# 6 DINAMICA DEI SISTEMI DI PUNTI MATERIALI

Consideriamo un sistema di $n$ punti materiali, con $n>1$, interagenti tra loro e con il resto dell'universo. Nello studio di un tale sistema risulta conveniente scomporre la forza agente sull' $i-$esimo punto nella somma della risultante delle *forze esterne* $\vec{F}_i^{(ext)}$ e quella delle forze esercitate sul punto da tutte le altre $n-1$ particelle $\vec{F}_i^{(int)}$, dette *forze interne*:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(int)} + \vec{F}_i^{(ext)}.$$

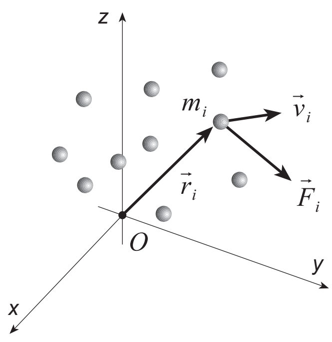
La distinzione tra forze interne ed esterne è totalmente arbitraria in quanto è possibile estrinsecare dal sistema di $n$ punti materiali uno di questi e considerare tra le forze esterne agenti sulle $n-1$ restanti particelle del sistema, la forza esercitata su queste dal punto materiale separato. In accordo con la terza legge di Newton la forza $\vec{F}_{ij}$ che l'$i$-esimo punto del sistema esercita sul $j-$esimo punto è uguale ed opposta alla forza $\vec{F}_{ji}$ che il $j$-esimo punto esercita sull' $i-$esimo punto:

$$\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \qquad i,j=1,2,...,n \tag{6.1}$$

pertanto, benché la risultante delle forze interne agenti sull' $i$-esimo punto $\vec{F}_i^{(int)}$ è diversa da zero, la risultante di tutte le forze interne del sistema è nulla:

$$\vec{F}^{(int)} = \sum_i \vec{F}_i^{(int)} = \sum_{i\neq j} \vec{F}_{ij} = \vec{0}. \tag{6.2}$$

Naturalmente la terza legge di Newton si applica anche alle forze esterne, che però si esercitano tra i punti del sistema e tutti gli altri punti dell'universo. Fissato un sistema di riferimento inerziale, per l'$i$-esimo punto di vettore posizione $\vec{r}_i$, soggetto alla forza $\vec{F}_i$, definiamo la velocità $\vec{v}_i$ come:




$$\vec{v}_i \equiv \frac{d\vec{r}_i}{dt},$$

l'accelerazione $\vec{a}_i$ come:

$$\vec{a}_i = \frac{\vec{F}_i}{m_i} = \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2},$$

la quantità di moto $\vec{p}_i$:

$$\vec{p}_i \equiv m_i \vec{v}_i ,$$

l'energia cinetica $E_{k\,i}$:

$$E_{k\,i} \equiv \frac{1}{2} m_i v_i^2 ,$$

e il momento angolare $\vec{L}_i$ (rispetto all'origine $O$ del sistema di riferimento):

$$\vec{L}_i \equiv \vec{r}_i \times \left( m_i \vec{v}_i \right).$$

Inoltre è possibile definire delle grandezze dinamiche pertinenti all'intero sistema, quali la quantità di moto totale:

$$\vec{p} \equiv \sum_i \vec{p}_i = \sum_i m_i \vec{v}_i ,$$

il momento angolare totale rispetto ad un polo (ad esempio l'origine $O$):

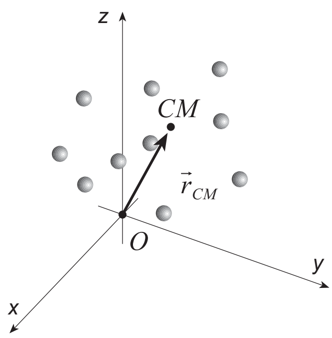
$$\vec{L} \equiv \sum_i \vec{L}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i ,$$

e l'energia cinetica totale

$$E_k \equiv \sum_i E_{k\,i} = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_i^2 .$$

## 6.1 Centro di massa di un sistema di punti

Si definisce *centro di massa* di un sistema di punti materiali il punto dello spazio il cui vettore posizione è pari a:




$$\vec{r}_{CM} \equiv \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{1}{m} \sum_i m_i \vec{r}_i \qquad (6.3)$$

dove

$$m \equiv \sum_i m_i \qquad (6.4)$$

è la massa totale del sistema. Qualora la velocità dei punti è diversa da zero, di conseguenza lo sarà anche la velocità del centro di massa:

$$\vec{v}_{CM} = \frac{d\vec{r}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{m}\sum_i m_i\vec{r}_i\right) = \frac{1}{m}\sum_i m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{1}{m}\sum_i m_i\vec{v}_i = \frac{1}{m}\vec{p},$$

cioè:

$$\vec{p} = m\vec{v}_{CM}, \tag{6.5}$$

ovvero la quantità di moto totale coincide con la quantità di moto $m\vec{v}_{CM}$ del centro di massa assimilato ad un punto materiale di massa pari alla massa totale del sistema (6.4), vettore posizione $\vec{r}_{CM}$ e velocità $\vec{v}_{CM}$. Analogamente l'accelerazione del centro di massa è:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}_{CM}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{1}{m}\sum_i m_i\vec{r}_i\right) = \frac{1}{m}\sum_i m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \frac{1}{m}\sum_i m_i\vec{a}_i .$$

Se il sistema di riferimento è inerziale, allora:

$$m_i\vec{a}_i = \vec{F}_i = \vec{F}_i^{(ext)} + \vec{F}_i^{(int)},$$

così:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{1}{m}\sum_i m_i\vec{a}_i = \frac{1}{m}\sum_i \left(\vec{F}_i^{(ext)} + \vec{F}_i^{(int)}\right) = \frac{1}{m}\sum_i \vec{F}_i^{(ext)} + \frac{1}{m}\sum_i \vec{F}_i^{(int)};$$

d'altra parte, dalla (6.2) la somma delle forze interne è nulla, allora:

$$\vec{a}_{CM} = \frac{1}{m}\sum_i \vec{F}_i^{(ext)}$$

e, posto:

$$\vec{F}^{(ext)} \equiv \sum_i \vec{F}_i^{(ext)},$$

segue:

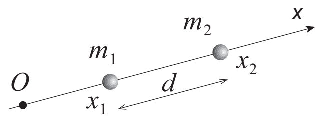
$$m\vec{a}_{CM} = \vec{F}^{(ext)}. \tag{6.6}$$

Tale relazione rappresenta l'espressione del *teorema del centro di massa* il quale afferma che in un sistema di riferimento inerziale il centro di massa si muove come un punto materiale di massa pari alla massa totale del sistema di punti sul quale è applicata la risultante delle forze esterne. Infine, dalle (6.5) e (6.6), se la massa $m$ è costante, si ha:

$$\vec{F}^{(ext)} = m\vec{a}_{CM} = m\frac{d\vec{v}_{CM}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{v}_{CM}\right) = \frac{d\vec{p}}{dt}.$$

Da questa relazione e dalla precedente segue quindi che il moto del centro di massa è determinato dalle sole forze esterne al sistema; al contrario le forze interne non possono modificare lo stato di moto del sistema. In particolare, se il sistema è isolato, dal principio di conservazione della quantità di moto segue che $\vec{p}$ è costante, quindi se il sistema è isolato, cioè su ciascuna particella che lo costituisce agiscono solo forze interne, il centro di massa si muove con velocità costante in qualsiasi sistema di riferimento inerziale.

**Esempio:** Consideriamo un sistema costituito da due punti, rispettivamente di massa $m_1$ e $m_2$, situati a distanza $d$ l'uno dall'altro. Considerando un sistema di riferimento con origine $O$ situata sulla retta congiungente i due punti; dalla (6.3) la posizione del centro di massa è:




$$x_{CM} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}$$

così, siccome $d = x_2 - x_1$, si ha

$$x_{CM} = x_1 + \frac{m_2}{m_1 + m_2} d$$

cioè, rispetto al centro di massa la posizione del punto di massa $m_1$ è:

$$x_{CM} - x_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} d;$$

indicando con $a$ e con $b$ rispettivamente le distanze dei punti di masse $m_1$ e $m_2$ dalla posizione del centro di massa, con:

$$a \equiv \frac{m_2}{m_1 + m_2} d,$$

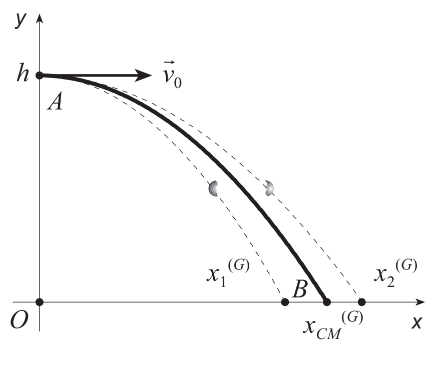
$$b \equiv \frac{m_1}{m_1 + m_2} d,$$

segue:

$$\frac{a}{b} = \frac{m_2}{m_1}$$

cioè il centro di massa è situato sul segmento compreso tra due masse ed è prossimo al corpo di massa maggiore. Ad esempio, nel sistema costituito dalla Terra e dal Sole, considerando che la massa del Sole è di $1.99 \times 10^{30}\ kg$ e quella della Terra è $6.0 \times 10^{24}\ kg$ e la reciproca distanza è di $1.5 \times 10^{11}\ m$, il centro di massa si trova a $4.5 \times 10^{5}\ m$ dal centro del Sole ossia, poiché il raggio solare è di $7 \times 10^{8}\ m$, il centro di massa è all'interno del Sole.

**Esempio:** Consideriamo un corpo di massa $m$ lanciato orizzontalmente da una quota $h$ con velocità $\vec{v}_0$ il quale, in volo, si rompe in due frammenti di masse $m_1$ e $m_2$. Tale rottura, essendo determinata da forze interne, non provoca alcuna variazione della traiettoria del centro di massa, così è possibile studiare il moto di tale punto con le leggi della cinematica:




$$x_{CM} = v_0 t,$$

$$y_{CM} = h - \frac{1}{2} g t^2.$$

Imponendo che sia $y_{CM} = 0$ è possibile stabilire la coordinata di impatto $x_{CM}^{(G)}$

del centro di massa; eliminando la variabile $t$ nelle equazioni precedenti, per $y_{CM} = 0$ segue $t = \sqrt{2h/g}$ e quindi:

$$x_{CM}^{(G)} = v_0 \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

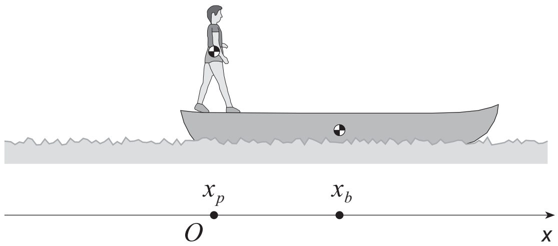
così, dalla (6.3), siccome la relazione tra $x_{CM}$ e le coordinate dei due frammenti è:

$$x_{CM} = \frac{1}{m}\left(m_1 x_1 + m_2 x_2\right),$$

segue che le corrispondenti coordinate di impatto sono:

$$x_1^{(G)} = \frac{m x_{CM}^{(G)} - m_2 x_2^{(G)}}{m_1},$$
$$x_2^{(G)} = \frac{m x_{CM}^{(G)} - m_1 x_1^{(G)}}{m_2}.$$

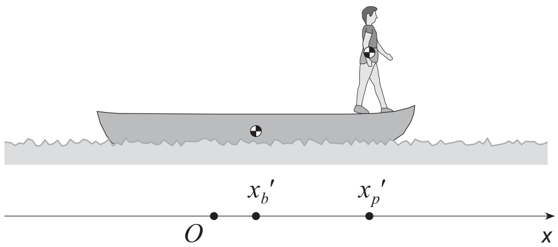
**Esempio:** Una persona di massa $m_p$ è posta ad un'estremità di una barca di massa $m_b$ e lunga $l$. La barca galleggia sulla superficie dell'acqua e, nel contatto tra la barca e l'acqua, l'attrito può essere considerato trascurabile. In accordo col sistema di riferimento indicato in figura, ad un certo istante la persona si sposta all'estremità opposta della barca. Stabiliamo l'ascissa $x_p'$ della persona nella seconda circostanza, relativamente al sistema di riferimento specificato. Nella situazione iniziale, siccome l'origine $O$ del sistema di riferimento coincide con la posizione $x_p$ della persona e supponendo che il centro di massa della barca sia nel suo centro geometrico, la posizione del centro di massa del sistema è:




$$x_{CM} = \frac{m_p x_p + m_b x_b}{m_p + m_b} = \frac{m_b}{m_p + m_b}\frac{l}{2}.$$

Quando la persona ha raggiunto l'altra estremità della barca, il centro di massa del sistema diventa:

$$x_{CM}' = \frac{m_p x_p' + m_b x_b'}{m_p + m_b},$$




dove $x_p' - x' = \frac{l}{2}$ quindi, sostituendo si ha:

$$x_{CM}' = x_p' - \frac{m_b}{m_p + m_b}\frac{l}{2}.$$

Poiché sul sistema non agiscono forze esterne, la posizione del centro di massa del sistema non deve essere variata, ossia $x_{CM}' \equiv x_{CM}$, cioè:

$$\frac{m_b}{m_p + m_b}\frac{l}{2} = x_p' - \frac{m_b}{m_p + m_b}\frac{l}{2},$$

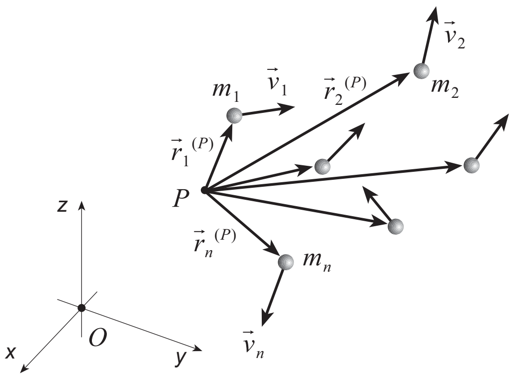
da cui segue:

$$x_p' = \frac{m_b}{m_p + m_b} l = 2 x_{CM}.$$

Quindi nel passaggio dalla condizione iniziale a quella finale, come la persona si sposta da un estremo all'altro, la barca retrocede in misura tale da conservare la posizione del centro di massa del sistema.

## 6.2 Momento angolare di un sistema di punti

Consideriamo un insieme di punti materiali di masse $m_1, m_2, ..., m_n$ e velocità $\vec{v}_1, \vec{v}_2, ..., \vec{v}_n$ rispetto ad un sistema di riferimento inerziale. Posto:




$$\vec{r}_i^{(P)} \equiv \vec{r}_i - \vec{r}_P,$$

il momento angolare del sistema rispetto al polo situato nel punto $P$ è:

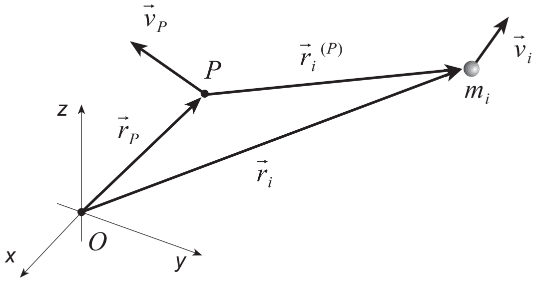
$$\vec{L} \equiv \sum_i \vec{r}_i^{(P)} \times (m_i \vec{v}_i);$$

derivando questa espressione rispetto al tempo si ha:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_i \left[ \frac{d\vec{r}_i^{(P)}}{dt} \times (m_i \vec{v}_i) + \vec{r}_i^{(P)} \times \left( m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} \right) \right]. \tag{6.7}$$

La derivata $d\vec{r}_i^{(P)} / dt$ è:

$$\frac{d\vec{r}_i^{(P)}}{dt} = \vec{v}_i - \vec{v}_P$$




dove $\vec{v}_i$ e $\vec{v}_P$ sono, rispettivamente, la velocità del punto di massa $m$ e del polo $P$ rispetto al sistema di riferimento specificato; inoltre, poiché il sistema di riferimento è inerziale, segue:

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = m_i \vec{a}_i = \vec{F}_i^{(ext)} + \vec{F}_i^{(int)},$$

quindi, sostituendo nella relazione (6.7), si ha:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}}{dt} &= \sum_i \vec{v}_i \times (m_i \vec{v}_i) - \sum_i \vec{v}_P \times (m_i \vec{v}_i) + \sum_i \vec{r}_i^{(P)} \times \vec{F}_i^{(ext)} + \sum_i \vec{r}_i^{(P)} \times \vec{F}_i^{(int)} = \\ &= -\vec{v}_P \times (m\vec{v}_{CM}) + \vec{\tau}^{(ext)} + \vec{\tau}^{(int)}; \end{aligned}$$

siccome $\vec{v}_i \times (m_i \vec{v}_i) = \vec{0}$ e per la (6.5), dove

$$\vec{\tau}^{(ext)} \equiv \sum_i \vec{r}_i^{(P)} \times \vec{F}_i^{(ext)}$$

è il momento delle forze esterne rispetto al polo $P$ e

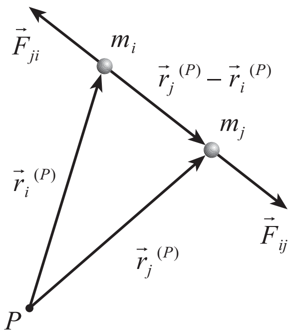
$$\vec{\tau}^{(int)} \equiv \sum_i \vec{r}_i^{(P)} \times \vec{F}_i^{(int)}$$

è il momento delle forze interne rispetto allo stesso polo. Relativamente ad una qualsiasi coppia di particelle $m_i$ e $m_j$ costituenti il sistema, se $\vec{F}_{ij}$ e $\vec{F}_{ji}$ sono, rispettivamente, le forze interne agenti su di esse, la somma dei corrispondenti momenti $\vec{\tau}_i^{(int)}$ e $\vec{\tau}_j^{(int)}$ vale:

$$\vec{\tau}_i^{(int)} + \vec{\tau}_j^{(int)} = \vec{r}_i^{(P)} \times \vec{F}_{ji} + \vec{r}_j^{(P)} \times \vec{F}_{ij} = \vec{r}_i^{(P)} \times \left(-\vec{F}_{ij}\right) + \vec{r}_j^{(P)} \times \vec{F}_{ij},$$

essendo, dalla (6.1), $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$, così risulta:

$$\vec{\tau}_i^{(int)} + \vec{\tau}_j^{(int)} = \left(\vec{r}_j^{(P)} - \vec{r}_i^{(P)}\right) \times \vec{F}_{ij};$$




d'altra parte, il vettore $\vec{r}_j^{(P)} - \vec{r}_i^{(P)}$ è parallelo a $\vec{F}_{ij}$, così la somma al primo membro è nulla. Siccome il momento totale delle forze interne di un sistema di particelle $\vec{\tau}^{(int)}$ è costituito dalla somma di tutti i possibili termini $\vec{\tau}_i^{(int)} + \vec{\tau}_j^{(int)}$, ne segue che indipendentemente dal polo scelto risulta:

$$\vec{\tau}^{(int)} = \vec{0}. \tag{6.8}$$

Pertanto la derivata del momento angolare vale:

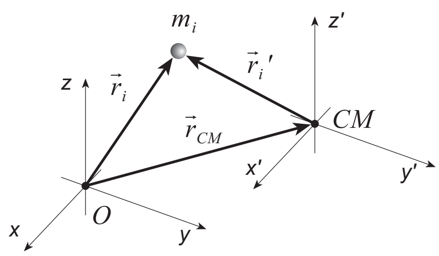
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = -\vec{v}_P \times \left(m\vec{v}_{CM}\right) + \vec{\tau}^{(ext)}. \tag{6.9}$$

Il termine $-\vec{v}_P \times \left(m\vec{v}_{CM}\right)$ risulta nullo se il polo $P$ è in quiete nel sistema di riferimento inerziale e $\vec{v}_P = \vec{0}$, oppure se è in quiete il centro di massa del sistema di particelle e $\vec{v}_{CM} = \vec{0}$ o se il polo coincide col centro di massa e quindi $\vec{v}_P = \vec{v}_{CM}$ o infine, se $\vec{v}_P$ è parallelo a $\vec{v}_{CM}$; in tutte queste circostanze la (6.9) diventa:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}^{(ext)} \tag{6.10}$$

e l'evoluzione temporale del momento angolare del sistema di punti rispetto al polo $P$ è determinata dal solo momento delle forze esterne calcolato rispetto allo stesso polo. Nel caso in cui vale la relazione (6.10), ovvero $\vec{v}_P \times \left(m\vec{v}_{CM}\right) = \vec{0}$, se il momento delle forze esterne $\vec{\tau}^{(ext)}$ è nullo il momento angolare si mantiene costante. Ciò si verifica se il sistema è isolato, per cui $\vec{F}^{(ext)} = \vec{0}$ e $\vec{L}$ si conserva rispetto ad ogni polo per cui $\vec{v}_P \times \left(m\vec{v}_{CM}\right) = \vec{0}$, oppure se $\vec{\tau}^{(ext)}$ è nullo rispetto ad un certo polo, malgrado sul sistema agiscono delle forze esterne. Nel primo caso, poiché $\vec{F}^{(ext)} = \vec{0}$, oltre al momento angolare del sistema si conserva anche la sua quantità di moto mentre, in generale, nel secondo caso questa grandezza non si conserva.

## 6.3 Sistema di riferimento del centro di massa




Dato un insieme di particelle, risulta spesso di particolare utilità un sistema di riferimento con origine nel centro di massa di tale insieme. Solitamente, assegnato un sistema di riferimento inerziale, è opportuno assumere gli assi coordinati del sistema del centro di massa paralleli a quelli del sistema inerziale. Ciò determina un moto traslatorio del sistema del centro di massa, ma non rettilineo uniforme, a meno che non sia nulla la risultante delle forze esterne agenti sul sistema di particelle $\vec{F}^{(ext)}$ e, di conseguenza, sia nulla l'accelerazione del centro di massa $\vec{a}_{CM}$. Indicando con un apice le grandezze riferite al centro di massa, per l'$i$-esima particella del sistema risulta:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_i\,' + \vec{r}_{CM}$$

e di conseguenza:

$$\vec{v}_i = \vec{v}_i\,' + \vec{v}_{CM}\,, \tag{6.11}$$

essendo il moto di trascinamento traslatorio. Ovviamente, in tale sistema risulta:

$$\begin{aligned} \vec{r}\,'_{CM} &= \vec{0}, \\ \vec{v}\,'_{CM} &= \vec{0}, \\ \vec{a}\,'_{CM} &= \vec{0}, \end{aligned} \tag{6.12}$$

per cui, dalle relazioni (6.3) e (6.5), si ha:

$$\sum_i m_i \vec{r}_i\,' = \vec{0}, \tag{6.13}$$

$$\sum_i m_i \vec{v}_i\,' = \vec{0}, \tag{6.14}$$

e quindi :

$$\vec{p}\,' = \sum_i m_i \vec{v}_i\,' = \vec{0}\,,$$

cioè la quantità di moto totale del sistema di particelle è nulla se riferita al sistema di riferimento del centro di massa. Poiché il sistema di riferimento, in generale, non è un sistema inerziale, sui suoi punti agisce la forza fittizia $-m_i\vec{a}_{CM}$ dovuta all'accelerazione di trascinamento dell'origine, ovvero del centro di massa. Pertanto sul generico punto del sistema di massa $m_i$ agisce oltre alla forza $\vec{F}_i$, somma delle forze interne ed esterne, anche tale forza fittizia; quindi l'espressione della seconda legge di Newton è:

$$m_i\vec{a}_i\,' = \vec{F}_i - m_i\vec{a}_{CM} = \vec{F}_i^{(ext)} + \vec{F}_i^{(int)} - m_i\vec{a}_{CM}\,. \tag{6.15}$$

Sommando tale relazione per tutti i punti del sistema, dalle espressioni (6.2) e (6.6), si ha:

$$\sum_i m_i \vec{a}\,' = \sum_i \vec{F}_i^{(ext)} + \sum_i \vec{F}_i^{(int)} - \sum_i m_i \vec{a}_{CM} = \vec{F}^{(ext)} - m\vec{a}_{CM} = \vec{0}\,.$$

Peraltro tale risultato segue dalla relazione (6.12). Il momento risultante del sistema, calcolato rispetto al polo situato nel centro di massa e riferito al sistema del centro di massa è:

$$\vec{\tau}\,' = \sum_i \vec{r}_i\,' \times \left[ \vec{F}_i^{(ext)} + \vec{F}_i^{(int)} - m_i \vec{a}_{CM} \right] = \sum_i \vec{r}_i\,' \times \vec{F}_i^{(ext)} + \sum_i \vec{r}_i\,' \times \vec{F}_i^{(int)} - \sum_i \vec{r}_i\,' \times \left( m_i \vec{a}_{CM} \right) =$$
$$= \vec{\tau}\,'^{(ext)} + \vec{\tau}\,'^{(int)} - \left( \sum_i m_i \vec{r}_i\,' \right) \times \vec{a}_{CM}\,;$$

in questa espressione $\vec{\tau}\,'^{(int)}$ è nullo per la (6.8) ed è nullo anche il terzo addendo dalla relazione (6.13). Ne segue che il momento risultante è dovuto alle sole forze esterne:

$$\vec{\tau}\,' = \vec{\tau}\,'^{(ext)} = \sum_i \vec{r}_i\,' \times \vec{F}_i^{(ext)}\,.$$

Infine, il momento angolare del sistema calcolato rispetto al polo situato nel centro di massa e riferito al sistema del centro di massa vale:

$$\vec{L}\,' = \sum_i \vec{r}_i\,' \times \left( m_i \vec{v}_i\,' \right)$$

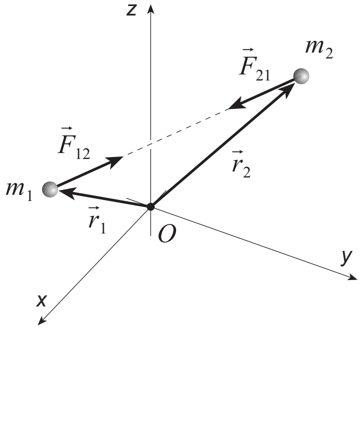
e, derivando rispetto al tempo, si ha:

$$\frac{d\vec{L}\,'}{dt} = \sum_i \left[ \frac{d\vec{r}_i\,'}{dt} \times \left( m_i \vec{v}_i\,' \right) + \vec{r}_i\,' \times \left( m_i \frac{d\vec{v}_i\,'}{dt} \right) \right] = \sum_i \vec{v}_i\,' \times \left( m_i \vec{v}_i\,' \right) + \sum_i \vec{r}_i\,' \times \left( m_i \vec{a}\,' \right)_i =$$
$$= \sum_i \vec{r}_i\,' \times \left[ \vec{F}_i^{(ext)} + \vec{F}_i^{(int)} - m_i \vec{a}_{CM} \right] = \vec{\tau}\,'^{(ext)},$$

perché $\vec{v}_i'$ e $m_i \vec{v}_i\,'$ sono paralleli e per la relazione precedente (6.15). Quindi

$$\frac{d\vec{L}\,'}{dt} = \vec{\tau}\,'^{(ext)}$$

ossia, purché come polo si assuma il centro di massa del sistema di particelle, il teorema del momento angolare continua a valere.




**Esempio:** Consideriamo un sistema costituito da due particelle soggette alla sola mutua interazione, ossia tali che sia nulla la risultante delle forze esterne. Applicando la seconda legge di Newton si ha:

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = \vec{F}_{12}\,,$$
$$m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = \vec{F}_{21}\,;$$

sottraendo membro a membro queste relazioni, e considerando che dalla (6.1) risulta $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$, segue:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right) = \frac{1}{m_1}\vec{F}_{12} - \frac{1}{m_2}\vec{F}_{21} = \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)\vec{F}_{12} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2}\vec{F}_{12};$$

la velocità:

$$\vec{v}_{12} \equiv \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

è la velocità relativa di $m_1$ rispetto a $m_2$ e quindi:

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right) = \frac{d\vec{v}_{12}}{dt} \equiv \vec{a}_{12}$$

è l'accelerazione relativa corrispondente. Pertanto, posto:

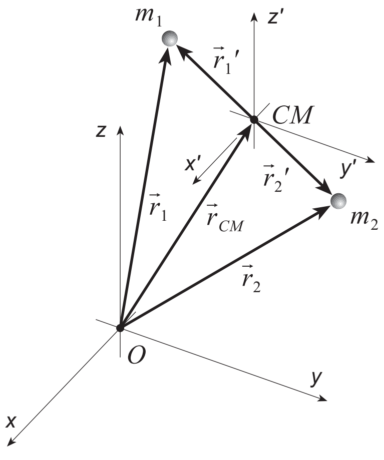
$$\mu \equiv \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2},$$

detto *massa ridotta* della coppia di particelle di masse $m_1$ e $m_2$, segue:

$$\mu \vec{a}_{12} = \vec{F}_{12};$$

cioè il moto relativo di due particelle soggette alla loro mutua interazione è equivalente al moto, relativo ad un osservatore inerziale, di una particella avente massa pari alla massa ridotta e soggetta ad una forza pari alla loro forza di mutua interazione. Tale schematizzazione consente di ridurre quindi il moto di una coppia di particelle isolate al moto di una singola particella di massa pari alla massa ridotta del sistema. Inoltre, se $m_1 << m_2$, risulta $\mu \approx m_1$ e così, ad esempio, nella descrizione del moto di un satellite artificiale attorno alla Terra, è possibile usare la massa del satellite anziché la massa ridotta del sistema Terra – satellite. D'altra parte, se $m_1 = m_2$, si ha $\mu = m_1/2$, come accade, ad esempio, nello studio dell'interazione tra una coppia di protoni o, approssimativamente, nello studio dell'interazione tra un protone e un neutrone.

**Esempio:** Consideriamo un sistema costituito da due particelle di massa $m_1$ e $m_2$ e velocità $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ rispetto ad un sistema di riferimento inerziale. Il vettore posizione e la velocità del centro di massa valgono rispettivamente:




$$\vec{r}_{CM} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_1}{m_1 + m_2},$$

$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2}.$$

Nel sistema del centro di massa le velocità delle due particelle sono:

$$\vec{v}_1' = \vec{v}_1 - \vec{v}_{CM} = \vec{v}_1 - \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\left(\vec{v}_1 - \vec{v}_2\right) = \frac{m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_{12},$$

$$\vec{v}_2' = \vec{v}_2 - \vec{v}_{CM} = \vec{v}_2 - \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\left(\vec{v}_2 - \vec{v}_1\right) = -\frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_{12},$$

dove

$$\vec{v}_{12} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$$

è la velocità relativa di una particella rispetto all'altra. Risulta quindi $\vec{v}_1'/m_2 = -\vec{v}_2'/m_1$, cioè le due particelle si muovono lungo la medesima direzione ma con versi opposti. Le quantità di moto delle due particelle nel sistema del centro di massa sono:

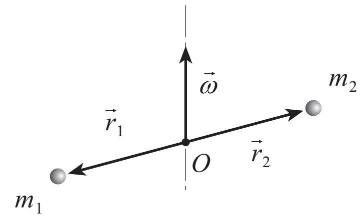
$$\vec{p}_1' = m_1\vec{v}_1' = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_{12} = \mu\vec{v}_{12}$$

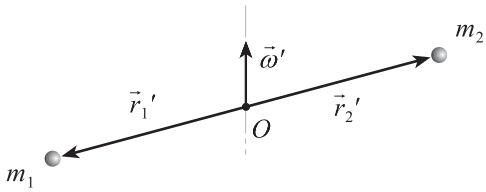
$$\vec{p}_2' = m_2\vec{v}_2' = -\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\vec{v}_{12} = -\mu\vec{v}_{12},$$

cioè:

$$\vec{p}_1' = -\vec{p}_2',$$

come consegue, in generale, dal fatto che la quantità di moto totale del sistema di particelle è nulla se riferita al centro di massa. Quindi, in questo sistema di riferimento le particelle si muovono con quantità di moto uguali in modulo e direzione ma opposte in verso.



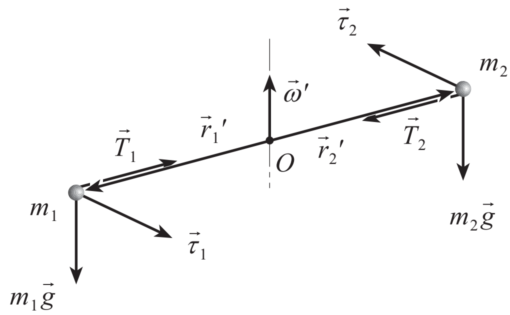




**Esempio:** Consideriamo due punti materiali di massa $m_1$ e $m_2$ uguali, collegati tra loro attraverso una sbarretta rigida di massa trascurabile, che ruotano senza attrito attorno ad un asse passante per il punto medio della sbarretta con velocità angolare costante $\vec{\omega}$. Il momento angolare del sistema rispetto all'origine $O$, situata nel punto medio è:

$$\vec{L} = m_1 r_1^2\vec{\omega} + m_2 r_2^2\vec{\omega} = \left(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2\right)\vec{\omega} = 2mr^2\vec{\omega}$$

dove $m = m_1, m_2$ e $r = r_1, r_2$. Supponiamo che le distanze dei punti dall'asse in un certo istante vengano cambiate e valgano rispettivamente $r_1'$ e $r_2'$. Il momento angolare in tale circostanza diventa:

$$\vec{L}' = 2mr'^2\vec{\omega}'.$$




Su tale sistema le uniche forze agenti sono la tensione della sbarretta e la forza peso. La prima fornisce ai punti la forza centripeta necessaria al moto circolare e, trattandosi di forza interna, ha momento nullo. La seconda ha momento risultante nullo rispetto ad $O$. Pertanto, siccome il momento delle forze esterne agenti sul sistema è nullo, segue che il momento angolare si conserva e $\vec{L} = \vec{L}'$, da cui si ha:

$$2mr^2\vec{\omega} = 2mr'^2\vec{\omega}',$$

ovvero:

$$\vec{\omega}' = \left(\frac{r}{r'}\right)^2\vec{\omega},$$

siccome $r' > r$, segue $\omega' < \omega$, cioè la rotazione rallenta a seguito dell'allungamento specificato.

Consideriamo un insieme di particelle di masse $m_i$; in un sistema di riferimento inerziale il momento angolare rispetto all'origine assunta come polo è:

$$\begin{aligned}\vec{L} &= \sum_i \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i) = \sum_i (\vec{r}_i' + \vec{r}_{CM}) \times \left[ m_i (\vec{v}_i' + \vec{v}_{CM}) \right] = \\ &= \sum_i \vec{r}_i' \times (m_i \vec{v}_i') + \sum_i \vec{r}_i' \times (m_i \vec{v}_{CM}) + \sum_i \vec{r}_{CM} \times (m_i \vec{v}_i') + \sum_i \vec{r}_{CM} \times (m_i \vec{v}_{CM}) = \\ &= \vec{L}' + \left( \sum_i m_i \vec{r}_i' \right) \times \vec{v}_{CM} + \vec{r}_{CM} \times \left( \sum_i m_i \vec{v}_i' \right) + \vec{r}_{CM} \times m\vec{v}_{CM};\end{aligned}$$

e utilizzando le relazioni (6.13) e (6.14) si ottiene:

$$\vec{L} = \vec{L}' + \vec{r}_{CM} \times (m\vec{v}_{CM}) = \vec{L}' + \vec{L}_{CM},$$

cioè il momento angolare del sistema di punti può esprimersi tramite le grandezze proprie del sistema di riferimento del centro di massa come somma del momento angolare del sistema di punti rispetto al centro di massa $\vec{L}'$ e dal momento del centro di massa rispetto al sistema di riferimento inerziale. Dall'espressione precedente è possibile osservare che, sebbene per un punto materiale la nullità della quantità di moto implica la nullità del momento angolare, nel caso di un sistema di particelle, se è nulla la quantità di moto del centro di massa $m\vec{v}_{CM}$ non è in generale nullo $\vec{L}$ siccome i punti possono essere dotati di moto; viceversa, se $\vec{L}$ è nullo allora, in generale, non è necessariamente nulla la quantità di moto del centro di massa, ma risulta $\vec{L}_{CM} = -\vec{L}'$.

## 6.4 Energia di un sistema di particelle

Consideriamo un insieme di $n$ punti materiali di masse $m_1, m_2, ..., m_n$; il lavoro elementare $dW_i$ della forza $\vec{F}_i$ agente sull'$i-$esimo punto in corrispondenza di uno spostamento $d\vec{r}_i$ vale:

$$dW_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i; \tag{6.16}$$

decomponendo la forza $\vec{F}_i$ in somma della forza esterna $\vec{F}_i^{(ext)}$ e della forza interna $\vec{F}_i^{(int)}$ si ha:

$$dW_i = \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = \left( \vec{F}_i^{(ext)} + \vec{F}_i^{(int)} \right) \cdot d\vec{r}_i = \vec{F}_i^{(ext)} \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_i^{(int)} \cdot d\vec{r}_i = dW_i^{(ext)} + dW_i^{(int)}$$

per cui, integrando tale espressione lungo le traiettorie percorse dai punti e sommando su tutti i punti, si ottiene:

$$W = W^{(ext)} + W^{(int)}.$$

In particolare il termine $dW_i^{(int)}$ è costituito dalla somma di termini del tipo:

$$\vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_j + \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_i = \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_j - \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i = \vec{F}_{ij} \cdot d\left( \vec{r}_j - \vec{r}_i \right) = \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij},$$

quindi il contributo al lavoro da parte delle forze interne non è, in generale, nullo ed è determinato dal cambiamento delle distanze mutue tra i punti materiali. Infatti laddove tali distanze restano immutate, come accade per un sistema rigido, risulta $W^{(int)}=0$. La relazione (6.16) può essere espressa tramite la velocità $\vec{v}_i$ dell'$i$-esimo punto come:

$$dW_i=\vec{F}_i\cdot d\vec{r}_i=m_i\vec{v}_i\cdot d\vec{v}_i\,,$$

così, integrando sulle traiettorie e sommando su tutti i punti, si ottiene:

$$W=\sum_i\frac{1}{2}m_iv_{i\,B}^2-\sum_i\frac{1}{2}m_iv_{i\,A}^2=E_{k\,B}-E_{k\,A}$$

in cui $\vec{v}_{i\,A}$ e $\vec{v}_{i\,B}$ sono, rispettivamente, le velocità dell'$i-$esimo punto nella configurazione iniziale $A$ e nella configurazione finale $B$ e $E_{k\,A}$ e $E_{k\,B}$ sono, rispettivamente, l'energia cinetica del sistema nella configurazione iniziale e finale. Così si ottiene:

$$W^{(ext)}+W^{(int)}=E_{k\,B}-E_{k\,A}\,.$$

Se le forze interne e quelle esterne sono conservative, i corrispondenti lavori possono essere espressi come variazione dell'energia potenziale:

$$W^{(ext)}=E_{p\,A}{}^{(ext)}-E_{p\,B}{}^{(ext)},$$
$$W^{(int)}=E_{p\,A}{}^{(int)}-E_{p\,B}{}^{(int)}.$$

In tale circostanza risulta:

$$E_{k\,A}+E_{p\,A}{}^{(ext)}+E_{p\,A}{}^{(int)}=E_{k\,B}+E_{p\,B}{}^{(ext)}+E_{p\,B}{}^{(int)}\,,$$

ovvero si ha la conservazione dell'energia meccanica del sistema di punti. In presenza di forze non conservative, se il corrispondente lavoro è $W^{(nc)}$, si ha:

$$W^{(nc)}=\left(E_{k\,B}+E_{p\,B}{}^{(ext)}+E_{p\,B}{}^{(int)}\right)-\left(E_{k\,A}+E_{p\,A}{}^{(ext)}+E_{p\,A}{}^{(int)}\right).$$

Si noti che la conservazione dell'energia per il sistema di punti richiede che sia le forze interne che quelle esterne siano conservative per cui, in un sistema isolato, cioè tale che le forze esterne agenti sul sistema sono nulle, l'energia meccanica si conserva solo se le forze interne sono conservative. Anziché riferire l'energia cinetica ad un sistema di riferimento inerziale, risulta spesso utile riferire tale grandezza al centro di massa. In tale caso dalla relazione (6.11) si ha:

$$\begin{aligned}E_k&=\sum_i\frac{1}{2}m_iv_i^2=\sum_i\frac{1}{2}m_i\left(\vec{v}_i'+\vec{v}_{CM}\right)^2=\sum_i\frac{1}{2}m_i\left(v_i'^2+v_{CM}^2+2\vec{v}_i'\cdot\vec{v}_{CM}\right)\\&=\sum_i\frac{1}{2}m_i\vec{v}_i'^2+\sum_i\frac{1}{2}m_iv_{CM}^2+\sum_i m_i\vec{v}_i'\cdot\vec{v}_{CM}=E_k'+\frac{1}{2}\left(\sum_i m_i\right)v_{CM}^2+\left(\sum_i m_i\vec{v}_i'\right)\cdot\vec{v}_{CM}\\&=E_k'+\frac{1}{2}mv_{CM}^2=E_k'+E_{k\,CM}\,,\end{aligned}$$

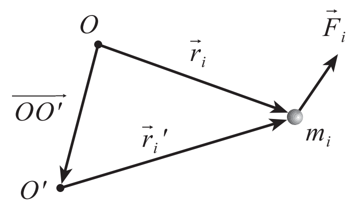
dove $E'_k = (1/2)\sum_i m_i v_i'^2$ è l'energia cinetica del sistema di particelle riferita al centro di massa, il termine $E_{k\,CM} = (1/2) m v_{CM}^2$ è l'energia cinetica del centro di massa inteso come un punto materiale la cui massa è data dalla relazione (6.4) e il termine $\sum_i m_i \vec{v}'_i \cdot \vec{v}_{CM}$ è nullo per la (6.14). La relazione

$$E_k = E'_k + E_{k\,CM} \tag{6.17}$$

rappresenta l'espressione del *teorema di König*.

## 6.5 Azione di forze su punti diversi di un sistema di punti

Consideriamo un insieme di $n$ punti materiali soggetti alle forze $\vec{F}_1, \vec{F}_2, ..., \vec{F}_n$. Il momento $\vec{\tau}$ risultante di tali forze rispetto all'origine assunta come polo $O$ vale:




$$\vec{\tau} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

dove $\vec{r}_i$ è il vettore posizione condotto dal polo all'$i-$esimo punto del sistema. Posto:

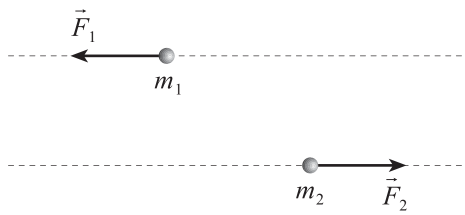
$$\overrightarrow{OO'} \equiv \vec{r}_i - \vec{r}'_i,$$

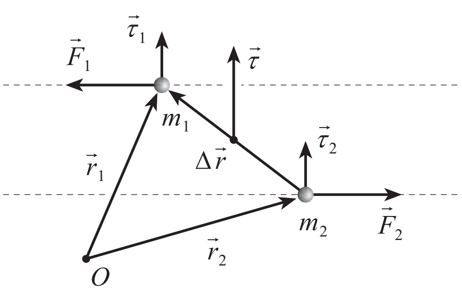
il momento $\vec{\tau}'$ rispetto al polo $O'$ vale:

$$\vec{\tau}' = \sum_i \vec{r}'_i \times \vec{F}_i = \sum_i \left(\vec{r}_i - \overrightarrow{OO'}\right) \times \vec{F}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i - \overrightarrow{OO'} \times \sum_i \vec{F}_i = \vec{\tau} - \overrightarrow{OO'} \times \vec{F}$$

dove $\vec{F} \equiv \sum_i \vec{F}_i$ è la risultante di tutte le forze agenti sul sistema. Dalla precedente espressione si evince che il momento dipende, in generale, dalla scelta del polo, a meno che la risultante delle forze agenti sul sistema non sia nulla.

**Esempio:** Consideriamo il sistema costituito da due punti materiali sui quali agiscono due forze, $\vec{F}_1$ e $\vec{F}_2$, di uguale intensità, applicate su due rette parallele e di verso opposto. In questa circostanza si dice che il sistema forma una *coppia*, la cui risultante è nulla, essendo $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$. Il momento rispetto ad un generico polo $O$ vale:



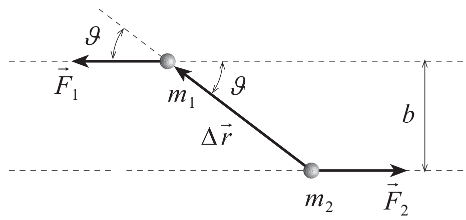

$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1,$$
$$\vec{\tau}_2 = \vec{r}_2 \times \vec{F}_2,$$

così il momento risultante è:

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 - \vec{r}_2 \times \vec{F}_1 = \Delta\vec{r} \times \vec{F}_1,$$

essendo $\Delta\vec{r} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2$. Siccome la risultante delle forze agenti sul sistema è nulla, tale risultato risulta indipendente dalla posizione del polo. Il modulo di $\vec{\tau}$ vale:

$$\tau = \Delta r F_1 \sin\vartheta = \left(\Delta r \sin\vartheta\right) F_1 ,$$




dove quantità

$$b \equiv \Delta r \sin\vartheta$$

prende il nome di *braccio della coppia* e rappresenta la distanza tra le due rette di applicazione delle forze. Pertanto:

$$\tau = bF_1 .$$

Quanto ottenuto nell'esempio precedente è in accordo con la relazione (6.8) secondo la quale il momento delle forze interne è nullo; ciò in quanto le forze interne costituiscono un insieme di coppie con braccio di lunghezza nulla per cui il corrispondente momento è nullo rispetto a qualsiasi polo.

## 6.6 Generalità sulla dinamica dei sistemi di punti

Abbiamo visto che le equazioni che descrivono il moto di un sistema di punti materiali sono:

$$\vec{F}^{(ext)} = m\vec{a}_{CM} = \frac{d\vec{p}}{dt},$$
$$\vec{\tau}'^{(ext)} = \frac{d\vec{L}'}{dt},$$

dove $\vec{L}'$ è valutato rispetto al centro di massa del sistema. Tali equazioni stabiliscono l'evoluzione temporale del vettori $\vec{p}$ ed $\vec{L}'$ e, per quanto visto, sono tra loro indipendenti; ciò implica che per una completa descrizione dinamica del sistema di punti occorre conoscere contemporaneamente sia la risultante $\vec{F}^{(ext)}$ delle forze esterne agenti sul sistema che la risultante $\vec{\tau}'^{(ext)}$ del momento delle forze esterne rispetto al centro di massa. La variazione di energia cinetica è:

$$\Delta E_k = W^{(ext)} + W^{(int)} ;$$

inoltre, qualora sul sistema agiscano delle forze non conservative, si ha:

$$\Delta E = W^{(nc)} ,$$

dove $\Delta E$ è la variazione di energia meccanica $E_k + E_p$ . Sia il momento angolare che l'energia cinetica possono essere espresse tramite il moto del centro di massa:

$$\vec{L} = \vec{L}' + \vec{r}_{CM} \times \left(m\vec{v}_{CM}\right),$$
$$E_k = E_k' + \frac{1}{2} m v_{CM}^2 .$$

Dalle precedenti equazioni derivano tre leggi di conservazione: se la risultante delle forze esterne agenti sul sistema è nulla, si conserva la quantità di moto totale del sistema; se il momento delle forze esterne è nullo, si conserva, il momento angolare riferito al centro di massa; se tutte le forze agenti sul sistema sono conservative si conserva l'energia meccanica. In generale tali leggi di conservazione sono indipendenti tra loro.