B \vec{E}_e \cdot d\vec{l} + \int_B^A (\vec{E}_e + \vec{E}^*) \cdot d\vec{l} = \\ &= V_A - V_B + \int_B^A (\vec{E}_e + \vec{E}^*) \cdot d\vec{l} = RI + \int_B^A (\vec{E}_e + \vec{E}^*) \cdot d\vec{l}; \end{aligned} \quad (3.24)$$

siccome la corrente  $I$  percorre anche il generatore, introduciamo un'altra grandezza caratteristica del generatore, la *resistenza interna*  $r$ , tale che:



$$\int_B^A (\vec{E}_e + \vec{E}^*) \cdot d\vec{l} \equiv rI,$$

interno  
al generatore

così l'espressione (3.24) si scrive:

$$\mathcal{E} = RI + rI = (R + r)I = R_T I, \quad (3.25)$$

quindi, l'intensità della corrente in seno a tale circuito è data dalla relazione

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R + r},$$

inoltre dalla (3.22) segue:

$$V_A - V_B = RI = \mathcal{E} - rI.$$

Il valore di  $\mathcal{E}$  può essere stabilito attraverso l'interruzione del circuito; in questo modo nel generatore si raggiunge un equilibrio, in quanto l'accumulo di carica sui morsetti<sup>2</sup> impedisce ulteriori spostamenti di carica, ne segue che la corrente  $I$  è nulla e, pertanto:

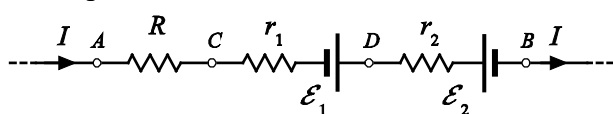
$$V_A - V_B = \mathcal{E},$$

cioè la forza elettromotrice è la differenza di potenziale che si rileva ai capi del generatore a circuito aperto.

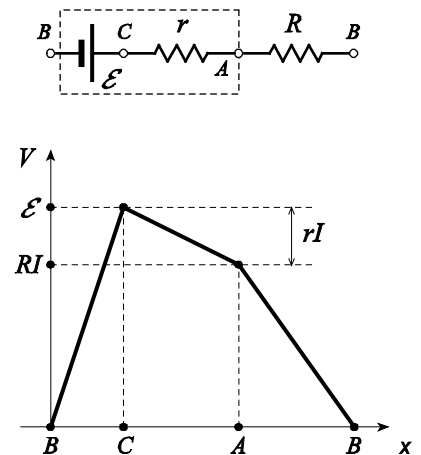
In figura è mostrato l'andamento del potenziale  $V$  lungo il circuito considerato. Siccome l'energia potenziale di una carica  $q$  è  $qV$ , tale grafico illustra anche l'andamento dell'energia potenziale di una carica unitaria che percorre il circuito. Come si può osservare dal grafico, dal punto  $B$  al punto  $A$  la carica acquista un'energia  $q\mathcal{E}$  che, per effetto della resistenza interna  $r$ , perde parzialmente all'interno dello stesso generatore, quindi, dopo essere passata attraverso la resistenza  $R$ , degrada completamente la sua energia<sup>3</sup>. Se nell'espressione (3.25) moltiplichiamo tutti i membri per la corrente  $I$  si ha:

$$\mathcal{E}I = RI^2 + rI^2 = R_T I^2;$$

questa relazione, che esprime il bilancio energetico in seno al circuito considerato, mostra come la potenza  $R_T I^2$ , dissipata attraverso la resistenza  $R_T$  offerta dal circuito, è pari al prodotto  $\mathcal{E}I$ , che viene pertanto interpretato come l'energia erogata dal generatore di forza elettromotrice nell'unità di tempo.



Consideriamo il tratto di circuito percorso dalla corrente  $I$  mostrato in figura; applicando le regole appena esposte, si ha:



<sup>2</sup> Per *morsetto* si intende un punto attraverso il quale è possibile congiungere due o più tratti di circuito.

<sup>3</sup> Per questo motivo, la differenza di potenziale  $V_A - V_B = RI$  ai capi della resistenza  $R$  è anche detta *caduta di tensione*.

$$\begin{aligned}V_A - V_C &= RI, \\V_D - V_C &= \mathcal{E}_1 - r_1 I, \\V_D - V_B &= \mathcal{E}_2 - r_2 (-I),\end{aligned}$$

ovvero:

$$\begin{aligned}V_A - V_C &= RI, \\V_C - V_D &= -\mathcal{E}_1 + r_1 I, \\V_D - V_B &= \mathcal{E}_2 + r_2 I;\end{aligned}$$

sommando membro a membro queste espressioni, si trova:

$$V_A - V_B + (\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2) = (R + r_1 + r_2) I,$$

attraverso tale relazione è possibile dedurre una regola generale per la descrizione dei tratti di circuito; quindi, fissato il verso della corrente  $I$ , cioè il verso secondo cui il potenziale elettrico diminuisce lungo la resistenza totale  $R + r_1 + r_2$ , la forza elettromotrice  $\mathcal{E}_1$  compare col segno positivo perché la corrente  $I$  entra nel polo negativo ed esce da quello positivo, al contrario, la forza elettromotrice  $\mathcal{E}_2$  compare col segno negativo in quanto la corrente entra nel polo positivo ed esce da quello negativo, infatti, se il corrispondente generatore agisse da solo farebbe scorrere la corrente nel verso opposto a quello scelto.

In generale possiamo scrivere per un ramo  $AB$  di un circuito, inteso come un tratto del circuito compreso tra i nodi  $A$  e  $B$ , la *legge di Ohm generalizzata*:

$$V_A - V_B + \sum_{k=1}^n \mathcal{E}_k = \sum_{m=1}^{s_l} R_m I_l$$

in cui  $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots, \mathcal{E}_n$  rappresentano i generatori di forza elettromotrice presenti nel ramo e  $R_1, R_2, \dots, R_{s_l}$  le resistenze, comprese quelle interne dei generatori, contenute nel ramo percorso dalla corrente  $I_l$ . Qualora il circuito è chiuso,  $V_A$  risulta uguale a  $V_B$ , così dall'espressione precedente si ottiene la relazione<sup>4</sup>:

$$\sum_{k=1}^n \mathcal{E}_k = \sum_{l=1}^r \sum_{m=1}^{s_l} R_m I_l, \quad (3.26)$$

che prende il nome *legge di Kirchhoff per le tensioni* (o *seconda legge di Kirchhoff*).

---

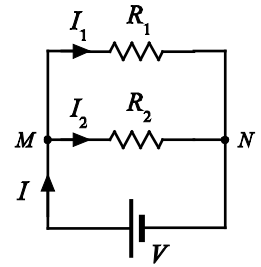
<sup>4</sup> Il circuito chiuso considerato è costituito dall'interconnessione di  $r$  rami, a ciascuno dei quali compete, in generale, una corrente differente  $I_l$ ; pertanto, al secondo membro occorre sommare le  $r$  espressioni  $\sum_{m=1}^{s_l} R_m I_l$  che rappresentano la caduta di tensione lungo ciascun ramo. L'indice  $k$  della prima sommatoria è relativo agli  $n$  generatori di forza elettromotrice presenti nel circuito.

### 3.7 Collegamenti tra resistori

Consideriamo due resistori di resistenza  $R_1$  e  $R_2$  collegati come mostrato in figura. Analogamente al caso dei condensatori, quando entrambi i resistori sono sottoposti alla stessa differenza di potenziale, la connessione è detta in parallelo. Le correnti che attraversano ciascun resistore sono:

$$I_1 = \frac{V}{R_1},$$

$$I_2 = \frac{V}{R_2}.$$



Facendo uso della legge di Kirchhoff per le correnti, in corrispondenza del nodo  $M$  si ha:

$$I = I_1 + I_2,$$

così, sostituendo a  $I_1$  e  $I_2$  il loro valore, si ha:

$$I = I_1 + I_2 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} = V \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = \frac{V}{R},$$

dove si è posto:

$$R \equiv \frac{1}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}.$$

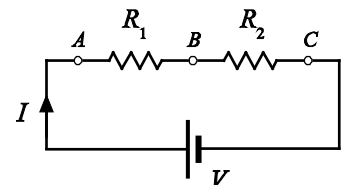
Cioè il sistema costituito da due resistori collegati tra loro in parallelo è assimilabile ad un unico resistore la cui resistenza è pari al reciproco della somma dei reciproci delle resistenze di ciascun resistore. Qualora il sistema sia costituito dalla connessione in parallelo di  $n$  resistori  $R_1, R_2, \dots, R_n$ , la resistenza equivalente del sistema è pari a:

$$R \equiv \frac{1}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{R_k}}.$$

Consideriamo una coppia di resistori collegati come in figura. In questa connessione, detta in serie, la corrente che attraversa ciascun resistore è la stessa. Applicando la legge di Ohm ad ogni resistenza, si ha:

$$V_A - V_B = R_1 I,$$

$$V_B - V_C = R_2 I,$$



e, sommando membro a membro, siccome la differenza di potenziale  $V_A - V_C$  è pari alla forza elettromotrice  $V$  erogata dal generatore, si ha:



$$V = V_A - V_C = (R_1 + R_2)I = RI,$$

dove si è posto:

$$R = R_1 + R_2.$$

Cioè il sistema costituito da due resistori connessi tra loro in serie è equivalente ad un unico resistore la cui resistenza è pari alla somma delle resistenze di ciascun resistore. Qualora il sistema sia costituito dal collegamento in serie di  $n$  resistori  $R_1, R_2, \dots, R_n$ , la resistenza equivalente è pari a:

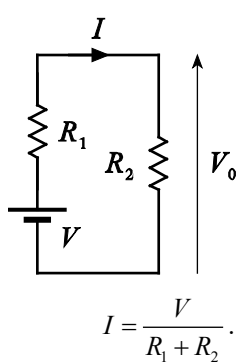
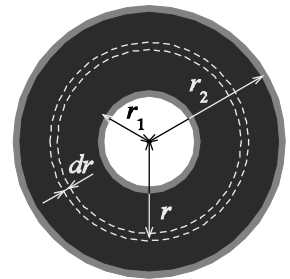
$$R \equiv \sum_{k=1}^n R_k.$$

**Esempio:** Relativamente all'esempio precedente è possibile valutare la resistenza richiesta con un approccio differente. Consideriamo due superfici cilindriche contenute nell'intercapedine tra i due conduttori, concentriche ai conduttori, di altezza  $L$  e di raggi, rispettivamente  $r$  e  $r + dr$ ; dalla relazione (3.9), il contributo del volume di grafite, contenuto tra tali superfici, al calcolo della resistenza  $R$  è pari a:

$$dR = \rho \frac{dr}{2\pi r L};$$

tutti questi elementi infinitesimi che si ottengono al variare di  $r$ , per  $r_1 < r < r_2$ , sono collegati in serie tra loro; pertanto, la resistenza totale sarà data da:

$$R = \int_{r_1}^{r_2} \rho \frac{dr}{2\pi r L} = \frac{\rho}{2\pi L} \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r} = \frac{\rho}{2\pi L} \ln\left(\frac{r_2}{r_1}\right).$$



**Esempio: (Partitore di tensione)** Stabiliamo la differenza di potenziale  $V_0$  ai capi della resistenza  $R_2$  del circuito di figura. Dalla legge di Ohm applicata alla serie delle resistenze  $R_1$  e  $R_2$ , segue:

$$V = I(R_1 + R_2),$$

per cui la corrente  $I$  vale:

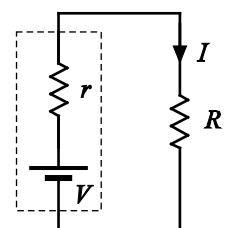
$$I = \frac{V}{R_1 + R_2}.$$

La differenza di potenziale  $V_0$  è pari alla caduta di tensione sulla resistenza  $R_2$ :

$$V_0 = R_2 I = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V.$$

Il circuito appena descritto, detto *partitore di tensione*, consente di ottenere a partire da una tensione  $V$  una più bassa  $V_0$  del fattore  $R_2/(R_1 + R_2)$ , che prende il nome di *rapporto di partizione*.

**Esempio: (Teorema del massimo trasferimento di potenza)** Consideriamo un generatore di forza elettromotrice  $V$  e resistenza interna  $r$  collegato ad un carico costituito da una resistenza  $R$ . Stabiliamo il valore che deve assumere questa resistenza affinché si abbia il massimo



trasferimento di potenza dal generatore a tale carico. Siccome la corrente attraverso  $R$  vale:

$$I = \frac{V}{r + R},$$

la potenza dissipata dal carico è:

$$P = RI^2 = V^2 \frac{R}{(r + R)^2}.$$

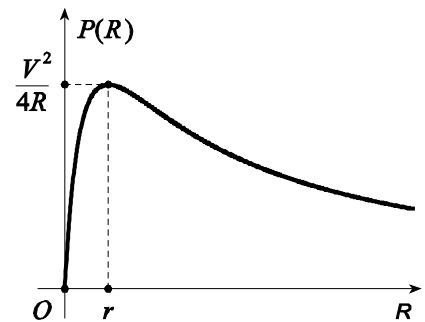
Per stabilire il valore di  $R$  in corrispondenza del quale si ha il massimo trasferimento di potenza, imponiamo che la derivata prima di  $P$  rispetto ad  $R$  sia nulla:

$$\frac{\partial P}{\partial R} = V^2 \frac{(r + R)^2 - 2R(r + R)}{(r + R)^4} = V^2 \frac{r - R}{(r + R)^3} \equiv 0,$$

da cui segue:

$$R \equiv r.$$

Cioè si ha il massimo trasferimento di potenza dal generatore alla resistenza di carico quando tale resistenza è uguale alla resistenza interna del generatore; questa proprietà prende il nome di *teorema del massimo trasferimento di potenza*. In figura è mostrato il grafico della potenza  $P$  al variare di  $R$ .



### 3.8 Analisi delle reti elettriche

L'interconnessione di generatori e resistenze è detta *rete elettrica*; per caratterizzare topologicamente una rete elettrica si fa uso dei concetti, già introdotti di nodo e ramo. Per nodo si intende il punto in cui convergono almeno tre conduttori, i nodi sono collegati tra loro attraverso rami contenenti, in generale, resistori e generatori. Un qualsiasi percorso chiuso all'interno di una rete è detto *maglia*. Per *analisi* o *soluzione* di una rete elettrica si intende la determinazione delle correnti che scorrono in ciascun ramo, note che siano le caratteristiche topologiche e fisiche della rete. A tale scopo è possibile far uso delle leggi (3.16) e (3.26) formulate da Gustav Kirchhoff nel 1845:

$$\sum_k I_k = 0, \tag{3.27}$$

$$\sum_m \mathcal{E}_m = \sum_l \sum_n R_n I_l; \tag{3.28}$$

in questa maniera l'analisi di una rete corrisponde alla risoluzione di un sistema di equazioni lineari. Affinché tale sistema risulti risolvibile è necessario che le equazioni siano linearmente indipendenti. Se la rete ha  $N$  nodi e  $L$  rami, il numero equazioni (3.27) indipendenti è  $N-1$ , poiché l'equazione all' $N$ -esimo nodo può sempre essere ottenuta come somma delle equazioni relative a due o più nodi della stessa rete; inoltre si prova che il numero di equazioni (3.28) indipendenti è  $L-N+1$ . In questa maniera è possibile disporre in totale di un numero  $(N-1)+(L-N+1)$  pari a  $L$  di equazioni indipendenti, cioè tante quanti sono i rami della rete. La risoluzione del sistema formato da  $L$  equazioni in  $L$  incognite porterà,



Gustav Kirchhoff

pertanto, alla determinazione di tutte le correnti circolanti attraverso i rami della rete elettrica assegnata. Così la soluzione di una rete elettrica attraverso l'applicazione delle leggi di Kirchhoff, richiede che vengano inizialmente individuate le  $M$  maglie le cui equazioni (3.28) risultino indipendenti; a tale scopo, ad esempio, è possibile scegliere queste maglie in modo che ciascuna abbia almeno un ramo che non fa parte delle maglie scelte precedentemente. Quindi si attribuisce arbitrariamente il verso delle correnti attraverso ciascun ramo ed un verso di percorrenza per ogni maglia. Successivamente, con riferimento ai versi scelti per le correnti, si scrive l'equazione (3.27) per ciascuno degli  $N-1$  nodi; quindi si scrive l'equazione (3.28) per ciascuna delle  $M$  maglie; in particolare, se il generatore di forza elettromotrice  $\mathcal{E}_m$  è percorso dal verso della maglia dal polo negativo a quello positivo è considerato col segno positivo, altrimenti col segno negativo; inoltre, qualora nel ramo  $l$ -esimo la corrente  $I_l$  è concorde col verso scelto per la corrispondente maglia, l'addendo  $R_n I_l$  è preso col segno positivo altrimenti col segno negativo. Una soluzione negativa per le correnti è indice del fatto che il verso effettivo per la corrente nel ramo è opposto a quello arbitrariamente stabilito.

**Esempio:** Consideriamo la rete di figura, in cui  $R_1$  vale  $15 \Omega$ ,  $R_2$  e  $R_3$  valgono  $2 \Omega$ ,  $R_4$  vale  $9 \Omega$ ,  $R_5$  vale  $10 \Omega$  ed il generatore eroga una forza elettromotrice  $V_0$  di  $20 V$ ; stabiliamo la corrente che scorre attraverso il ramo  $BD$ . La rete possiede quattro nodi e sei rami, per cui si avranno tre equazioni ai nodi e tre alle maglie. Attribuiamo dei versi arbitrari alle correnti in ciascun ramo così come indicato in figura ed assumiamo quale verso per la percorrenza di ciascuna maglia quello orario. Scegliendo i nodi  $A$ ,  $B$  e  $C$  si hanno le seguenti equazioni ai nodi:

$$\begin{array}{cccccc} -I_1 & & -I_3 & & I_6 & = 0, \\ I_1 & -I_2 & & -I_5 & & = 0, \\ & I_2 & I_4 & & -I_6 & = 0; \end{array}$$

scegliendo le maglie  $ABDA$ ,  $BCDB$  e  $ADCA$  si hanno le equazioni alle maglie:

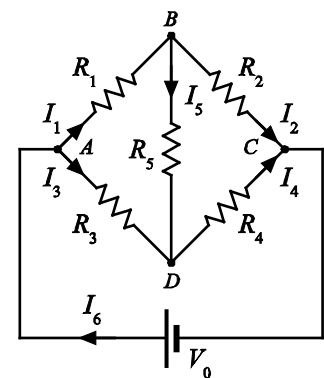
$$\begin{array}{cccccc} R_1 I_1 & & -R_3 I_3 & & R_5 I_5 & = 0, \\ & R_2 I_2 & & -R_4 I_4 & -R_5 I_5 & = 0, \\ & & R_3 I_3 & R_4 I_4 & & = V_0; \end{array}$$

pertanto per stabilire il valore della corrente  $I_5$  occorre risolvere il seguente sistema di sei equazioni in sei incognite:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ R_1 & 0 & -R_3 & 0 & R_5 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & -R_4 & -R_5 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & R_4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ V_0 \end{pmatrix},$$

quindi, posto:

$$D \equiv \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ R_1 & 0 & -R_3 & 0 & R_5 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & -R_4 & -R_5 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & R_4 & 0 & 0 \end{vmatrix} \approx -2.51 \times 10^3 \Omega.$$



si ha

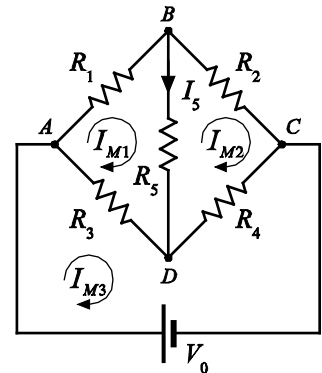
$$I_5 = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ R_1 & 0 & -R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & -R_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & R_4 & V_0 & 0 \end{vmatrix} \approx -1.05 \text{ A}.$$

Si noti che siccome il valore trovato è negativo, il verso della corrente  $I_5$  è opposto a quello indicato in figura.

La soluzione di una rete elettrica può essere notevolmente semplificata qualora questa sia *piana*, ovvero se non vi siano rami che si incrociano; una tale rete può essere considerata come formata da sole maglie contigue. Per la soluzione di una rete con questa caratteristica, si identificano le maglie indipendenti e si attribuisce a ciascuna di esse una circolazione fittizia di corrente (*corrente di maglia*); facendo uso di tali correnti si scrive la seconda legge di Kirchhoff per ogni maglia. Se la rete presenta  $M$  maglie contigue, e quindi  $M$  correnti di maglia, questo metodo, dovuto a James Clerk Maxwell, comporta la redazione di un sistema di  $M$  equazioni in altrettante incognite, che risulta, pertanto, risolvibile. Note le correnti di maglia, le effettive correnti che percorrono i rami costituenti la rete si ottengono come differenza fra le correnti fittizie delle due maglie contigue che hanno in comune il ramo interessato.

**Esempio:** Con riferimento all'esempio precedente, stabiliamo il valore della corrente  $I_5$  facendo uso del metodo delle correnti di maglia. Pertanto associamo arbitrariamente delle correnti alle maglie indipendenti  $ABDA$ ,  $BCDB$  e  $ADCA$  così come indicato in figura. Applicando la seconda legge di Kirchhoff a tali maglie, si ha:

$$\begin{cases} (R_1 + R_3 + R_5)I_{M1} & -R_5I_{M2} & -R_3I_{M3} = 0 \\ -R_5I_{M1} & (R_2 + R_4 + R_5)I_{M2} & -R_4I_{M3} = 0 \\ -R_3I_{M1} & -R_4I_{M2} & (R_3 + R_4)I_{M3} = V_0 \end{cases},$$



ovvero:

$$\begin{pmatrix} R_1 + R_3 + R_5 & -R_5 & -R_3 \\ -R_5 & R_2 + R_4 + R_5 & -R_4 \\ -R_3 & -R_4 & R_3 + R_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} I_{M1} \\ I_{M2} \\ I_{M3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ V_0 \end{pmatrix}.$$

Si noti che in questo caso la matrice dei coefficienti è simmetrica e, inoltre, l'elemento di posto  $ii$  rappresenta la somma di tutte le resistenze presenti nella  $i$ -esima maglia e l'elemento di posto  $ij$ , con  $i \neq j$ , rappresenta la somma, cambiata di segno, delle resistenze comuni tra la maglia  $i$ -esima e la maglia  $j$ -esima. La corrente  $I_5$  è data dalla differenza della corrente di maglia  $I_{M1}$  e la corrente di maglia  $I_{M2}$  che valgono, rispettivamente:

$$I_{M1} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -R_5 & -R_3 \\ 0 & R_2 + R_4 + R_5 & -R_4 \\ V_0 & -R_4 & R_3 + R_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + R_3 + R_5 & -R_5 & -R_3 \\ -R_5 & R_2 + R_4 + R_5 & -R_4 \\ -R_3 & -R_4 & R_3 + R_4 \end{vmatrix}} \approx 1.05 \text{ A},$$

$$I_{M2} = \frac{\begin{vmatrix} R_1 + R_3 + R_5 & 0 & -R_3 \\ -R_5 & 0 & -R_4 \\ -R_3 & V_0 & R_3 + R_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} R_1 + R_3 + R_5 & -R_5 & -R_3 \\ -R_5 & R_2 + R_4 + R_5 & -R_4 \\ -R_3 & -R_4 & R_3 + R_4 \end{vmatrix}} \approx 2.10 \text{ A},$$

pertanto:

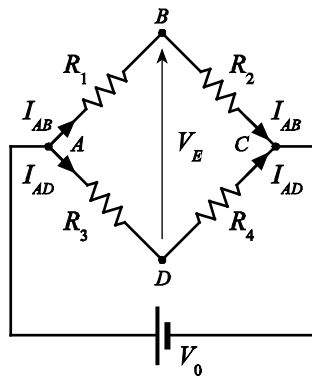
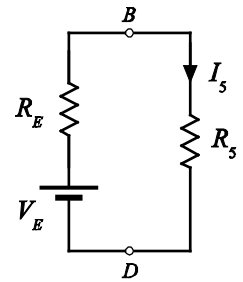
$$I_5 = I_{M1} - I_{M2} \approx 1.05 \text{ A} - 2.10 \text{ A} \approx -1.05 \text{ A}.$$



Léon Charles Thévenin

Malgrado l'applicazione delle leggi di Kirchhoff consenta, in principio, la soluzione di qualsiasi rete elettrica, spesso tale approccio risulta, nella pratica, piuttosto complesso. Sebbene esistano numerosi teoremi relativi alla soluzione delle reti elettriche che consentono di fare a meno delle leggi di Kirchhoff, in questa sede presentiamo il teorema formulato dall'ingegnere francese Léon Charles Thévenin nel 1883, derivato dal principio del generatore equivalente di Helmholtz del 1853. Il *teorema di Thévenin* afferma che una qualsiasi rete elettrica contenente, in generale, resistori e generatori, compresa tra due morsetti, risulta equivalente alla serie di un generatore di forza elettromotrice  $V_E$  ed una resistenza  $R_E$ ; la forza elettromotrice  $V_E$  rappresenta la

differenza di potenziale che si misura tra i due morsetti della rete, quando questi sono aperti. La resistenza  $R_E$  si valuta applicando ai due morsetti una differenza di potenziale  $V$  e trovando la corrente erogata  $I$  dopo aver sostituito i generatori presenti nella rete con le proprie resistenze interne, risulta allora  $R_E = V/I$ .



**Esempio:** Alla luce del teorema di Thévenin la rete dell'esempio precedente può essere schematizzata, relativamente ai morsetti B e D come mostrato in figura. Il generatore  $V_E$  eroga una forza elettromotrice pari alla differenza di potenziale presente tra tali morsetti a vuoto, ovvero in assenza del resistore  $R_5$ . Con riferimento allo schema di figura, note le correnti  $I_{AB}$  e  $I_{AD}$ :

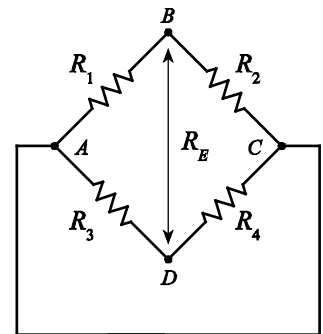
$$I_{AB} = \frac{V_0}{R_1 + R_2} = \frac{20 \text{ V}}{15 \Omega + 2 \Omega} \approx 1.18 \text{ A},$$

$$I_{AD} = \frac{V_0}{R_3 + R_4} = \frac{20 \text{ V}}{2 \Omega + 9 \Omega} \approx 1.82 \text{ A},$$

la tensione  $V_E$  è pari alla differenza di potenziale<sup>5</sup>  $V_{BD}$ :

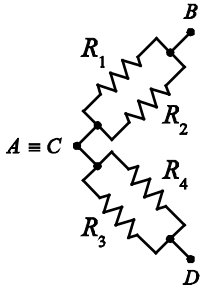
$$V_E = V_{BD} = -R_1 I_{AB} + R_3 I_{AD} = -15 \Omega \times 1.18 \text{ A} + 2 \Omega \times 1.82 \text{ A} \approx -14.01 \text{ V}.$$

La determinazione della resistenza equivalente  $R_E$  richiede che il generatore  $V_0$  venga sostituito con la sua resistenza interna, ovvero, essendo tale resistenza nulla, che venga sostituito con un cortocircuito<sup>6</sup>; dopo tale operazione i punti A e C saranno collegati tra loro, pertanto la resistenza  $R_1$  risulterà in parallelo alla resistenza  $R_2$  e, analogamente, la



<sup>5</sup> Con questa scrittura si sottintende la differenza di potenziale  $V_B - V_D$ .

<sup>6</sup> E' detto *cortocircuito* un collegamento tra due punti realizzato con un conduttore di resistenza nulla. Dalla legge di Ohm segue che la differenza di potenziale ai capi del cortocircuito è nulla, indipendentemente dalla corrente che lo attraversa



resistenza  $R_3$  risulterà in parallelo alla resistenza  $R_4$ ; inoltre queste coppie di resistenze in parallelo saranno collegate in serie tra loro, così come mostrato in figura. La resistenza compresa tra i morsetti  $B$  e  $D$  vale quindi:

$$R_E = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} + \frac{R_3 R_4}{R_3 + R_4} = \frac{15 \Omega \times 2 \Omega}{15 \Omega + 2 \Omega} + \frac{2 \Omega \times 9 \Omega}{2 \Omega + 9 \Omega} \approx 3,4 \Omega.$$

La corrente attraverso la resistenza  $R_5$  sarà quindi:

$$I_5 = \frac{V_E}{R_E + R_5} = \frac{-14,01 V}{3,4 \Omega + 10 \Omega} \approx -1,05 A.$$

Al di là del vantaggio connesso al minor numero di calcoli necessari a conseguire il risultato, si osservi che qualora si debba calcolare la corrente  $I_5$  in corrispondenza di un altro valore della resistenza  $R_E$ , facendo riferimento al circuito equivalente è sufficiente eseguire il solo calcolo finale; viceversa la stessa determinazione attraverso l'uso delle leggi di Kirchhoff richiede nuovamente la risoluzione di un sistema di equazioni lineari.

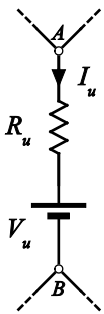
Di seguito è presentata una dimostrazione del teorema di Thévenin.

Consideriamo una rete elettrica costituita da  $L$  rami; le equazioni di Kirchhoff (3.27) e (3.28) possono essere poste nella forma:

$$V_k = \sum_j R_{kj} I_j, \quad (3.29)$$

con  $k = 1, 2, \dots, L$ , in cui  $V_k$  rappresenta la somma algebrica delle forze elettromotrici situate lungo il ramo  $k$ -esimo,  $R_{kj}$  è la resistenza del ramo  $j$ -esimo e  $I_j$  la corrente che attraversa tale ramo. Il sistema di equazioni lineari espresso dalla relazione (3.29) può essere invertito e posto nella forma:

$$I_j = \sum_k G_{jk} V_k, \quad (3.30)$$



con  $j = 1, 2, \dots, L$ . Consideriamo il ramo  $u$  compreso tra i nodi  $A$  e  $B$ ; sia  $I_u$  la corrente che attraversa questo ramo,  $V_u$  la somma algebrica delle forze elettromotrici disposte lungo tale ramo e  $R_u$  la resistenza complessiva di questo ramo. Supponiamo che risulti  $V_k = 0$  per  $k \neq u$ , cioè supponiamo di sostituire con un cortocircuito tutti i generatori di forza elettromotrice della rete, escluso quello  $u$ -esimo. In tale condizione, la relazione (3.30) si esprime come:

$$I_u = G_{uu} V_u,$$

pertanto, il rapporto tra la differenza di potenziale  $V_u$  e la corrente  $I_u$  varrà:

$$\frac{V_u}{I_u} = \frac{1}{G_{uu}} = R_u + R_E, \quad (3.31)$$

in cui  $R_E$  rappresenta la resistenza compresa tra i nodi  $A$  e  $B$  quando il ramo  $u$ -esimo è sconnesso dalla rete. Sia  $V_E$  la differenza di potenziale tra i nodi  $A$  e  $B$  quando il ramo  $u$ -esimo è sconnesso dalla rete; qualora sostituiamo il generatore presente nel ramo  $u$ -esimo con uno che eroga una forza elettromotrice  $V_u$  pari a  $-V_E$ , la corrente  $I_u$  attraverso tale ramo risulterà nulla, per cui, dalla relazione (3.30), in corrispondenza del ramo  $u$ -esimo risulterà:

$$0 = G_{uu} V_u + \sum_{k \neq u} G_{uk} V_k = -G_{uu} V_E + \sum_{k \neq u} G_{uk} V_k,$$

ovvero:

$$\sum_{k \neq u} G_{uk} V_k = G_{uu} V_E ;$$

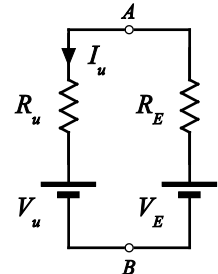
pertanto, dalla (3.30) segue, in generale:

$$I_u = G_{uu} V_u + \sum_{k \neq u} G_{uk} V_k = G_{uu} V_u + G_{uu} V_E = G_{uu} (V_u + V_E).$$

D'altra parte, dalla relazione (3.31) si ha:

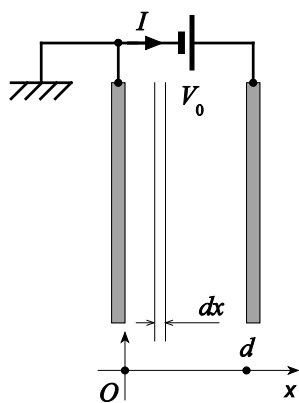
$$I_u = G_{uu} (V_u + V_E) = \frac{V_u + V_E}{R_u + R_E},$$

cioè la rete a monte del ramo  $u$ -esimo può schematizzarsi come la serie tra la resistenza  $R_E$  e il generatore di forza elettromotrice  $V_E$ .



**Esempio:** (*diode a vuoto*) Il diodo a vuoto è un componente elettronico che, nella sua configurazione più semplice, è costituito da due elettrodi piani; uno, detto *catodo* posto a potenziale zero e l'altro, detto *anodo*, posto a potenziale  $V_0 > 0$ , disposti parallelamente a distanza  $d$ . Quando il catodo viene riscaldato, gli atomi che lo costituiscono, così eccitati emettono elettroni<sup>7</sup> che vengono accelerati attraverso la regione compresa tra i due elettrodi e, all'equilibrio, si origina una corrente costante  $I$  in tale regione. Assumendo che la superficie  $S$  degli elettrodi sia molto maggiore di  $d^2$  è possibile trascurare gli effetti ai bordi dei piatti ed ottenere che tutte le quantità quali il potenziale, la densità di carica e la velocità degli elettroni, dipendano dalla sola distanza  $x$  dal catodo; la corrente  $I$  invece è indipendente da tale variabile una volta raggiunta la condizione stazionaria. Assumiamo inoltre che in tale condizione di equilibrio la densità degli elettroni in corrispondenza del catodo è tale da determinare un campo elettrico nullo su tale elettrodo, sebbene non sia nullo il suo gradiente. Poiché il potenziale in corrispondenza del catodo è nullo, trascurando la velocità con cui sono emessi gli elettroni dal catodo, il principio di conservazione dell'energia in corrispondenza di un punto posto a distanza  $x$  dal catodo assume l'espressione:

$$\frac{1}{2} m_e v^2(x) - eV(x) = 0,$$



dove  $m_e$  e  $v(x)$  rappresentano, rispettivamente, la massa e la velocità dell'elettrone e  $V(x)$  è la differenza di potenziale tra un punto posto a distanza  $x$  dal catodo e il catodo stesso; da tale relazione segue:

$$v(x) = \sqrt{\frac{2eV(x)}{m_e}}. \tag{3.32}$$

Consideriamo una regione di spessore  $dx$  interna allo spazio compreso tra gli elettrodi; poiché il volume di tale regione è pari a  $Sdx$ , la carica  $dq$  contenuta in essa varrà  $\rho(x)Sdx$ , dove  $\rho(x)$  rappresenta la densità della carica alla distanza  $x$  dal catodo. Se tale carica impiega un tempo  $dt$  per spostarsi dalla posizione  $x$  alla posizione  $x + dx$ , dalle relazioni (3.1) e (3.32) la corrispondente corrente risulterà pari a:

<sup>7</sup> Tale processo è detto *emissione termoionica* e consiste nell'emissione indotta termicamente di particelle cariche, in questo caso elettroni, da un metallo riscaldato ad alta temperatura direttamente o indirettamente. L'emissione è causata dall'aumento di energia cinetica delle particelle legate, in misura tale da consentire il superamento delle forze che le vincolano al materiale. In assenza di campi esterni le particelle emesse tenderanno a disporsi in prossimità della superficie emettitrice che si caricherà, di conseguenza, di una carica opposta in segno ma pari in modulo alla carica totale delle particelle emesse.

$$I = \frac{dq}{dt} = \frac{\rho(x)S dx}{dt} = S\rho(x)\frac{dx}{dt} = S\rho(x)v(x) = S\rho(x)\sqrt{\frac{2eV(x)}{m_e}};$$

si osservi che siccome le cariche che originano la densità  $\rho(x)$  sono elettroni, questa corrente è negativa. Da tale relazione è possibile dedurre la densità della carica degli elettroni:



Diodo a vuoto per alta tensione (Silverton)

$$\rho(x) = -\frac{I}{S\sqrt{\frac{2eV(x)}{m_e}}} = -\frac{I}{S}\sqrt{\frac{m_e}{2e}}V^{-1/2}(x).$$

Sostituendo tale valore nell'espressione dell'equazione di Poisson per tale sistema si perviene all'equazione differenziale non lineare del secondo ordine:

$$\frac{d^2V(x)}{dx^2} = -\frac{\rho(x)}{\epsilon_0} = -\frac{I}{S\epsilon_0}\sqrt{\frac{m_e}{2e}}V^{-1/2}(x) = \kappa V^{-1/2}(x), \quad (3.33)$$

dove  $\kappa$  è la costante positiva definita come:

$$\kappa \equiv -\frac{I}{S\epsilon_0}\sqrt{\frac{m_e}{2e}}.$$

Per risolvere l'equazione (3.33) moltiplichiamo ambo i membri per  $dV/dx$  (sottintendiamo per comodità di scrittura le dipendenze dalla variabile  $x$ ) ottenendo così:

$$\frac{dV}{dx}\frac{d^2V}{dx^2} = \kappa V^{-1/2}\frac{dV}{dx},$$

ovvero:

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 = 2\kappa\frac{dV}{dx}(V^{1/2}).$$

Integrando si ottiene:

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 = 4\kappa V^{1/2} + C, \quad (3.34)$$

dove  $C$  è una costante arbitraria; poiché per ipotesi il potenziale  $V$  è nullo in corrispondenza dell'origine, ponendo  $x$  uguale a zero nella precedente espressione si ottiene:

$$C = \left(\frac{dV(0)}{dx}\right)^2 - 4\kappa V^{1/2}(0) = \left(\frac{dV(0)}{dx}\right)^2 = [-E(0)]^2 = 0.$$

Pertanto, sostituendo nella (3.34) e stabilendo la radice quadrata di ambo i membri, si ha:

$$\frac{dV}{dx} = 2\kappa^{1/2}V^{1/4};$$

tale equazione può essere risolta per separazione di variabili ottenendo:

$$\frac{4}{3}V^{3/4} = 2\kappa^{1/2}x,$$



Simbolo elettrico del diodo a vuoto; i terminali  $A$  e  $K$  indicano rispettivamente l'anodo ed il catodo,  $F_1$  e  $F_2$  sono i morsetti per l'alimentazione del filamento resistivo.



da cui segue infine:

$$V(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^{4/3} \kappa^{2/3} x^{4/3}.$$

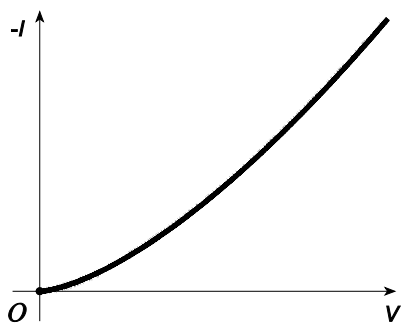
In corrispondenza dell'anodo  $x$  vale  $d$  e la differenza di potenziale  $V(x)$  vale  $V_0$ , pertanto in tale posizione la precedente espressione assume la forma:

$$V_0 = \left(\frac{3}{2}\right)^{4/3} \kappa^{2/3} d^{4/3} = \left(\frac{3d}{2}\right)^{4/3} \left(-\frac{I}{S\epsilon_0} \sqrt{\frac{m_e}{2e}}\right)^{2/3},$$

da cui segue:

$$I = -\frac{4S\epsilon_0}{9d^2} \sqrt{\frac{2e}{m_e}} V_0^{3/2}. \tag{3.35}$$

Questa relazione che lega la corrente alla differenza di potenziale ai capi di un diodo a vuoto fu stabilita dal chimico fisico Irving Langmuir nel 1913, sebbene già dedotta dal fisico Clement Dexter Child nel 1911 in uno studio differente; per tale motivo la (3.35) è detta *legge di Langmuir-Child*. Sebbene in questa derivazione si sia assunto, per semplicità, che l'anodo e il catodo fossero due elettrodi piani e paralleli, tale geometria nella pratica è scarsamente adoperata; in genere questi elettrodi sono costituiti da cilindri concentrici in cui il catodo, situato all'interno dell'anodo, è riscaldato



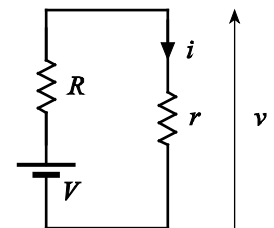
indirettamente facendo passare una corrente attraverso un opportuno filamento resistivo situato al suo interno. Tuttavia è possibile dimostrare che, indipendentemente dalla geometria degli elettrodi, la corrente  $I$  è funzione della differenza di potenziale  $V_0$  in maniera analoga a quanto espresso dalla (3.35), cioè:

$$I = -G V_0^{3/2}, \tag{3.36}$$

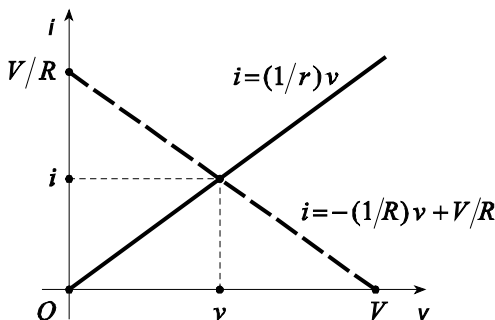
purché si possa trascurare la velocità iniziale degli elettroni emessi dal catodo. In figura è mostrata la rappresentazione grafica della relazione (3.36), che prende il nome di *caratteristica del diodo a vuoto*.

**Esempio:** (*retta di carico*) La determinazione della corrente attraverso il carico resistivo  $r$  e della differenza di potenziale ai capi di tale carico nel circuito di figura possono essere effettuate attraverso un procedimento grafico. Dall'applicazione della legge di Kirchhoff per le tensioni al circuito considerato segue:

$$V - v = Ri$$



dove  $v = ri$ . Tale relazione può esprimersi attraverso il sistema di equazioni:



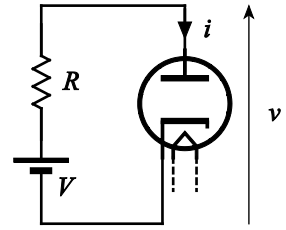
$$\begin{cases} i = -\frac{1}{R}v + \frac{V}{R} \\ i = \frac{1}{r}v \end{cases}$$

che può essere risolto graficamente rappresentando nello stesso piano  $iv$  le equazioni  $i = (1/r)v$  e  $i = -(1/R)v + V/R$  e determinando la loro intersezione. I valori di corrente  $i$  e tensione  $v$  corrispondenti all'intersezione, che prende il nome di *punto di lavoro* del circuito, costituiscono la soluzione cercata:

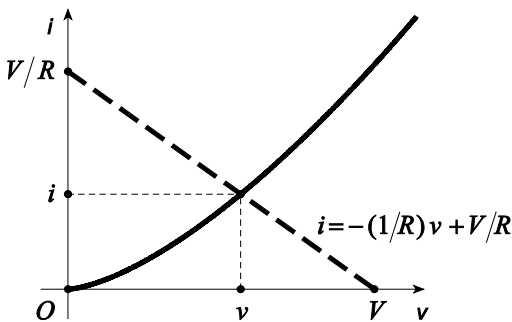
$$i = \frac{V}{R+r},$$

$$v = \frac{Vr}{R+r}.$$

La retta descritta dall'equazione  $i = -(1/R)v + V/R$  è denominata *retta di carico*. Questo approccio risulta particolarmente efficace qualora la relazione che lega la corrente  $i$  alla tensione  $v$  del carico collegato alla serie tra il generatore di forza elettromotrice  $V$  e la resistenza  $R$  non sia nota analiticamente. Consideriamo ad esempio il circuito di figura in cui la resistenza  $r$  sia stata sostituita da un diodo a vuoto, la cui relazione che lega la corrente  $i$  che lo attraversa con la differenza di potenziale  $v$  ai suoi capi sia nota solo in forma grafica (il circuito di alimentazione del filamento è omesso per semplicità). L'applicazione di questo metodo corrisponde a risolvere graficamente il sistema di equazioni:



$$\begin{cases} i = -\frac{1}{R}v + \frac{V}{R} \\ i = f(v) \end{cases}$$



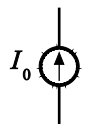
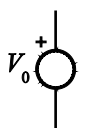
in cui  $i = f(v)$  indica l'equazione del diodo, nota solo in forma grafica. L'intersezione tra la caratteristica corrente-tensione del diodo con la retta di carico consente di stabilire il punto di lavoro del circuito. Si osservi che la retta di carico del circuito può essere tracciata rapidamente in quanto l'intersezione con l'asse orizzontale è rappresentata dal valore della tensione  $v$  ai capi del carico quando questo è sostituito da un circuito aperto e l'intersezione con l'asse verticale è costituita dal valore della corrente  $i$  che attraversa il circuito quando il carico è sostituito con un cortocircuito.

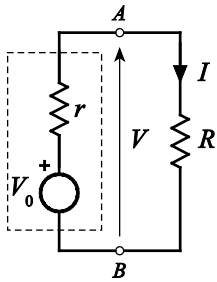
### 3.9 Generatori di tensione e di corrente

Per la descrizione di circuiti elettrici complessi risulta opportuno introdurre il concetto di *generatore ideale*, ovvero di un dispositivo in grado di stabilire la differenza di potenziale tra due punti o la corrente attraverso un ramo, rispettivamente, in maniera indipendente dalla rete situata tra i punti o dalla rete disposta lungo il ramo.

Si definisce *generatore ideale di tensione* un dispositivo che mantiene costante la differenza di potenziale  $V_0$  ai suoi morsetti, indipendentemente dalla corrente erogata. Questo dispositivo, pertanto, coincide col generatore elettrico già introdotto, nella circostanza in cui la sua resistenza interna sia nulla. In figura è rappresentato il simbolo adoperato per il generatore ideale di tensione; il segno rappresenta quale dei due morsetti è al potenziale maggiore; in principio tale simbolo è alternativo a quello del generatore elettrico, tuttavia, per consuetudine, mentre il simbolo del generatore ideale di tensione viene adoperato sia che la forza elettromotrice  $V_0$  dipenda dal tempo, sia che risulti costante, il simbolo del generatore elettrico viene adoperato solo per rappresentare un generatore di forza elettromotrice costante, come, ad esempio, una batteria.

Si definisce *generatore ideale di corrente* un dispositivo che eroga una corrente costante  $I_0$ , indipendentemente dalla differenza di potenziale ai suoi morsetti. Pertanto, se applicato ad una resistenza, un generatore ideale di corrente mantiene costante la corrente che attraversa la resistenza, a prescindere dal suo valore. In figura è mostrato il simbolo adoperato per il generatore ideale di corrente, la freccia indica il verso della corrente erogata.

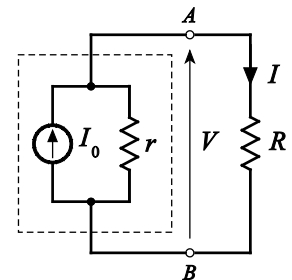




Facendo uso di un generatore ideale è possibile schematizzare un generatore reale. Un generatore reale di tensione determina una differenza di potenziale ai suoi capi dipendente dalle condizioni di carico; ciò può essere descritto rappresentando tale generatore con la serie di un generatore ideale di tensione con la sua resistenza interna  $r$ . In corrispondenza dell'applicazione di tale generatore ad un carico costituito da una resistenza  $R$ , la differenza di potenziale tra i morsetti del generatore vale:

$$V = V_0 \frac{R}{R+r} = V_0 \frac{1}{1 + \frac{r}{R}},$$

pertanto il generatore reale di tensione si comporta come un generatore ideale nel limite  $R \gg r$ , cioè nella condizione in cui la resistenza di carico è molto maggiore della resistenza interna del generatore. Un generatore reale di corrente eroga una corrente dipendente dalle condizioni di carico; tale dispositivo può essere descritto rappresentando questo generatore con il parallelo di un generatore ideale di corrente con la sua resistenza interna  $r$ . In corrispondenza dell'applicazione di questo generatore ad un carico costituito da una resistenza  $R$ , la corrente erogata al carico vale:



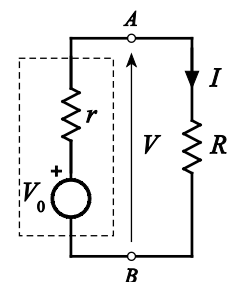
$$I = I_0 \frac{r}{r+R} = I_0 \frac{1}{1 + \frac{R}{r}},$$

pertanto il generatore reale di corrente si comporta come un generatore ideale nel limite  $R \ll r$ , cioè nella condizione in cui la resistenza di carico è molto minore della resistenza interna del generatore.

**Esempio: (teorema di Norton)** Così come il teorema di Thévenin consente di schematizzare la rete compresa tra due morsetti come la serie di un generatore di forza elettromotrice con una resistenza, ovvero con un generatore reale di tensione, attraverso il *teorema di Norton*, proposto da Edward Lawry Norton nel 1926 e considerato duale del teorema di Thévenin, è possibile schematizzare la rete compresa tra due morsetti come il parallelo di un generatore ideale di corrente  $I_E$  con una resistenza  $R_E$ , ovvero con un generatore reale di corrente. La corrente  $I_E$  rappresenta la corrente che attraversa il ramo che si ottiene collegando i due morsetti tra loro (*corrente di cortocircuito*). La resistenza  $R_E$  si valuta con la stessa procedura del teorema di Thévenin, cioè applicando ai due morsetti una differenza di potenziale  $V$  e stabilendo la corrente erogata  $I$  dopo aver sostituito i generatori presenti nella rete con le proprie resistenze interne, risulta allora  $R_E = V/I$ . Si noti che sia nel caso del teorema di Thévenin che per il teorema di Norton, qualora la rete contenga generatori ideali, la determinazione della resistenza  $R_E$  richiede, in particolare, che i generatori ideali di tensione vengano sostituiti con dei cortocircuiti mentre i generatori ideali di corrente vengano sostituiti da rami aperti. La dimostrazione del teorema di Norton procede in maniera analoga a quella proposta per il teorema di Thévenin.

**Esempio:** I teoremi di Thévenin e di Norton consentono di mettere in luce l'equivalenza tra le due rappresentazioni di un generatore elettrico. Infatti, se si applica il teorema di Norton alla sinistra dei morsetti  $AB$  del circuito di figura, si trova la corrente di cortocircuito  $I_0$  data dalla relazione:

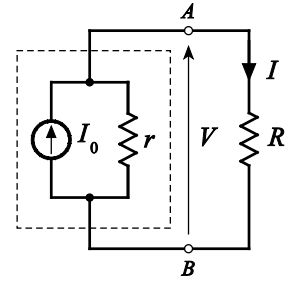
$$I_0 = \frac{V_0}{r}$$



e la resistenza equivalente  $r$ . Pertanto tale rete può essere schematizzata come mostrato in figura. Analogamente, applicando il teorema di Thévenin a sinistra dei morsetti  $AB$  di questo circuito, si trova che la differenza di potenziale tra i morsetti vale:

$$V_0 = rI_0.$$

e la resistenza equivalente vale  $r$ . Ne segue che le due rappresentazioni sono equivalenti e l'uso di una o dell'altra è solo questione di opportunità.



### 3.10 Circuiti in regime quasi stazionario

La descrizione dei circuiti attraverso le leggi di Kirchhoff è consentita dal fatto che i circuiti considerati si trovano nel regime stazionario definito attraverso la relazione (3.7). Sebbene l'analisi dei circuiti in regime non stazionario risulti generalmente piuttosto complessa ed esuli dalle finalità di questo corso, è possibile perseguire lo studio dei circuiti in condizioni tali che ad ogni istante le correnti, benché di intensità variabile, possano continuare ad essere ritenute costanti e di valore pari a quello che avrebbero nelle condizioni stazionarie in cui i campi elettromotori che le originano assumerebbero gli stessi valori che assumono nel caso in esame all'istante considerato. Ciò corrisponde a ritenere che le correnti in seno ai circuiti varino in maniera sufficientemente lenta da consentire a tutto il conduttore il raggiungimento, ad ogni istante, delle condizioni proprie del regime di funzionamento stazionario. In questa situazione il conduttore è detto in regime *quasi stazionario*. Naturalmente la trattazione che segue sarà applicabile nelle circostanze in cui tale assunzione risulti legittima, ovvero ogni volta che sia possibile assumere che le correnti nei circuiti siano praticamente costanti, relativamente al tempo necessario affinché si redistribuiscono sulla superficie del conduttore gli eventuali addensamenti locali di carica.

**Esempio:** Consideriamo un conduttore omogeneo e isotropo originariamente in equilibrio stazionario, ossia tale che la densità di carica  $\rho$  ed il campo elettrico  $\vec{E}$  al suo interno siano nulli. Supponiamo che per  $t = 0$  venga situata una certa carica nel conduttore, in modo che la densità di carica interna non sia più nulla e, in particolare, risulti pari a  $\rho_0$ . Stabiliamo dopo quanto tempo questo eccesso di carica si distribuisce sulla superficie del conduttore in maniera tale che si raggiunga la condizione di stazionarietà. Dalle relazioni (3.6) e (3.10), si ha:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \vec{\nabla} \cdot (\sigma \vec{E}) = \sigma \vec{\nabla} \cdot \vec{E}$$

dove l'ultimo passaggio segue dall'omogeneità del materiale che costituisce il conduttore. D'altra parte, siccome  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\varepsilon$ , dove  $\varepsilon$  è la costante dielettrica del conduttore, si ha:

$$-\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sigma \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \rho.$$

Posto:

$$\tau \equiv \frac{\varepsilon}{\sigma},$$

integrando l'espressione precedente, risulta:

$$\int_{\rho_0}^{\rho} \frac{1}{\xi} d\xi = -\frac{1}{\tau} \int_0^t d\zeta,$$

da cui segue:

$$\rho = \rho_0 e^{-t/\tau}.$$

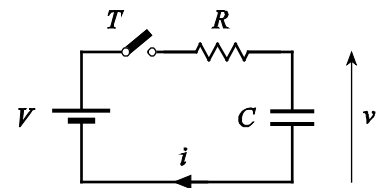
Il tempo  $\tau$  prende il nome di *tempo di rilassamento* e rappresenta il tempo necessario affinché la carica interna al conduttore si riduca di un fattore pari a  $1/e$  (il 37 % circa) rispetto al valore iniziale. Per un conduttore perfetto, in cui la conducibilità  $\sigma$  è infinita, il tempo di rilassamento è nullo. Per il rame,  $\varepsilon$  è praticamente uguale a  $\varepsilon_0 \approx 8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$  e  $\sigma \approx 5.8 \times 10^7 (\Omega m)^{-1}$ , così  $\tau \approx 1.5 \times 10^{-19} \text{ s}$ . D'altra parte, per il quarzo fuso il tempo di rilassamento è di 10 giorni circa. Dopo un tempo pari a qualche costante di tempo da quando è stata introdotta la carica nel conduttore, la carica netta ed il campo elettrico nel conduttore possono essere ritenuti praticamente nulli.

L'esempio precedente mostra come, per materiali che siano buoni conduttori elettrici l'approssimazione di quasi stazionarietà possa ritenersi soddisfacente in numerosi casi di interesse fisico. Questo implica, ad esempio, che la corrente attraverso ogni sezione di uno stesso ramo è, istante per istante, la stessa; d'altra parte, poiché i segnali elettrici si propagano attraverso i rami ad una velocità finita e prossima a quella della luce nel vuoto, di circa  $3 \times 10^8 \text{ m/s}$ , ai fini della descrizione dei circuiti con correnti variabili nel tempo facendo uso delle leggi proprie dei circuiti in regime stazionario occorrerà, inoltre, assumere che la variazione della corrente in seno a ciascun ramo avvenga in un tempo trascurabile relativamente al tempo impiegato dalla luce a percorrere la lunghezza totale del ramo in esame.

### 3.11 Carica e scarica di un condensatore

Consideriamo il circuito di figura in cui il condensatore  $C$  è inizialmente scarico; supponiamo che all'istante iniziale  $t=0$  l'interruttore  $T$  venga chiuso; applicando la seconda legge di Kirchhoff al circuito in esame, si ha:

$$V - v(t) = Ri(t), \quad (3.37)$$



in cui  $V$  indica la forza elettromotrice erogata dal generatore e  $v(t)$  la differenza di potenziale ai capi del condensatore. Dal principio di conservazione della carica segue che la variazione  $dq$  della carica  $q(t)$  presente sulle armature del condensatore, che si manifesta nel tempo  $dt$ , è pari alla carica  $i(t)dt$  che attraversa la resistenza  $R$ :

$$dq = i(t)dt; \quad (3.38)$$

si noti che il segno della variazione  $dq$  è positivo in quanto al passaggio della carica  $i(t)dt$  nella resistenza corrisponde un aumento della carica sulle armature del condensatore. Poiché:

$$v(t) = \frac{q(t)}{C}, \quad (3.39)$$

sostituendo nella relazione (3.37) e, facendo uso della (3.38), si ha:

$$V - \frac{q}{C} = R \frac{dq}{dt}.$$

Separando le variabili e integrando, si ha:

$$\int_0^q \frac{d\xi}{\xi - CV} = -\frac{1}{RC} \int_0^t d\zeta,$$

posto:

$$\tau \equiv RC, \quad (3.40)$$

segue:

$$-\frac{t}{\tau} = \ln\left(\frac{q - CV}{-CV}\right),$$

da cui si ha:

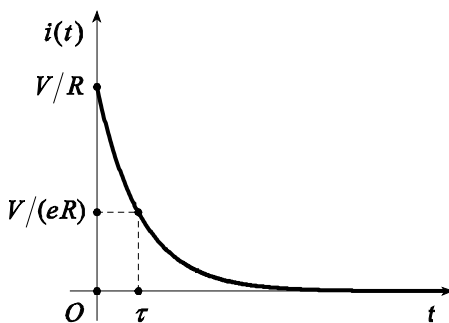
$$q(t) = CV(1 - e^{-t/\tau}). \quad (3.41)$$

Facendo uso della relazione (3.39) è possibile ricavare la legge di variazione della differenza di potenziale ai capi del condensatore:

$$v(t) = V(1 - e^{-t/\tau}).$$

La quantità  $\tau$  ha le dimensioni di un tempo e prende il nome di *costante di tempo* del circuito e rappresenta il tempo, misurato rispetto all'istante iniziale, in corrispondenza del quale la differenza di potenziale ai capi del condensatore risulta inferiore di  $1/e$  volte rispetto al suo valore massimo. L'espressione della corrente attraverso la resistenza può essere ricavata dalla (3.41) attraverso la relazione (3.38):

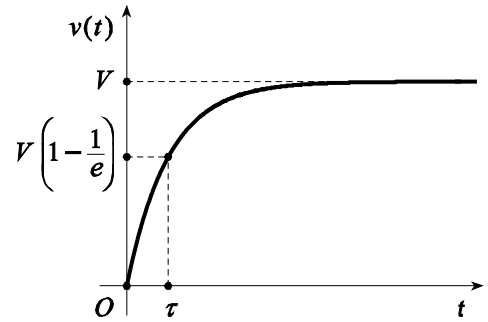
$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{CV}{\tau} e^{-t/\tau} = \frac{CV}{RC} e^{-t/\tau} = \frac{V}{R} e^{-t/\tau};$$



si noti che la corrente all'istante iniziale  $t=0$  vale  $V/R$ , ovvero è pari alla corrente che circolerebbe nel circuito qualora il condensatore fosse sostituito da un cortocircuito, d'altra parte, per  $t=0$ , dalla (3.41) segue  $q(t)=0$  e, di conseguenza, dalla (3.39), anche  $v(t)=0$ . Qualora il condensatore possedesse, all'istante iniziale, una carica non nulla, ossia  $q(0) \equiv q_0$ , l'integrazione dell'equazione (3.37) si effettuerebbe nella maniera seguente:

$$\int_{q_0}^q \frac{d\xi}{\xi - CV} = -\frac{1}{RC} \int_0^t d\zeta,$$

da cui segue:



$$q(t) = CV + (q_0 - CV)e^{-t/\tau}.$$

Indicando con  $v_0$  la differenza di potenziale presente all'istante iniziale tra le armature del condensatore:

$$v_0 \equiv \frac{q_0}{C} \quad (3.42)$$

la differenza di potenziale ai capi del condensatore in un istante generico, si scrive:

$$v(t) = V + (v_0 - V)e^{-t/\tau}.$$

Nell'ipotesi in cui il condensatore sia originariamente scarico, l'energia  $U$  erogata dal generatore nel processo di carica vale:

$$U = \int_0^{\infty} p(t) dt = \int_0^{\infty} Vi(t) dt = \frac{V^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-t/\tau} dt = CV^2;$$

al termine del processo di carica, metà di questa energia diventa energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore:

$$U_e = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2} Cv^2(t) = \frac{1}{2} CV^2 \lim_{t \rightarrow \infty} (1 - e^{-t/\tau})^2 = \frac{1}{2} CV^2,$$

e l'altra metà risulta dissipata per effetto Joule nella resistenza, cioè, facendo uso della relazione (3.21), si ha:

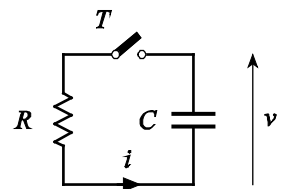
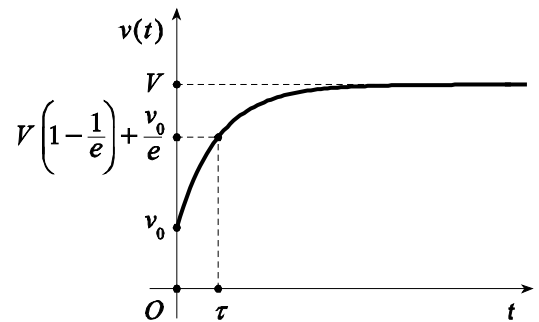
$$U_J = \int_0^{\infty} Ri^2(t) dt = \int_0^{\infty} R \frac{V^2}{R^2} e^{-2t/\tau} dt = \frac{V^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-2t/\tau} dt = \frac{1}{2} CV^2.$$

Consideriamo il circuito di figura in cui il condensatore  $C$  è inizialmente carico, ossia  $q(0) \equiv q_0$ , nell'istante in cui l'interruttore  $T$  viene chiuso; applicando la seconda legge di Kirchhoff al circuito in esame, si ha:

$$v(t) = Ri(t),$$

d'altra parte, valendo ancora la relazione (3.39), risulta:

$$\frac{q(t)}{C} = Ri(t). \quad (3.43)$$



Nel tempo  $dt$  la resistenza è attraversata da una carica  $i(t)dt$ , dal principio di conservazione della carica segue che tale quantità deve rappresentare anche la diminuzione della carica  $q(t)$  posseduta dal condensatore, cioè:

$$-dq = i(t)dt,$$

pertanto, sostituendo nella relazione (3.43), si ha:

$$-\frac{q}{C} = R \frac{dq}{dt}.$$

Posto  $\tau$  come dalla (3.40), separando le variabili e integrando, segue:

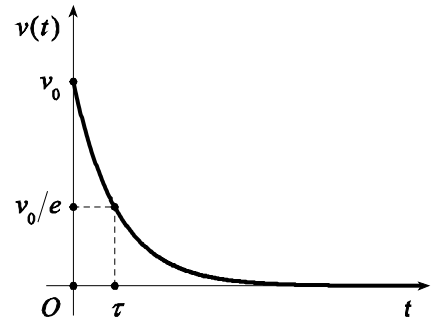
$$\int_{q_0}^q \frac{d\xi}{\xi} = -\frac{1}{\tau} \int_0^t d\zeta,$$

ovvero:

$$-\frac{t}{\tau} = \ln\left(\frac{q}{q_0}\right),$$

cioè:

$$q(t) = q_0 e^{-t/\tau}.$$

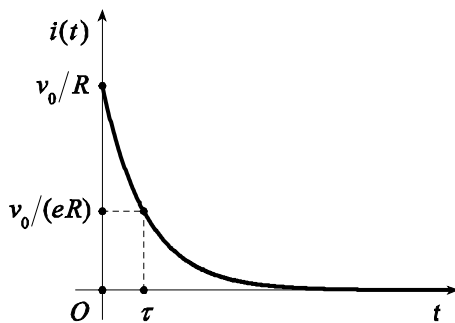


Facendo uso della (3.39), ossia dividendo ambo i membri della precedente espressione per  $C$ , si trova l'andamento della differenza di potenziale ai capi del condensatore:

$$v(t) = v_0 e^{-t/\tau},$$

in cui  $v_0$ , la differenza di potenziale presente all'istante iniziale tra le armature del condensatore, è definita come nella (3.42). Dalla (3.43), infine, è possibile determinare l'andamento della corrente attraverso la resistenza:

$$i(t) = \frac{v_0}{R} e^{-t/\tau}.$$



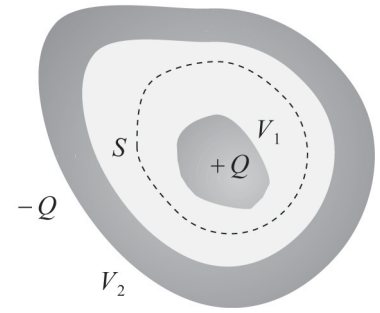
A partire da questa espressione e facendo uso della (3.21), si può stabilire l'energia dissipata nella resistenza a partire dall'istante in cui si chiude il tasto  $T$ :

$$U_J = \int_0^{\infty} R i^2(t) dt = \int_0^{\infty} R \frac{v_0^2}{R^2} e^{-2t/\tau} dt = \frac{v_0^2}{R} \int_0^{\infty} e^{-2t/\tau} dt = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{C};$$

tale quantità risulta pari all'energia elettrostatica immagazzinata nel condensatore all'istante iniziale.



**Esempio:** Consideriamo un condensatore di capacità  $C$  le cui armature siano una completamente racchiusa dall'altra e la cui regione compresa tra le armature sia riempita da un materiale dielettrico di costante dielettrica  $\varepsilon$  e resistività  $\rho$ ; siano  $V_1$  e  $+Q$  rispettivamente il potenziale e la carica dell'armatura interna e  $V_2$  e  $-Q$  rispettivamente il potenziale e la carica dell'armatura esterna. Applicando la Legge di Gauss ad una superficie chiusa  $S$  compresa tra le armature e contenente il conduttore a potenziale  $V_1$  è possibile esprimere la carica  $Q$  attraverso il flusso del campo elettrico  $\vec{E}$  attraverso  $S$ :



$$Q = \varepsilon \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s},$$

pertanto la capacità  $C$  si scrive:

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \varepsilon \frac{1}{V_1 - V_2} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

D'altra parte dalle relazioni (3.4) e (3.10) la corrente che attraversa il dielettrico vale:

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s} = \sigma \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{1}{\rho} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

così, facendo il rapporto membro a membro tra queste ultime due equazioni, si ha:

$$\frac{C}{I} = \rho \varepsilon \frac{1}{V_1 - V_2}.$$

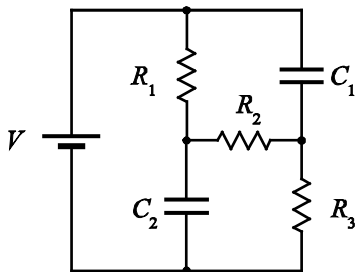
Infine, indicando con  $R$  la resistenza  $(V_1 - V_2)/I$  si ha:

$$RC = \rho \varepsilon,$$

ovvero dalla (3.40):

$$\tau = \rho \varepsilon,$$

quindi, sebbene sia la capacità del condensatore che la resistenza offerta dal dielettrico al passaggio della corrente dipendano dalla geometria dei conduttori che costituiscono le armature, il loro prodotto, cioè la costante di tempo  $\tau$  non ne dipende.



**Esempio:** Consideriamo il circuito di figura in cui  $R_1$  vale  $1\text{ k}\Omega$ ,  $R_2$  e  $R_3$  valgono entrambe  $2\text{ k}\Omega$ ,  $C_1$  vale  $1\text{ }\mu\text{F}$ ,  $C_2$  vale  $2\text{ }\mu\text{F}$  ed il generatore eroga una forza elettromotrice  $V$  di  $10\text{ V}$ ; stabiliamo le cariche  $q_1$  e  $q_2$  presenti sulle armature dei due condensatori all'equilibrio. In tale condizione, poiché i rami contenenti i condensatori non sono attraversati da corrente, la corrente erogata dal generatore vale:

$$I = \frac{V}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{10\text{ V}}{1\text{ k}\Omega + 2\text{ k}\Omega + 2\text{ k}\Omega} = 2\text{ mA},$$

così le differenze di potenziale ai capi di ciascun condensatore valgono rispettivamente:

$$V_1 = I(R_1 + R_2) = 2\text{ mA} \times (1\text{ k}\Omega + 2\text{ k}\Omega) = 6\text{ V},$$

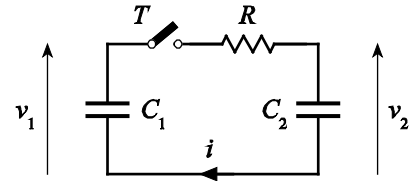
$$V_2 = I(R_2 + R_3) = 2\text{ mA} \times (1\text{ k}\Omega + 2\text{ k}\Omega) = 8\text{ V},$$

da cui segue:

$$q_1 = C_1 V_1 = 1 \mu F \times 6 V = 6 \mu C ,$$

$$q_2 = C_2 V_2 = 2 \mu F \times 8 V = 16 \mu C ,$$

**Esempio:** Nel circuito di figura, il condensatore  $C_1$  di  $2 \mu F$ , inizialmente caricato alla tensione di  $200 V$ , per effetto della chiusura dell'interruttore  $T$  all'istante  $t = 0$  viene collegato alla serie costituita dalla resistenza  $R$  di  $10 k\Omega$  e dal condensatore  $C_2$  di  $4 \mu F$ , inizialmente scarico. Stabiliamo la differenza di potenziale presente tra le armature di  $C_2$ ,  $5 ms$  dopo la chiusura dell'interruttore. Applicando la seconda legge di Kirchhoff alla maglia che si ottiene alla chiusura dell'interruttore, si ha:



$$v_1(t) - v_2(t) = Ri(t)$$

ossia, se  $q_1(t)$  e  $q_2(t)$  sono rispettivamente le cariche al tempo  $t$  sui condensatori  $C_1$  e  $C_2$ :

$$\frac{q_1(t)}{C_1} - \frac{q_2(t)}{C_2} = Ri(t).$$

Derivando ambo i membri rispetto al tempo, si trova:

$$\frac{1}{C_1} \frac{dq_1}{dt} - \frac{1}{C_2} \frac{dq_2}{dt} = R \frac{di}{dt}. \quad (3.44)$$

Col verso scelto, la corrente  $i(t)$  è pari a  $dq_2/dt$ :

$$i = \frac{dq_2}{dt}, \quad (3.45)$$

inoltre, dal principio di conservazione della carica risulta:

$$dq_1 = -dq_2,$$

da cui segue l'identità  $dq_1/dt = -dq_2/dt$ , pertanto la relazione (3.44) diventa:

$$\frac{1}{C_1} (-i) - \frac{1}{C_2} i = R \frac{di}{dt},$$

da cui, posto:

$$C_E \equiv \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} \approx 1.33 \mu F ,$$

risulta:

$$\frac{di}{dt} = -\frac{1}{RC_E} i.$$

In corrispondenza dell'istante iniziale il condensatore  $C_2$  è scarico, per cui si comporta come un cortocircuito, cioè risulta  $q_2(0) = 0$  e di conseguenza  $v_2(0) = 0$ , pertanto la corrente  $i(t)$  in tale istante vale  $v_1(0)/R$  così, integrando la precedente equazione:

$$\int_{\frac{v_1(0)}{R}}^i \frac{d\xi}{\xi} = -\frac{1}{RC_E} \int_0^t d\xi,$$

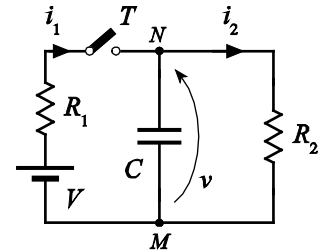
si ha:

$$i(t) = \frac{v_1(0)}{R} e^{-t/RC_E}.$$

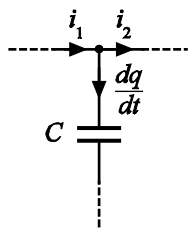
Infine, nota l'espressione della corrente  $i(t)$ , è possibile sostituirla nella relazione (3.45) per ricavare  $q_2(t)$  e, di conseguenza  $v_2(t)$ :

$$\begin{aligned} v_2(t) &= \frac{q_2(t)}{C_2} = \frac{1}{C_2} \int_0^t i(\xi) d\xi = \frac{1}{C_2} \int_0^t \frac{v_1(0)}{R} e^{-\xi/RC_E} d\xi = v_1(0) \frac{C_1}{C_1 + C_2} (1 - e^{-t/RC_E}) = \\ &= 200V \times \frac{2 \mu F}{2 \mu F + 4 \mu F} \left( 1 - e^{-\frac{5ms}{10k\Omega \times 1.33\mu F}} \right) \approx 20,9V. \end{aligned}$$

**Esempio:** Nel circuito di figura stabiliamo la legge di variazione della differenza di potenziale  $v(t)$  ai capi del condensatore  $C$  a partire dall'istante iniziale in cui viene chiuso il tasto  $T$ . Il circuito presenta due nodi e tre rami, quindi si avranno una equazione ai nodi e due alle maglie. In corrispondenza del nodo  $N$ , indicando con  $dq(t)/dt$  la corrente che scorre nel ramo contenente il condensatore, risulta:



$$i_1(t) - i_2(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{d}{dt} C v(t) = C \frac{dv(t)}{dt}; \tag{3.46}$$



assumendo quale verso di percorrenza delle due maglie scelte quello orario, le due equazioni corrispondenti sono:

$$V - v(t) = R_1 i_1(t), \tag{3.47}$$

$$v(t) = R_2 i_2(t). \tag{3.48}$$

Ricavando  $i_1(t)$  dalla (3.47) e  $i_2(t)$  dalla (3.48) e sostituendo nella (3.46), si ottiene:

$$\frac{V - v(t)}{R_1} - \frac{v(t)}{R_2} = C \frac{dv(t)}{dt},$$

da cui segue:

$$\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} C \frac{dv(t)}{dt} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V - v(t). \tag{3.49}$$

Posto quindi:

$$V_E \equiv \frac{R_2}{R_1 + R_2} V, \tag{3.50}$$

$$R_E \equiv \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}, \tag{3.51}$$

l'equazione (3.49) diventa:

$$R_E C \frac{dv(t)}{dt} = V_E - v(t),$$

che risulta formalmente uguale a quella relativa alla carica di un condensatore  $C$  ad una differenza di potenziale  $V_E$  attraverso una resistenza  $R_E$ , per cui, posto  $\tau_E \equiv R_E C$ , la soluzione  $v(t)$  è:

$$v(t) = V_E (1 - e^{-t/\tau_E}) \quad (3.52)$$

Si noti che tale problema poteva essere risolto più semplicemente applicando il teorema di Thévenin al ramo  $NM$ . Alla luce di questo teorema, una volta chiuso il tasto  $T$  la rete può essere schematizzata come mostrato in figura, per cui la legge di carica del condensatore sarà data dalla relazione (3.52). In questa schematizzazione, la forza elettromotrice  $V_E$  è la differenza di potenziale che si rileva, a tasto chiuso, tra i morsetti  $N$  e  $M$  col condensatore scollegato, ovvero il valore fornito dalla relazione (3.50); la resistenza equivalente  $R_E$  è quella compresa tra i morsetti  $N$  e  $M$ , a tasto chiuso, quando il generatore di forza elettromotrice  $V$  è sostituito dal un cortocircuito, ovvero l'espressione indicata dalla relazione (3.51).

