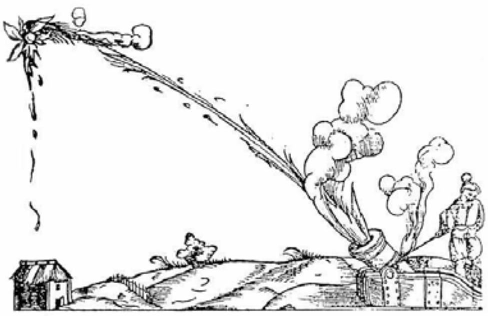
4 DINAMICA DEL PUNTO MATERIALE

A differenza della cinematica in cui i moti sono descritti solo geometricamente attraverso l'uso dei vettori posizione, velocità ed accelerazione, nella *dinamica* vengono analizzate le cause che danno origine al moto. In generale, il moto di un corpo è determinato dalla sua interazione con l'ambiente circostante; in una prima fase di questo studio saranno considerati i soli punti materiali, in modo da poter prescindere dalla forma del corpo nello studio dell'interazione. Inoltre si studierà la dinamica di corpi in moto con velocità trascurabili rispetto a quella della luce nel vuoto, circa $3\times10^8\ m/s$, e di dimensioni superiori di quelle delle particelle componenti i sistemi atomici. Tale ambito di studio è detto *meccanica classica*.

Lo studio dinamico del moto dei corpi richiede la specificazione sia delle caratteristiche del punto materiale, quali massa, carica, momento di dipolo elettrico ecc., che la definizione dell'ambiente nel quale sono situati i corpi. A partire da tali informazioni, nota la velocità iniziale di un corpo, la dinamica deve prevederne il successivo moto. Si riterranno validi i procedimenti seguiti a tale fine solo se produrranno dei risultati in accordo con l'esperienza.

4.1 Prima legge di Newton



Concezione pregalileiana del moto: un corpo si muove in virtù del possesso di una proprietà detta *impeto*, all'esaurirsi dell'impeto il moto cessa.

Una efficace descrizione del moto si ebbe a partire dal diciassettesimo secolo, prima con Galileo e quindi con Newton. Originariamente si riteneva che i moti avessero luogo per l'azione di influenze esterne, o forze, mentre lo stato naturale dei corpi era l'assenza di moto; pertanto, affinché si avesse il moto di un corpo, ad esempio rettilineo uniforme, su di esso doveva essere esercitata continuamente un'azione e, al cessare di questa, il moto sarebbe terminato. Tale convinzione era avvalorata dall'esperienza quotidiana che vede, ad esempio, la necessità di una spinta continua di un corpo su una superficie orizzontale scabra per mantenerne il moto rettilineo uniforme. Il valore degli studi di Galileo e Newton sta nella capacità di separare dagli aspetti caratteristici e determinanti dei processi analizzati gli elementi estranei e perturbatori presenti nell'esperienza. Nella pratica si osserva che al ridursi degli agenti perturbatori, ad esempio attraverso operazioni di levigatura, lubrificazione ecc., la diminuzione della velocità di un corpo lasciato a sé stesso sulla superficie orizzontale procede sempre più lentamente. Di conseguenza, è possibile estrapolare tale caratteristica affermando che qualora si potessero eliminare tutte le perturbazioni, il corpo continuerebbe a muoversi di moto rettilineo uniforme.

Pertanto è necessario un agente esterno per modificare la velocità di un corpo ma non occorre alcun agente per mantenerne la velocità. Così il moto sul piano ha origine da una spinta e la superficie scabra esercita su di esso un'azione per rallentarlo. In entrambi i casi delle azioni determinano un cambiamento di velocità del corpo ovvero un'accelerazione. Questo principio prende il nome di *prima legge di Newton* e viene così enunciato:

"Ogni corpo non sottoposto ad azioni esterne (punto materiale libero) persiste nel suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme".

Alternativamente, la prima legge può esprimersi affermando che, in assenza di azioni, l'accelerazione di un corpo è nulla, cioè la sua velocità non cambia. Quindi, siccome l'accelerazione del corpo è determinata dall'interazione con l'ambiente circostante, un corpo isolato si troverà o in quiete o in moto con velocità costante. La proprietà secondo cui i corpi restino in quiete o mantengano il loro moto rettilineo uniforme in assenza di interazioni con l'ambiente circostante è detta *inerzia*. Per tale motivo la prima legge di Newton è anche denominata *principio di inerzia*.

Per stabilire la prima legge di Newton, a causa della relatività del concetto di moto, è necessario specificare il sistema di riferimento rispetto al quale il moto è riferito. Si assume, pertanto, che il moto del corpo sia relativo ad un osservatore non soggetto ad interazioni con l'ambiente circostante. Tale osservatore è detto *inerziale* ed il corrispondente sistema di riferimento è detto *sistema di riferimento inerziale.* Ovviamente un sistema di riferimento solidale ad un altro osservatore in moto rettilineo uniforme relativamente ad un sistema di riferimento inerziale è, esso stesso, un sistema di riferimento inerziale. Pertanto esistono molteplici sistemi di riferimento inerziali gli uni in moto rettilineo uniforme rispetto agli altri. Un sistema di riferimento inerziale nel senso testé descritto è un'astrazione, non potendo isolare completamente un corpo. Tuttavia, in molti casi, le interazioni di un corpo con l'ambiente circostante possono essere considerate trascurabili per i processi che si intende studiare per cui, senza commettere gravi errori, il sistema di riferimento solidale col corpo può essere ritenuto un sistema di riferimento inerziale.

4.2 Forza

Le cause che determinano una variazione della velocità di un punto materiale in un certo sistema di riferimento sono dette *forze*. Per caratterizzare completamente tale concetto occorre stabilire operativamente il criterio di uguaglianza, le regole di somma ed, infine, l'unità di misura. A tale scopo occorre riferirsi alle risultanze sperimentali. Dall'osservazione che un punto materiale, a riposo su un piano privo di elementi che ne possono alterare il moto, si muove lungo la direzione nella quale viene spinto, segue che la forza ha carattere vettoriale. Il criterio per stabilire l'uguaglianza di due forze può essere stabilito a partire dall'accelerazione che esse determinano; cioè diremo che due forze applicate successivamente ad uno stesso corpo sono uguali se ne determinano la stessa accelerazione, dove, per accelerazione, si intende il vettore accelerazione.

È possibile verificare tali caratteristiche delle forze adoperando, ad esempio, una molla. Si osserva infatti che se si comprime o si allunga entro certi limiti una molla a partire dalla posizione di riposo, agli estremi viene esercitata una forza che è sempre la stessa a parità di compressione o di allungamento. Per stabilire le regole di somma si può collegare la molla ad un punto materiale e, mantenendo fisso il punto, estendere la molla di una certa entità quindi, lasciando andare il punto materiale, se ne può osservare l'accelerazione in un intervallo di tempo in cui si fa in modo che l'allungamento sia mantenuto costante. Osservando il moto in tale istante si trova che due forze di uguale intensità, agenti lungo la stessa direzione e con lo stesso verso, determinano sul corpo un'accelerazione doppia rispetto a quella prodotta da una singola forza. Se invece le due forze agiscono lungo direzioni diverse, si determina un'accelerazione pari alla somma vettoriale delle accelerazioni che si hanno quando le due forze agiscono separatamente sul corpo.

4.3 Seconda legge di Newton

Dalle considerazioni precedenti segue che tra la forza e l'accelerazione sussiste una relazione di proporzionalità vettoriale, cioè indicando con $\vec{F}$ il vettore forza e con $\vec{a}$ l'accelerazione che esso determina su un dato corpo, si ha:

$$\vec{F} \propto \vec{a}\,.$$

Sperimentalmente, attraverso l'applicazione di uguali forze a corpi di differente natura, sempre assimilabili a punti materiali, si osserva che la costante di proporzionalità dipende da caratteristiche proprie del corpo. Tale costante manifesta l'inerzia del punto materiale, in quanto stabilisce l'entità dell'accelerazione che subisce il punto materiale quando è sottoposto all'azione di una certa forza. Supponiamo di applicare a due punti materiali una stessa forza, allora le accelerazioni conseguenti saranno tali che:

$$\vec{F} = \xi_1 \vec{a}_1,$$
$$\vec{F} = \xi_2 \vec{a}_2,$$

dove i simboli ξ_1 e ξ_2 esprimono il coefficiente di proporzionalità tra forza e accelerazione. Se nelle espressioni precedenti valutiamo il rapporto membro a membro dei moduli, si trova:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\xi_2}{\xi_1}\,.$$

Sperimentalmente si osserva che, qualora gli stessi corpi siano entrambi sottoposti ad una differente forza $\vec{F}'$, le corrispondenti accelerazioni $\vec{a}_1'$ e $\vec{a}_2'$ saranno tali che:

$$\frac{a_1'}{a_2'} = \frac{\xi_2}{\xi_1}\,,$$

indipendentemente dallo stato di moto di ciascuno dei corpi prima che agisse la forza. Ciò indica che la costante di proporzionalità costituisce una proprietà intrinseca dei punti materiali, essendo indipendente dal loro stato di moto e che ne caratterizza il comportamento in relazione agli agenti che ne perturbano il suo stato di quiete o di moto rettilineo uniforme. Tale caratteristica, che è l'inerzia, è rappresentata dalla *massa inerziale*. Indicando con m la massa inerziale, la relazione di proporzionalità può essere espressa come:

$$\vec{F} = m\vec{a}\,. \tag{4.1}$$

Prescindendo, per il momento, dalle unità di misura adoperate in tale relazione, è possibile fare delle considerazioni circa la massa. Si verifica facilmente che la massa è una grandezza scalare e pertanto segue le leggi proprie di tali grandezze. Dati due punti materiali identici come dimensioni e costituzione si osserva che essi subiscono la stessa accelerazione in corrispondenza dell'applicazione di un'identica forza. Così può affermarsi che tali corpi hanno la medesima massa inerziale. Pertanto, punti materiali caratterizzati dalla stessa massa conseguono un uguale accelerazione quando sono soggetti ad una medesima forza. Consideriamo ora due punti materiali di uguale massa, dalla (4.1) consegue che essi, soggetti ad una forza $\vec{F}$ subiranno un'accelerazione $\vec{a}$ pari a $\vec{F}/m$. Sperimentalmente si osserva che, qualora i due punti vengano uniti in modo da costituire un unico punto, l'accelerazione $\vec{a}'$ che essi subiscono in corrispondenza della forza $\vec{F}$ è tale che $a' = a/2$. Ciò è in accordo con la considerazione secondo cui il punto materiale costituito dall'unione dei punti di massa m ha massa $2m$. Analogamente si prova che, in generale, la massa di un corpo costituito dall'unione di due corpi, rispettivamente di masse m_1 e m_2 è pari a $m_1 + m_2$.

La scelta delle unità di misura per massa e forza deriva sostanzialmente da esigenze pratiche circa la realizzabilità di opportuni campioni per tali grandezze. Nei sistemi più usati, *SI* e *cgs*, si sceglie quale grandezza fondamentale la massa, insieme a quelle di lunghezza e di tempo. Nel sistema *SI*, l'unità di misura è il *kilogrammo-massa*, mentre nel sistema *cgs* è il *grammo*, che è pari ad un millesimo del kilogrammo. Dalla (4.1) segue che le dimensioni della forza sono quelle di una massa moltiplicata per una lunghezza diviso il quadrato di un tempo, per cui nel sistema *SI* risulta:

$$[F] = \frac{kg\, m}{s^2} \equiv N;$$

tale quantità prende il nome di *newton* (N) e rappresenta la forza che occorre applicare ad un punto materiale di $1\,kg$ per conferirgli un'accelerazione di $1\,m/s^2$ (nella direzione e nel verso della forza).

La relazione (4.1) prende il nome di *seconda legge di Newton* e afferma che in un sistema di riferimento inerziale l'accelerazione di un punto materiale prodotta da forze applicate è direttamente proporzionale alla somma delle forze stesse e inversamente proporzionale alla massa del punto.

Si osservi che, qualora $\vec{F} = \vec{0}$, dalla (4.1) segue che anche l'accelerazione $\vec{a}$ è nulla, in accordo a quanto affermato dalla prima legge di Newton; pertanto queste due leggi non sono indipendenti; tuttavia attraverso la prima legge è possibile definire i sistemi di riferimento inerziali nel cui ambito vale la seconda legge.

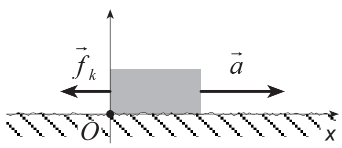
La (4.1) è un'equazione vettoriale che, fissato un opportuno sistema di riferimento, corrisponde alle tre equazioni scalari:

$$\begin{aligned} \sum F_x &= ma_x \\ \sum F_y &= ma_y \\ \sum F_z &= ma_z, \end{aligned}$$

dove al primo membro compaiono le componenti rispetto al sistema di riferimento fissato della risultante $\vec{F}$ delle forze agenti sul corpo di massa m ed al secondo membro il prodotto tra la massa di tale corpo e le componenti dell'accelerazione $\vec{a}$. L'applicazione della seconda legge richiede quindi la specificazione di tutte le forze che agiscono sul corpo, attraverso il cosiddetto *diagramma delle forze*.

Alla luce della seconda legge di Newton è possibile interpretare la dinamica dl moto su una superficie orizzontale scabra. Si osserva che un corpo lanciato su tale superficie con velocità $\vec{v}_0$ cessa il suo moto dopo un certo tempo, quindi sul corpo agisce un'accelerazione opposta alla direzione del moto. In un sistema di riferimento inerziale l'accelerazione di un corpo è dovuta ad una forza, così concludiamo che sul corpo in moto agisce una forza. Questa forza prodotta dal contatto fra il corpo e la superficie scabra è detta *forza d'attrito*.

Esempio: Descriviamo il moto di un corpo lanciato con velocità iniziale $\vec{v}_0$ su un piano scabro. L'espressione della (4.1) è:

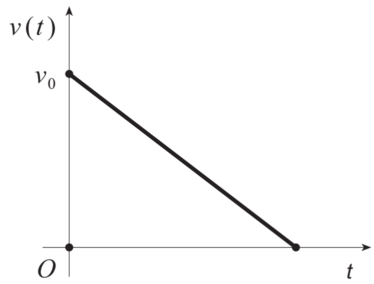


$$ma = -f_k,$$

dove $\vec{f}_k$ indica la forza d'attrito. Da tale relazione segue:

$$a = -\frac{f_k}{m}.$$

Il moto è di tipo uniformemente decelerato, così dalle relazioni (2.10) si ottiene:



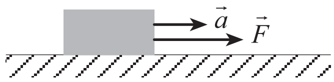
$$v = v_0 - \frac{f_k}{m} t$$

da cui segue che al tempo $(mv_0)/f$ il corpo si arresta. La legge oraria del moto si ricava dalle (2.10) assumendo che all'istante iniziale il corpo sia nell'origine del sistema di riferimento $(x = 0)$:

$$x = v_0 t - \frac{f_k}{2m} t^2,$$

così il moto cessa dopo che il corpo ha percorso una distanza pari a $mv_0^2/(2f_k)$.

Esempio: Stabiliamo la velocità raggiunta a distanza d dal punto di partenza da un corpo di massa m posto su una superficie orizzontale priva di attrito, quando è soggetto ad una forza costante F partendo da fermo $(v_0 = 0)$. Risulta:



$$m\frac{dv}{dt} = F;$$

integrando questa equazioni con la condizione iniziale $v_0 = 0$, si ha:

$$v = \frac{F}{m} t,$$

se integriamo questa espressione si trova:

$$x = \frac{1}{2}\frac{F}{m} t^2,$$

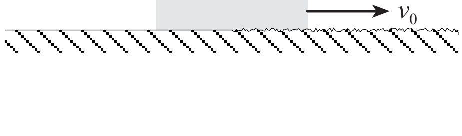
avendo assunto quale origine quella in cui il corpo era originariamente in quiete. La distanza d dall'origine viene raggiunta al tempo t_d pari a :

$$t_d = \sqrt{\frac{2md}{F}},$$

in cui la velocità vale:

$$v_d = \frac{F}{m} t_d = \frac{F}{m}\sqrt{\frac{2md}{F}} = \sqrt{\frac{2Fd}{m}}.$$

Esempio: Su un supporto in moto su un piano orizzontale senza attrito con velocità $\vec{v}_0$ è posto un corpo di massa m. Il sistema così costituito, raggiungendo una superficie scabra, subisce una decelerazione per cui il modulo della sua velocità passa da v_0 a $v_1 < v_0$ in un tempo T. Stabiliamo la forza che agisce sul corpo di massa m. L'accelerazione cui è soggetto il sistema è:



$$a = \frac{v_1 - v_0}{T}$$

dove $a < 0$ essendo $v_1 < v_0$, così la forza agente sul corpo è diretta nel verso contrario a quello del moto e vale:

$$F = ma = m\frac{v_1 - v_0}{T}.$$

Tale forza è diretta nel verso contrario di $\vec{v}_0$. Qualora la forza di attrito tra il corpo di massa m e il suo supporto è inferiore a tale valore, la massa m slitterà sul supporto in quanto, come osservato rispetto ad un sistema di riferimento solidale al piano, la massa decelera meno rapidamente del supporto.

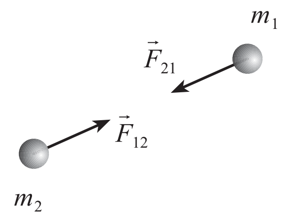
4.4 Terza legge di Newton

Nell'introdurre la dinamica si è affermato che il moto di un corpo si origina dalla sua interazione con l'ambiente circostante. Successivamente tale interazione è stata descritta attraverso l'introduzione del concetto di forza. Pertanto concludiamo che i corpi interagiscono con l'ambiente in cui si situano attraverso forze. In particolare, esaminando le forze agenti su un corpo si osserva che ciascuna è originata dall'azione di un altro corpo facente parte dell'ambiente circostante. D'altra parte il corpo dell'ambiente, avendo come parte del suo ambiente il primo corpo, interagisce con esso. Sperimentalmente si osserva che, quando un corpo esercita una forza su di un altro, questo a sua volta esercita una forza sul primo. Tale coppia di forze è caratterizzata da essere uguale in modulo e direzione, ma opposta in verso. Si può quindi affermare che:

"Quando due corpi esercitano delle forze l'uno verso l'altro, queste hanno lo stesso modulo, la stessa direzione e verso opposto".

Questa affermazione è nota come *terza legge di Newton*. Tradizionalmente, nell'interazione tra due corpi una delle forze viene arbitrariamente denominata *azione* e l'altra *reazione*, così la legge di Newton viene comunemente espressa attraverso l'enunciato: "Ad ogni azione corrisponde una reazione uguale e contraria".

E' possibile rappresentare matematicamente tale legge considerando l'interazione tra due corpi; supponiamo che il corpo 1 eserciti una forza $\vec{F}_{12}$ sul corpo 2, allora sperimentalmente si verifica che il corpo 2 eserciterà sul corpo 1 una forza $\vec{F}_{21}$ tale che:



$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21};$$

come è specificato dal diverso ordine degli indici di questa espressione, le due forze agiscono su corpi differenti. Se così non fosse, ovvero le due forze agissero sul medesimo corpo, la risultante delle forze agenti su di esso sarebbe nulla, per cui non potrebbe aversi alcuna accelerazione.

4.5 Classificazione delle forze

Tutte le forze responsabili dei fenomeni naturali sono riconducibili a quattro tipi di interazioni fondamentali: l'*interazione gravitazionale*, l'*interazione elettromagnetica*, l'*interazione debole* e l'*interazione forte*. L'interazione gravitazionale, la prima ad essere scoperta e studiata, si esplica tra i corpi dotati di massa; l'interazione elettromagnetica caratterizza i corpi che posseggono una carica elettrica; l'interazione debole è responsabile di alcuni tipi di decadimenti di particelle e l'interazione forte garantisce la stabilità dei nuclei atomici. Di recente si è compreso che due di queste interazioni, quella elettromagnetica e quella debole sono, su scala microscopica, due diversi aspetti della stessa interazione che prende il nome, pertanto, di *interazione elettrodebole*.

La pratica quotidiana suggerisce che l'azione di una forza su di un corpo richieda il contatto tra il corpo e l'agente che determina l'azione. Ad esempio la spinta di un corpo su un piano ne determina il moto. D'altra parte, sempre nella pratica quotidiana, osserviamo la manifestazione di forze che non richiedono alcun contatto, come la forza di interazione tra i pianeti e il Sole o la forza che si esplica tra cariche elettriche. Il problema dell'interazione a distanza fu risolto nel diciannovesimo secolo da Michel Faraday attraverso l'introduzione del concetto di *campo*. Un corpo, in virtù di una qualche sua proprietà, come la massa o la carica elettrica, genera nello spazio attorno a sé un campo attraverso il quale gli altri corpi interagiscono con il corpo che lo ha generato; il campo, quindi, media l'interazione fra i corpi. Apparentemente tale entità non ha alcun ruolo nella dinamica delle forze di contatto; tuttavia un esame microscopico dell'azione di tale forze, evidenzia che anche esse sono riconducibili ad una delle quattro forme di interazione testé descritte. Inoltre anche tali forze, sulla scala microscopica, si manifestano attraverso un'interazione a distanza e, pertanto, mediata da un campo. La mediazione di un campo nell'interazione tra due corpi sembra solo un altro modo per descrivere una stessa cosa tuttavia, in molteplici circostanze, i campi presentano una realtà quasi indipendente dagli oggetti che li generano. Ciò segue dal fatto che, sebbene spesso non sia cosa manifesta, l'interazione fra due corpi non è istantanea, per cui il campo rappresenta l'entità che si propaga da un corpo all'altro affinché si verifichi l'interazione.

Nell'ambito della fisica classica tutte le forze che si esplicano sono riconducibili a due soli tipi di interazione, quella gravitazionale e quella elettromagnetica. La forza gravitazionale giustifica il fatto che tutti i corpi, indipendentemente dalla loro massa, in prossimità della Terra acquistano la stessa accelerazione se lasciati liberi. L'interazione elettromagnetica è responsabile delle forze di contatto; osservate a livello microscopico, tali forze si esplicano attraverso azioni elettriche repulsive o attrattive tra gli atomi che costituiscono i corpi. Ad esempio, quando il corpo è tirato da una fune, questa esercita sul corpo una forza detta *tensione* che ha origine nelle forze di natura elettrostatica che mantengono coese le molecole che costituiscono la fune. Tale tensione esiste finché non vengono superate le forze intermolecolari. A quel punto la tensione cessa in quanto la fune si spezza a causa della rottura dei legami molecolari nella fune stessa. Analogamente la pressione di un corpo su un altro su di un piano orizzontale ne causa il moto per effetto della repulsione elettrica che si esplica tra uguali cariche appartenenti ai due corpi.

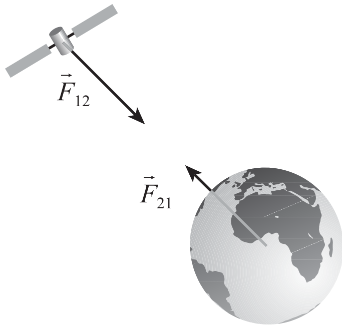
4.6 Forza peso

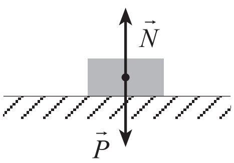
Supponiamo di poter considerare la Terra un sistema di riferimento inerziale. Sperimentalmente si osserva che in prossimità della Terra un corpo, indipendentemente dalla sua massa, quando è lasciato libero, acquista un'accelerazione il cui modulo vale, in media, circa 9.8 m/s^2. Questa accelerazione è conseguenza dell'interazione tra la Terra e il corpo e la forza corrispondente è detta *peso*. Dalla (4.1), se $\vec{g}$ indica l'accelerazione del corpo, nota come *accelerazione di gravità*, e $\vec{P}$ il peso, allora:

$$\vec{P} = m\vec{g},$$

dove m è la massa inerziale del corpo. Naturalmente, in presenza di altre forze l'accelerazione che acquista il corpo è diversa da $\vec{g}$, ciò si verifica in particolare quando il corpo cade nell'aria in quanto, agendo su di esso l'attrito dell'aria, l'accelerazione risulta minore di g. Il valore indicato per il modulo di $\vec{g}$ di 9.8 m/s^2 va inteso quale valore medio, in quanto tale accelerazione dipende, in generale, dal luogo in cui si effettua la misura. Ciò implica che il peso non è una caratteristica intrinseca dei corpi come lo è, ad esempio, la massa; infatti il peso di un corpo determinato su un altro pianeta sarebbe differente da quello misurato sulla Terra. Per effetto della rotazione attorno al suo asse, la Terra, in effetti, non costituisce un sistema di riferimento inerziale e qualsiasi sistema di riferimento sulla Terra possiede una accelerazione centrifuga rispetto ad un sistema di riferimento inerziale. Ciò determina una variazione del modulo di $\vec{g}$ dell'ordine dello $0.3\,\%$ tra i poli e l'equatore; tuttavia, vista l'esiguità dell'effetto, questo può essere, in prima approssimazione, trascurato. Fissato il valore di g, la relazione precedente mostra che, considerando i moduli, massa e peso sono proporzionali e, in particolare, a $1\,kg$ corrisponde un peso di $9.8\,N$. Tale relazione giustifica la pratica comune secondo cui i corpi vengono "pesati" in kg. Tuttavia nei calcoli è opportuno distinguere queste due grandezze e non fare uso della massa in kg laddove andrebbe adoperato il peso in N.

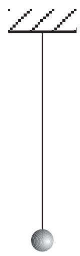
Esempio: Consideriamo un corpo in prossimità della superficie della Terra, ad esempio un satellite; su di esso agisce la forza di gravità $\vec{F}_{12}$, allora, dalla terza legge di Newton, sulla Terra agisce quale reazione, la forza di attrazione del satellite sulla Terra $\vec{F}_{21}$. Per effetto di questa forza la Terra è accelerata verso il satellite tuttavia, a causa della sua elevata massa, tale accelerazione non può essere facilmente misurata.





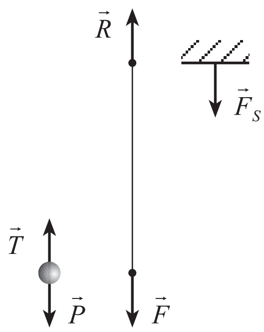
Esempio: Consideriamo un corpo a riposo su un piano orizzontale posto sulla Terra. Su di esso agisce la forza $\vec{P}$ tuttavia, siccome il corpo non è accelerato, evidentemente su di esso agisce un'altra forza uguale in modulo e direzione ma opposta in verso. Tale forza è esercitata dal piano di appoggio e prende il nome di *reazione vincolare* $\vec{N}$. Le forze $\vec{P}$ ed $\vec{N}$ non costituiscono una coppia di azione e reazione in quanto agiscono sullo stesso corpo. Come già visto, la reazione a $\vec{P}$ è applicata alla Terra, la reazione a $\vec{N}$ è rappresentata dalla forza con la quale il corpo agisce sul piano.

Esempio: Consideriamo un corpo sospeso ad un soffitto tramite una corda di massa trascurabile. Sul corpo agiscono la forza peso $\vec{P}$ e la tensione della corda $\vec{T}$; siccome il corpo è in quiete, cioè la sua accelerazione è nulla, deve risultare:



$$\vec{T} = -\vec{P}.$$

Malgrado tale relazione, la tensione della corda non costituisce la reazione a $\vec{P}$ essendo esercitata sullo stesso corpo. La reazione a $\vec{T}$ è la forza $\vec{F}$ che il corpo esercita sulla corda. Contemporaneamente la corda esercita sul soffitto una forza $\vec{F}_S$ e il soffitto, viceversa, esercita sulla corda una forza $\vec{R}$. Le coppie di azione e reazione sono pertanto:



$$\vec{F} = -\vec{T},$$
$$\vec{R} = -\vec{F}_S.$$

Inoltre, poiché la corda è in quiete, risulta:

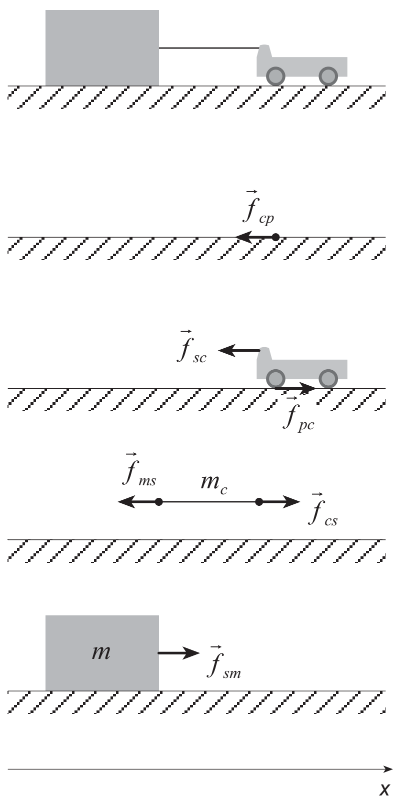
$$\vec{F} = -\vec{R},$$

per cui, confrontando le relazioni precedenti, si ottiene:

$$\vec{P} = -\vec{T} = \vec{F} = -\vec{R} = \vec{F}_S,$$

cioè la corda, se di massa trascurabile rispetto a quella del corpo, trasmette senza modifiche il peso del corpo al vincolo costituito dal soffitto.

Esempio: Consideriamo un corpo tirato da un carrello su un piano orizzontale tramite una corda priva di massa. Supponiamo, per semplicità, che sia trascurabile l'attrito tra il corpo e il piano ma non tra il carrello e il piano. Per muoversi il carrello deve spingere sul piano esercitando una forza $\vec{f}_{cp}$; quale reazione il piano esercita una forza $\vec{f}_{pc}$ sul carrello, così:



$$\vec{f}_{cp} = -\vec{f}_{pc} .$$

Il carrello tira la corda con la forza $\vec{f}_{cs}$, per cui la corda esercita sul carrello la tensione $\vec{f}_{sc}$ con:

$$\vec{f}_{sc} = -\vec{f}_{cs} .$$

La corda tira il corpo con la forza $\vec{f}_{sm}$, per cui sulla corda agisce la reazione del corpo $\vec{f}_{ms}$, con

$$\vec{f}_{ms} = -\vec{f}_{sm} .$$

Siccome la corda è priva di massa, risulta

$$\vec{f}_{ms} = -\vec{f}_{cs} ,$$

inoltre, dalla (4.1) si ha:

$$m\vec{a} = \vec{f}_{sm} ,$$

pertanto

$$m\vec{a} = \vec{f}_{sm} = -\vec{f}_{ms} = -(-\vec{f}_{cs}) = \vec{f}_{cs} ,$$

cioè la corda ha trasmesso al corpo la forza esercitata su di essa dal carrello. Qualora la massa della corda m_c non fosse stata trascurabile, relativamente alla corda potrebbe scriversi l'equazione:

$$m_c a_c = f_{cs} - f_{ms} ,$$

avendo proiettato le forze su un asse orizzontale orientato nel verso del moto. Siccome $f_{sm} = f_{ms}$, segue:

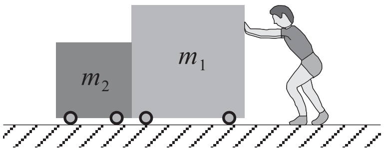
$$m_c a_c = f_{cs} - f_{ms} = f_{cs} - f_{sm} = f_{cs} - ma .$$

D'altra parte, siccome la corda e il corpo si mantengono legati, le reciproche accelerazioni sono uguali, cioè $a_c = a$, così

$$\left(m + m_c\right) a = f_{cs}$$

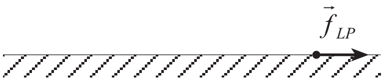
Esempio: Consideriamo la spinta di due corpi su un piano e supponiamo che ciascun corpo sia posto su un carrello in maniera da potersi muovere senza attrito sul piano. Colui che spinge i due corpi esercita sul piano una forza $\vec{f}_{LP}$, per cui il piano reagisce sull'operatore con la forza $\vec{f}_{PL}$ tale che:

$$\vec{f}_{LP} = -\vec{f}_{PL} .$$



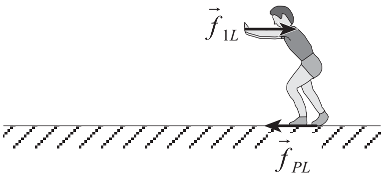
L'operatore spinge sul primo corpo con forza $\vec{f}_{L1}$ e il corpo reagisce con la forza $\vec{f}_{1L}$, dove:

$$\vec{f}_{1L} = -\vec{f}_{L1}.$$



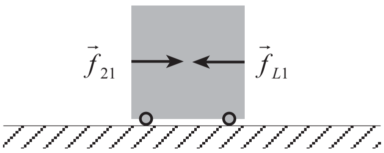
Infine il primo corpo esercita la forza $\vec{f}_{12}$ sul secondo corpo e quest'ultimo esercita sul primo la forza $\vec{f}_{21}$ con

$$\vec{f}_{21} = -\vec{f}_{12}.$$



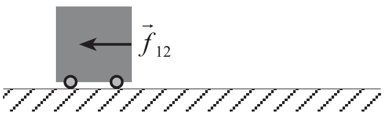
Assumendo quale direzione positiva quella del moto, per i due corpi risulta:

$$m_1 a_1 = f_{L1} - f_{21},$$
$$m_2 a_2 = f_{12};$$



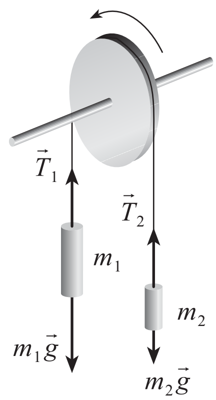
d'altra parte $f_{12} = f_{21}$ e $a_1 = a_2$, così

$$(m_1 + m_2)a = f_{L1},$$



cioè il sistema si comporta come un unico blocco di massa $m_1 + m_2$; le forze interne $\vec{f}_{12}$ ed $\vec{f}_{21}$ non influenzano il moto del sistema annullandosi complessivamente. Il moto si esplica grazie alla reazione del piano $\vec{f}_{PL}$ determinata dall'attrito che, qualora venisse meno, impedirebbe l'azione della forza $\vec{f}_{L1}$.

Esempio: Consideriamo il sistema di figura in cui due corpi di masse m_1 ed m_2 sono collegati fra loro attraverso una corda priva di massa tramite una carrucola libera di ruotare attorno al suo asse. Supponiamo che il moto avvenga nel senso indicato dalla freccia, per cui m_1 si muove verso il basso e m_2 verso l'alto. Applicando la seconda legge di Newton alle due masse si trova:



$$m_1 a = m_1 g - T_1,$$
$$m_2 a = T_2 - m_2 g, \qquad (4.2)$$

dove T_1 e T_2 sono le tensioni esercitate dalla corda su ciascuna massa. Alle tensioni esercitate dalla fune sui corpi corrispondono due forze f_1 e f_2 applicate agli estremi della fune, dove T_1 è la reazione a f_1, e T_2 quella a f_2; applicando la seconda legge di Newton alla corda segue $m_c a = f_1 - f_2$; ma, siccome $m_c = 0$, risulta $f_1 = f_2$, per cui si ha anche

$$T_1 = T_2 \equiv T.$$

L'accelerazione è comune a tutti i corpi essendo questi collegati fra loro. Pertanto, sommando membro a membro le relazioni (4.2), si trova:

$$m_1 a + m_2 a = m_1 g - m_2 g,$$

da cui segue:

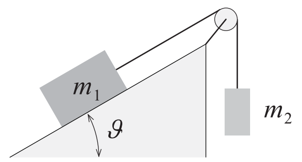
$$a = g\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}.$$

Nota l'accelerazione dei due corpi, attraverso le (4.2) si può ricavare la tensione del filo:

$$T = \frac{2m_1 m_2}{m_1 + m_2} g \cdot$$

Si noti che, se $m_1 > m_2$, l'accelerazione è positiva e la carrucola ruota nel verso indicato dalla freccia.

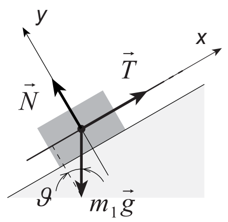
Esempio: Consideriamo il sistema di figura in cui il corpo di massa m_1 può muoversi senza attrito sul piano inclinato e stabiliamone il moto; in figura sono mostrati i diagrammi delle forze. Proiettando sugli assi, per il corpo di massa m_1 si ha:



$$x: \qquad m_1 a = T - m_1 g \sin\vartheta, \tag{4.3}$$

$$y: \qquad 0 = N - m_1 g \cos\vartheta, \tag{4.4}$$

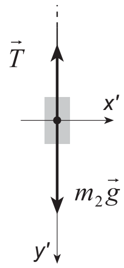
e per il corpo di massa m_2



$$x': \qquad 0 = 0, \tag{4.5}$$

$$y': \qquad m_2 a = m_2 g - T; \tag{4.6}$$

non essendo specificata, su può supporre trascurabile la massa della corda, per cui la tensione da essa esercitata su entrambi i corpi è uguale; inoltre, essendo i corpi collegati, anche le loro accelerazioni sono uguali. In particolare, dalla (4.6) segue:



$$T = m_2 g - m_2 a, \tag{4.7}$$

e sommando membro a membro la (4.3), e la (4.6) si ottiene:

$$m_1 a + m_2 a = m_2 g - m_1 g \sin\vartheta,$$

da cui si ha:

$$a = g\frac{m_2 - m_1 \sin\vartheta}{m_1 + m_2}. \tag{4.8}$$

Si osservi che si è assunto, arbitrariamente, il verso del moto concorde col verso positivo della coordinata x relativa al corpo di massa m_1; tuttavia, se $m_2 < m_1 \sin\vartheta$, il verso diventa quello opposto. Sostituendo la (4.8) nella (4.7) si ricava la tensione della corda:

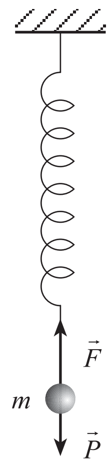
$$T = g\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\left(1 + \sin\vartheta\right).$$

Infine l'equazione (4.4) fornisce l'intensità della reazione vincolare:

$$N = m_1 g \cos\vartheta.$$

4.7 Misura delle forze

Siccome è complicato misurare le accelerazioni, la misura della forza attraverso la misura dell'accelerazione prodotta su corpi di massa nota non è un metodo operativamente praticabile. Solitamente si preferisce correlare la misura delle forze alle variazioni di forma o di dimensioni di un corpo sul quale sono applicate. In particolare tale approccio, detto *metodo statico*, per distinguerlo dall'altro che è denominato *metodo dinamico*, fa uso della caratteristica derivata dalla seconda legge di Newton secondo la quale se un corpo soggetto a delle forze si trova a riposo, la risultante delle forze agenti su di esso è nulla. Se, ad esempio, in un sistema di riferimento inerziale sul corpo in quiete agiscono due forze, necessariamente esse devono avere uguali intensità e direzione ma verso opposto così, scegliendo come unità di misura una di esse, tutte le altre forze possono essere misurate per confronto.



Una molla estesa esercita una forza di richiamo che, entro un certo limite di allungamento, detto *limite di elasticità*, è proporzionale all'allungamento stesso. Se la molla è sospesa verticalmente ad un supporto rigido ed all'altro estremo è collegato un corpo di massa m, in condizioni di equilibrio la forza $\vec{F}$ esercitata dalla molla eguaglierà il peso $\vec{P}$ del corpo. Supponiamo che l'elongazione per un corpo di una certa massa sia x_c allora, se F_c indica l'intensità della forza che provoca tale allungamento, in corrispondenza della applicazione di una generica forza $\vec{F}$ si determinerà un allungamento x tale che:

$$\frac{F}{F_c} = \frac{x}{x_c};$$

così, se F_c è una forza campione, è possibile misurare l'intensità di $\vec{F}$ attraverso una misura dell'allungamento x che essa produce sulla molla:

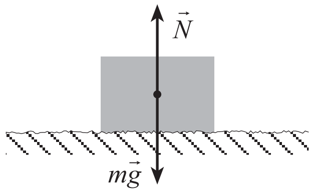
$$F = x\frac{F_c}{x_c}$$

e, in particolare con tale sistema la scala che misura l'elongazione della molla può essere tarata direttamente in unità di forza. Lo strumento che opera secondo questo principio prende il nome di *dinamometro*.

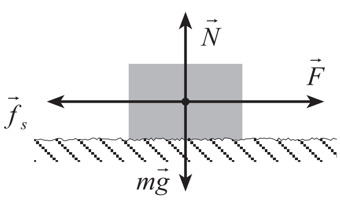
4.8 Forza d'attrito

La forza d'attrito è stata definita operativamente come l'agente che determina l'arresto di un corpo in moto su un piano orizzontale scabro. In generale tale forza si esercita ogni qual volta si ha un contatto tra corpi ed è caratterizzata dall'avere sempre direzione opposta al loro moto relativo. Pertanto le forze di attrito tendono sempre a contrastare il moto relativo tra i corpi. Tuttavia è possibile constatare che le forze di attrito si esplicano tra i corpi anche in assenza di moto relativo.

Consideriamo un corpo di massa m in quiete su una superficie orizzontale scabra. Su di esso agisce la forza peso $m\vec{g}$ e, siccome è in quiete, una reazione vincolare $\vec{N}$ tale che:



$$\vec{N} + m\vec{g} = \vec{0}.$$

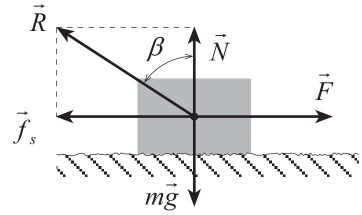


Supponiamo di applicare a tale corpo una forza $\vec{F}$ parallela al piano. Sperimentalmente si osserva che, per intensità di $\vec{F}$ sufficientemente piccole, il corpo rimane in quiete. In tale circostanza si può affermare che la forza $\vec{F}$ è contrastata da una forza di attrito $\vec{f}_s$ esercitata dal piano parallelamente ad $\vec{F}$, ovvero:

$$\vec{N} + m\vec{g} + \vec{F} + \vec{f}_s = \vec{0}\,.$$

In generale, le forze di attrito agenti tra corpi fermi sono dette forze di attrito statico, così $\vec{f}_s$ è una *forza di attrito statico*. Dalla precedente espressione concludiamo che in presenza di una sollecitazione $\vec{F}$ tale da non determinare il moto del corpo, la reazione $\vec{R}$ sviluppata dalla superficie cessa d'essere verticale e in particolare, posto:

$$\vec{R} \equiv \vec{N} + \vec{f}_s\,,$$



risulta:

$$\vec{R} = -\left(m\vec{g} + \vec{F}\right),$$

e l'angolo β formato dalla reazione $\vec{R}$ e la direzione normale vale:

$$\beta = \arctan\left(\frac{f_s}{N}\right).$$

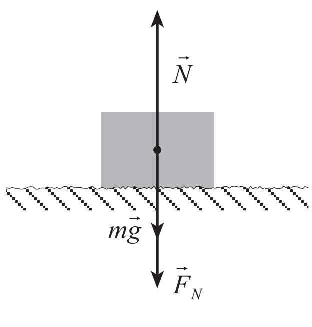
Affinché il corpo resti in quiete sul piano deve risultare:

$$\vec{N} = -m\vec{g},$$
$$\vec{F} = -\vec{f}_s,$$

pertanto l'angolo β vale:

$$\beta = \arctan\left(\frac{F}{mg}\right).$$

Supponiamo di aumentare progressivamente l'intensità della forza $\vec{F}$; sperimentalmente si osserva che il corpo permane nello stato di quiete fintanto F non eccede un valore massimo F_{max} oltre il quale il corpo prende a muoversi. Cioè la superficie scabra può sviluppare una forza di attrito statico la cui massima intensità $f_{s\,max}$ vale:



$$f_{s\,max} = F_{max}\,.$$

Se sul corpo viene esercitata una forza $\vec{F}_N$ verso il basso, ovvero viene premuto contro il piano, si osserva che l'intensità della forza necessaria a mettere in moto il corpo, F_{max}, aumenta col crescere del modulo di $\vec{F}_N$; d'altra parte, siccome la reazione normale esercitata dal piano $\vec{N}$ è pari alla somma $m\vec{g} + \vec{F}_N$, concludiamo che F_{max} è proporzionale al modulo di $\vec{N}$ e quindi anche $f_{s\,max}$ gode della stessa proporzionalità. Tale relazione viene indicata con:

$$f_{s\,max} = \mu_s N$$

in cui μ_s è un coefficiente numerico denominato *coefficiente di attrito statico*. Dalla relazione precedente concludiamo che le componenti f_s ed N di R soddisfano la disuguaglianza:

$$f_s \leq \mu_s N ,$$

quindi:

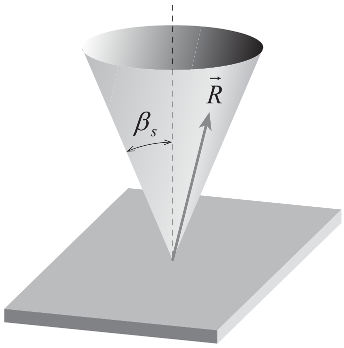
$$\tan\beta = \frac{f_s}{N} \leq \mu_s ,$$

e posto:

$$\beta_s \equiv \arctan \mu_s , \tag{4.9}$$

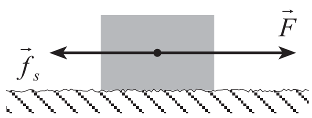
risulta:

$$\beta \leq \beta_s ,$$



cioè la superficie scabra è in grado di sviluppare una reazione $\vec{R}$ tale da essere contenuta in un cono, detto *cono di attrito statico*, che ha il vertice nel punto di contatto della superficie con il corpo (punto materiale) e angolo di semiapertura β_s. Qualora il corpo considerato venga ruotato in modo da appoggiare sul piano una faccia di superficie differente, si osserva che il coefficiente di attrito μ_s resta invariato. Concludiamo quindi che la massima forza di attrito statico che si esplica tra due superfici ha un'intensità proporzionale all'intensità della forza normale tra le due superfici e il coefficiente di proporzionalità μ_s dipende dalla natura e dallo stato di levigatezza delle superfici ma, entro grandi limiti, risulta indipendente dall'area di contatto tra le due superfici. Queste leggi empiriche hanno validità approssimata e, in particolare, non valgono se l'area di contatto è molto piccola (ad esempio se il corpo è appoggiato su lame o su punte), oppure se la forza normale alla superficie d'appoggio, $\vec{F}_N + m\vec{g}$, è così intensa da deformare la superficie.

Supponiamo di applicare al corpo una forza $\vec{F}$ parallela al piano di appoggio, di intensità superiore a $\mu_s mg$. In tale caso, poiché la forza di attrito statico può raggiungere al massimo l'intensità $\mu_s N$, non riesce ad equilibrare la forza $\vec{F}$ e il corpo prende a muoversi. La risultante delle forze agenti sul corpo è $\vec{F} - \vec{f}_{s\,max}$, essendo il peso $m\vec{g}$ equilibrato dalla componente $\vec{N}$ della reazione del vincolo, così l'accelerazione $\vec{a}^*$ cui è soggetto il corpo varrebbe:



$$\vec{a}^* = \frac{1}{m}\left(\vec{F} - \vec{f}_{s\,max}\right),$$

di modulo:

$$a^* = \frac{1}{m}\left(F - f_{s\,max}\right).$$

Tuttavia si osserva sperimentalmente che il moto del corpo è uniformemente accelerato, ma il modulo dell'accelerazione $\vec{a}$ presenta un valore maggiore di a^*, ma minore di F/m:

$$a^* < a < \frac{F}{m}, \tag{4.10}$$

ovvero la risultante delle forze agenti sul corpo in moto ha intensità costante, cioè è indipendente dalla velocità e minore di F. Concludiamo che il moto è contrastato da una forza $\vec{f}_d$ di intensità inferiore a $f_{s\,max}$ che denominiamo *forza di attrito dinamico*. Questa forza segue le stesse leggi dell'attrito statico, ossia è proporzionale all'intensità della forza normale $\vec{N}$ e, entro grandi limiti, è approssimativamente indipendente dalle superfici poste a contatto e dalla velocità relativa dei corpi a contatto. Pertanto, esprimendo il modulo della forza di attrito dinamico come:

$$f_d = \mu_d N, \tag{4.11}$$

dove μ_d è denominato *coefficiente di attrito dinamico*, l'accelerazione assunta dal corpo vale:

$$a = \frac{1}{m}\left(F - f_d\right);$$

così, sostituendo a $f_{s\,max}$ ed a f_d le loro espressioni, la disuguaglianza (4.10) si scrive come:

$$\frac{1}{m}\left(F - \mu_s N\right) < \frac{1}{m}\left(F - \mu_d N\right) < \frac{F}{m},$$

da cui segue:

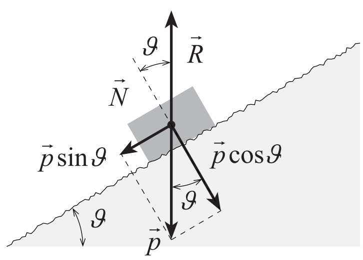
$$0 < \mu_d < \mu_s$$

In particolare, affinché il corpo si muova con velocità costante, cioè $a = 0$, su di esso deve agire una forza $\vec{F}$ di intensità:

$$F = f_d = \mu_d N,$$

così, per determinare il moto di un corpo situato a contatto con una superficie scabra, occorre esercitare una forza di intensità maggiore di quella necessaria per mantenere costante la velocità del corpo, quando questo è già in moto sulla superficie.

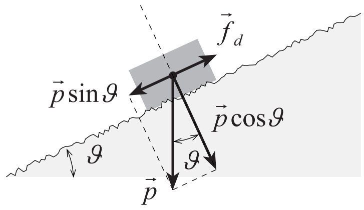
Esempio: Un blocco è posto a riposo su un piano inclinato di un angolo ϑ rispetto ad un asse orizzontale. Aumentando l'angolo di inclinazione del piano si osserva che il blocco prende a muoversi per $\vartheta \geq \vartheta_s$. Da tale osservazione è possibile desumere il coefficiente di attrito tra il blocco e il piano; infatti, quando il corpo è in quiete, il piano esercita una reazione $\vec{R}$ che forma con la direzione normale al piano un angolo pari a quello di inclinazione del piano. Poiché il piano sviluppa una reazione $\vec{R}$ sempre contenuta nel cono di attrito statico, se il corpo prende a muoversi, significa che questo vettore giace sulla falda di tale cono, ovvero l'angolo ϑ_s coincide con l'angolo β_s della relazione (4.9), per cui il coefficiente di attrito statico



può essere dedotto dalla medesima relazione come:

$$\mu_s = \tan\vartheta_s .$$

Con lo stesso sistema è possibile valutare il coefficiente di attrito dinamico. Infatti, posto in moto il corpo per $\vartheta \geq \vartheta_s$, l'angolo ϑ viene successivamente ridotto in modo che il corpo si muova di moto rettilineo uniforme; in tale circostanza risulta:



$$mg\sin\vartheta_d = f_d = \mu_d mg\cos\vartheta_d ,$$

dove ϑ_d è l'angolo in corrispondenza del quale il corpo scivola con velocità costante, allora:

$$\mu_d = \tan\vartheta_d ,$$

dove, siccome $\mu_s > \mu_d$, segue:

$$\vartheta_s > \vartheta_d .$$

Quando un corpo si muove in un fluido con velocità $\vec{v}$ è soggetto ad una forza d'attrito che, in generale, si esprime come:

$$\vec{f}_v = -\gamma v^\alpha \frac{\vec{v}}{v} ,$$

dove γ è una costante che dipende dalla forma del corpo e α è un coefficiente numerico, con $\alpha > 1$. Per piccole velocità è possibile assumere per l'intensità di tale forza l'espressione:

$$f_v = -\gamma v . \tag{4.12}$$

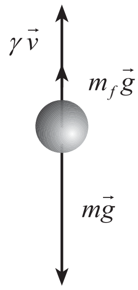
L'attrito che si esplica sul corpo per effetto del moto nel fluido è detto *viscosità* e il fattore γ può esprimersi come:

$$\gamma \equiv k\eta ,$$

dove η è detto *coefficiente di viscosità* e k dipende dalla forma del corpo (ad esempio, per una sfera di raggio R risulta pari a $6\pi R$). L'equazione del moto di un corpo sottoposto ad una forza $\vec{F}$ in un mezzo viscoso è:

$$m\vec{a} = \vec{F} - \gamma\vec{v} ;$$

se l'intensità di $\vec{F}$ è costante, l'accelerazione del corpo determina un aumento progressivo della sua velocità e, di conseguenza, della forza di attrito viscoso. Ciò continua fino a che il secondo membro dell'equazione precedente si annulla, circostanza a partire dalla quale si annulla l'accelerazione e, di conseguenza, la velocità del corpo diventa costante. Il valore di tale *velocità limite* o di regime è:



$$v_L = \frac{F}{\gamma} .$$

Ad esempio, in un moto di caduta libera in aria, per azione della gravità, sul corpo agiscono la forza peso $m\vec{g}$, la forza di attrito viscoso $\gamma\vec{v}$ e la spinta idrostatica $m_f\vec{g}$, dove m_f è la massa d'aria spostata dal corpo, come indicato in figura, così l'equazione del moto è:

$$m\vec{a} = m\vec{g} - m_f\vec{g} - \gamma\vec{v} \ ,$$

e la velocità limite è:

$$v_L = g\frac{m - m_f}{\gamma}$$

che, nel caso in cui $m_f << m$, diventa pari a mg/γ.

Esempio: Stabiliamo la legge di variazione della velocità per un corpo di massa pari a $60\,kg$, in caduta libera per effetto della gravità in un fluido con coefficiente di viscosità pari a $2\times10^{-3}\ kg/s$, supponendo che il corpo parta da fermo (assumiamo per semplicità che sia $m_f << m$). Esprimendo l'accelerazione attraverso la velocità, l'equazione del moto si scrive:

$$m\frac{dv(t)}{dt} = mg - \gamma v(t). \tag{4.13}$$

Per risolvere numericamente tale equazione sostituiamo alla derivata dv/dt l'accelerazione media calcolata tra l'istante t e l'istante $t + \Delta t$:

$$m\frac{v(t+\Delta t) - v(t)}{\Delta t} = mg - \gamma v(t);$$

da tale relazione segue[1]:

$$v(t+\Delta t) = g\Delta t - v(t)\left(\frac{\gamma}{m}\Delta t - 1\right).$$

Naturalmente tale equazione risulta tanto più precisa quanto più Δt è piccolo; assumendo, ad esempio, $\Delta t \equiv 0.15\,s$ e partendo da una velocità iniziale $v(0)$ nulla si trovano i seguenti valori di velocità:

$t[ms]$	$v[cm/s]$
0	0.0
15	14.7
30	22.2
45	25.7
60	27.6
75	28.5
90	29.0
105	29.2
120	29.3
135	29.4
150	29.4
165	29.4
180	29.4
195	29.4

Si noti che la velocità raggiunge un valore asintotico corrispondente alla velocità limite, infatti:

[1] Una relazione di questo tipo prende il nome di *equazione alle differenze*.

$$v_L = \frac{mg}{\gamma} \approx 29.4\, cm/s.$$

L'equazione differenziale (4.13) può essere risolta anche analiticamente per separazione di variabili, ovvero si può scrivere:

$$\frac{dv}{dt} = g - \frac{\gamma}{m} v = -\frac{\gamma}{m}\left(v - \frac{mg}{\gamma}\right),$$

e quindi:

$$\frac{dv}{v - \frac{mg}{\gamma}} = -\frac{\gamma}{m} dt,$$

da cui segue:

$$\int_0^v \frac{d\xi}{\xi - \frac{mg}{\gamma}} = -\frac{\gamma}{m} \int_0^t d\zeta,$$

avendo assunto $v(0) = 0$. Svolgendo gli integrali si ottiene:

$$\ln\left(\frac{v - \frac{mg}{\gamma}}{-\frac{mg}{\gamma}}\right) = -\frac{\gamma}{m} t,$$

e, passando agli esponenziali:

$$v(t) = \frac{mg}{\gamma}\left(1 - e^{-t\gamma/m}\right).$$

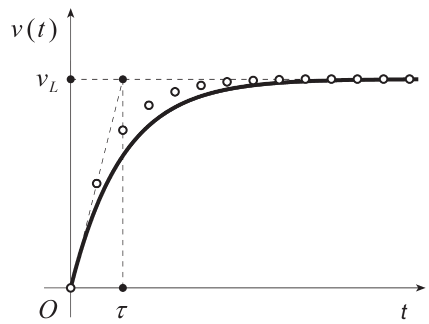
Da tale relazione ricaviamo v_L come limite di $v(t)$ per $t \to \infty$:

$$v_L = \lim_{t\to\infty} v(t) = \frac{mg}{\gamma} \approx 29.4\, cm/s.$$

Si definisce *tempo di rilassamento* τ, il tempo necessario affinché $v(t)$ differisca da v_L di un fattore pari a $1/e$, dove $e = 2.71828...$, ovvero:

$$v(\tau) = v_L\left(1 - \frac{1}{e}\right),$$

per cui, nel caso dell'esempio



$$\tau = \frac{m}{\gamma} \approx 30\, ms.$$

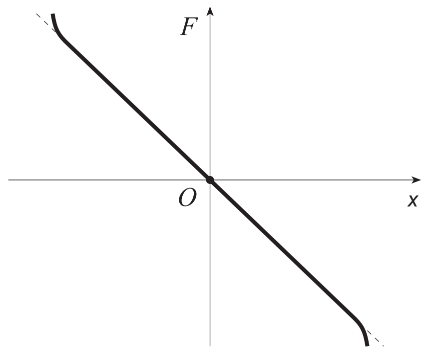
Così la legge di variazione della velocità può esprimersi come:

$$v(t) = v_L\left(1 - e^{-t/\tau}\right);$$

In figura è mostrato il grafico della velocità del corpo in funzione del tempo, ricavato sia attraverso il metodo approssimato che con la procedura analitica. Si noti che in corrispondenza del tempo di rilassamento la tangente alla curva $v = v(t)$, calcolata per $t = 0$, interseca l'asintoto $v \equiv v_L$; pertanto il tempo di rilassamento fornisce un'indicazione del tempo che impiega la velocità a differire dal valore limite per meno di una quantità prefissata.

4.9 Moti oscillatori

Consideriamo un corpo collegato ad un estremo di una molla il cui altro estremo è connesso ad un supporto rigido. Come già visto, entro i limiti di elasticità la molla esercita sul corpo una forza di richiamo $\vec{F}$ proporzionale all'allungamento (o compressione) x della molla. Se indichiamo con k il relativo coefficiente di proporzionalità, assumendo che la molla sia estesa lungo l'asse x di un arbitrario sistema di riferimento, si ha:



$$\vec{F} = -kx\,\hat{x}. \tag{4.14}$$

Tale espressione prende il nome di *legge di Hooke* e la sua validità è limitata unicamente a piccoli valori dell'elongazione rispetto all'intera lunghezza della molla. Un punto materiale soggetto a questo tipo forza prende il nome di *oscillatore armonico*. L'equazione del moto dell'oscillatore armonico per un corpo di massa m è:

$$m\vec{a} = -kx\,\hat{x};$$

siccome $\vec{a} \propto \hat{x}$, il moto si esplica lungo la direzione x così, moltiplicando ambo i membri scalarmente per $\hat{x}$, indicando con a la proiezione del vettore $\vec{a}$ lungo la direzione x, si ha:

$$ma = -kx,$$

ovvero:

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t).$$

Per risolvere questa equazione poniamo:

$$\omega_0 \equiv \sqrt{\frac{k}{m}},$$

allora l'equazione diviene:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega_0^2 x(t). \tag{4.15}$$

La soluzione $x(t)$ di questa equazione è rappresentata da una funzione la cui derivata seconda $d^2x(t)/dt^2$ è proporzionale all'opposto della funzione $x(t)$ stessa. Tale proprietà appartiene, ad esempio, alla funzione seno, così possiamo provare sotto quali condizioni la funzione:

$$x(t) = X_0 \sin\left(\omega_0 t + \phi\right) \tag{4.16}$$

soddisfa la (4.15), dove X_0 e ϕ sono costanti determinate dalle condizioni iniziali:

$$\begin{aligned} &x(0) \equiv x_0, \\ &\left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0} \equiv v_0. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Per verificare la validità dell'ipotesi sostituiamo $x(t)$ dato dalla (4.16) nell'equazione (4.15); a tale scopo calcoliamone le derivate:

$$\begin{aligned} &\frac{dx(t)}{dt} = \omega_0 X_0 \cos\left(\omega_0 t + \phi\right), \\ &\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -\omega_0^2 X_0 \sin\left(\omega_0 t + \phi\right) = -\omega_0^2 x(t). \end{aligned}$$

Poiché questo ultimo calcolo conduce ad un'identità, possiamo ritenere che la (4.16) è la soluzione cercata. Valutiamo ora la relazione esistente tra le costanti X_0 e ϕ e le condizioni iniziali; dalla (4.16) e dalle (4.17) risulta:

$$\begin{aligned} &x(0) = X_0 \sin\phi \equiv x_0, \\ &\left.\frac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0} = \omega_0 X_0 \cos\phi \equiv v_0; \end{aligned} \tag{4.18}$$

facendo il rapporto membro a membro si trova:

$$\tan\phi = \frac{x_0\omega_0}{v_0}$$

ed elevando al quadrato ambo i membri di ciascuna delle (4.18) e sommando membro a membro si ha:

$$X_0^2 = x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2},$$

da cui segue:

$$X_0 = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}},$$

così la (4.16) può esprimersi attraverso le condizioni iniziali (4.17) come:

$$x(t) = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega_0^2}} \sin\left[\omega_0 t + \arctan\left(\frac{x_0\omega_0}{v_0}\right)\right].$$

Poiché il moto del corpo è descritto dalla funzione seno, esso sarà di tipo periodico; sia

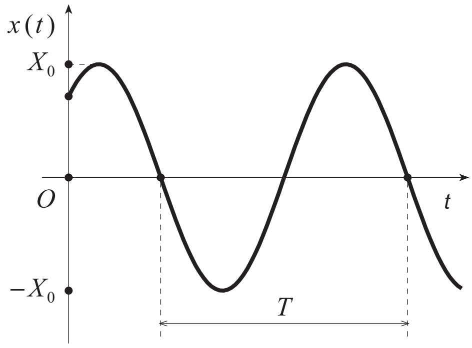
$$\zeta \equiv \omega_0 t + \phi ,$$

allora la funzione $x(t)$ si ripeterà dopo un tempo t' tale che:

$$\zeta + 2\pi = \omega_0 t' + \phi$$

così, eliminando la variabile ζ tra queste due espressioni, segue:

$$2\pi = \omega_0 \left(t' - t\right) = \omega_0 T ,$$



dove T è il periodo necessario affinché il corpo, a partire da una certa posizione, torni nella stessa posizione, così in analogia alla (2.32), da tale espressione segue che il periodo vale $2\pi/\omega_0$ e di conseguenza la frequenza del moto, che esprime il numero di oscillazioni complete compiute dal corpo nell'unità di tempo, vale $\omega_0/(2\pi)$. La relazione (4.16) può anche esprimersi come:

$$x(t) = X_0 \sin\left(\omega_0 t + \phi\right) = X_0 \sin\left[\omega_0 \left(t + \frac{\phi}{\omega_0}\right)\right] = X_0 \sin\left[\omega_0 \left(t + t_0\right)\right];$$

dove si è posto:

$$t_0 \equiv \frac{\phi}{\omega_0} ,$$

in questa maniera il tempo t_0 può essere interpretato come il *tempo di ritardo* dell'oscillazione rispetto all'istante di tempo iniziale $t = 0$.

In una situazione realistica l'oscillatore armonico viene frenato da forze d'attrito. Ciò determina una progressiva diminuzione dell'ampiezza delle oscillazioni sino a quando non cessano del tutto; tale sistema prende il nome di *oscillatore smorzato*. Per descrivere questo oscillatore supponiamo che sul corpo di massa m oltre alla forza elastica data dalla (4.14), agisca una forza di tipo viscoso opposta alla velocità, come nella (4.12). Pertanto l'equazione del moto dell'oscillatore smorzato è:

$$m\vec{a} = -kx\hat{x} - \gamma\vec{v} ;$$

moltiplicando ambo i membri per $\hat{x}$ ed esplicitando le quantità l'equazione precedente diventa:

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2} = -kx(t) - \gamma\frac{dx(t)}{dt} ,$$

che scriviamo nella forma:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\frac{\gamma}{m}\frac{dx(t)}{dt}+\frac{k}{m}x(t)=0\,. \tag{4.19}$$

Posto:

$$\tau\equiv\frac{2m}{\gamma},$$

l'equazione (4.19) diventa:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\frac{2}{\tau}\frac{dx(t)}{dt}+\omega_0^2x(t)=0\,; \tag{4.20}$$

si osservi come, nel limite $\tau\to\infty$, ossia per $\gamma\to 0$, tale equazione diventa uguale a quella dell'oscillatore armonico (4.15). Verifichiamo sotto quali condizioni la funzione $e^{\lambda t}$ è soluzione dell'equazione (4.20); sostituendo tale funzione nella (4.20), si ha:

$$\lambda^2e^{\lambda t}+\frac{2\lambda}{\tau}e^{\lambda t}+\omega_0^2e^{\lambda t}=0\,;$$

dividendo ambo i membri per $e^{\lambda t}$, che è diverso da zero per ogni valore di t, si trova l'equazione algebrica:

$$\lambda^2+\frac{2\lambda}{\tau}+\omega_0^2=0\,,$$

che prende il nome di *equazione caratteristica* associata all'equazione differenziale considerata. Tale equazione ammette le soluzioni:

$$\lambda_1=\frac{-2/\tau-\sqrt{4/\tau^2-4\omega_0^2}}{2}=-\frac{1}{\tau}-\frac{1}{\tau}\sqrt{1-\omega_0^2\tau^2}\,,$$
$$\lambda_2=\frac{-2/\tau+\sqrt{4/\tau^2-4\omega_0^2}}{2}=-\frac{1}{\tau}+\frac{1}{\tau}\sqrt{1-\omega_0^2\tau^2}\,.$$

La soluzione dell'equazione differenziale (4.20) e di conseguenza la natura del moto dipendono dal segno del discriminante dell'equazione caratteristica:

$$\Delta\equiv 1-\omega_0^2\tau^2\,.$$

In particolare possono aversi tre casi corrispondenti alle circostanze in cui le radici dell'equazione caratteristica sono reali e distinte o sono reali e coincidenti o sono complesse e coniugate. Esaminiamo separatamente le tre circostanze.

Nel caso in cui il discriminante dell'equazione caratteristica è positivo, cioè $1-\omega_0^2\tau^2>0$, siccome $\omega_0^2\tau^2>0$, risulta $1-\omega_0^2\tau^2<1$, pertanto entrambe le radici dell'equazione caratteristica sono negative; così, posto:

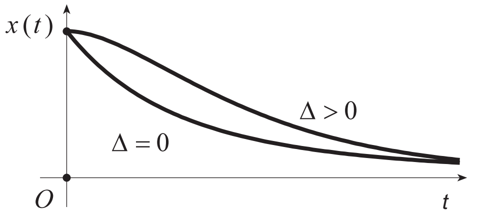
$$\lambda_1 \equiv -|\lambda_1|,$$
$$\lambda_2 \equiv -|\lambda_2|,$$

le due soluzioni dell'equazione differenziale (4.20) sono $e^{-|\lambda_1|t}$ e $e^{-|\lambda_2|t}$ e la soluzione generale è rappresentata da una combinazione lineare di tali soluzioni, cioè:

$$x(t) = c_1 e^{-|\lambda_1|t} + c_2 e^{-|\lambda_2|t},$$

dove le costanti c_1 e c_2 sono determinate a partire dalle condizioni iniziali. A tale soluzione corrisponde un *moto sovrasmorzato*, privo di oscillazioni, cioè in questa circostanza la massa m spostata dalla sua posizione di equilibrio vi ritorna senza compiere oscillazioni.

Nel caso in cui il discriminante dell'equazione caratteristica è nullo, cioè $1-\omega_0^2\tau^2 = 0$, si può provare che le due soluzioni dell'equazione differenziale (4.20) sono $e^{-|\lambda|t}$ e $te^{-|\lambda|t}$, dove λ vale $-1/\tau$, così la soluzione generale si scrive:



$$x(t) = e^{-|\lambda|t}\left(c_1 + c_2 t\right),$$

in cui le costanti c_1 e c_2 sono determinate a partire dalle condizioni iniziali. Anche in questa circostanza si ha un *moto smorzato* privo di oscillazioni.

Se il discriminante dell'equazione caratteristica è negativo, cioè $1-\omega_0^2\tau^2 < 0$, le due soluzioni di tale equazione si possono esprimere nella forma:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{1}{\tau} \pm \frac{1}{\tau}\sqrt{1-\omega_0^2\tau^2} = -\frac{1}{\tau} \pm \frac{1}{\tau}\sqrt{-\left|1-\omega_0^2\tau^2\right|} = -\frac{1}{\tau} \pm j\frac{1}{\tau}\sqrt{\omega_0^2\tau^2 - 1} = -\frac{1}{\tau} \pm j\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{\omega_0^2\tau^2}} =$$
$$= -\frac{1}{\tau} \pm j\omega,$$

dove $j \equiv \sqrt{-1}$ è l'unità immaginaria e:

$$\omega \equiv \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{\omega_0^2\tau^2}}; \tag{4.21}$$

allora le soluzioni dell'equazione differenziale (4.20), $x_1(t) = e^{\lambda_1 t}$ e $x_2(t) = e^{\lambda_2 t}$, possono scriversi come:

$$x_1(t) = e^{\lambda_1 t} = e^{\left(-\frac{1}{\tau}+j\omega\right)t} = e^{-t/\tau}e^{j\omega t} = e^{-t/\tau}\left(\cos\omega t + j\sin\omega t\right),$$
$$x_2(t) = e^{\lambda_2 t} = e^{\left(-\frac{1}{\tau}-j\omega\right)t} = e^{-t/\tau}e^{-j\omega t} = e^{-t/\tau}\left(\cos\omega t - j\sin\omega t\right).$$

Poiché una qualsiasi combinazione lineare di queste soluzioni è ancora soluzione dell'equazione differenziale (4.20), consideriamo le due combinazioni:

$$z_1(t) \equiv \frac{1}{2}\left[x_1(t) + x_2(t)\right] = \frac{1}{2} 2e^{-t/\tau} \cos\omega t = e^{-t/\tau} \cos\omega t,$$
$$z_2(t) \equiv \frac{1}{2j}\left[x_1(t) - x_2(t)\right] = \frac{1}{2j} 2je^{-t/\tau} \sin\omega t = e^{-t/\tau} \sin\omega t;$$

una combinazione lineare di $z_1(t)$ e $z_2(t)$ può rappresentare la soluzione generale della (4.20):

$$x(t) = c_1 e^{-t/\tau} \cos\omega t + c_2 e^{-t/\tau} \sin\omega t = e^{-t/\tau}\left(c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t\right). \qquad (4.22)$$

Siccome le due costanti c_1 e c_2 possono essere espresse in una qualsiasi forma, poniamo:

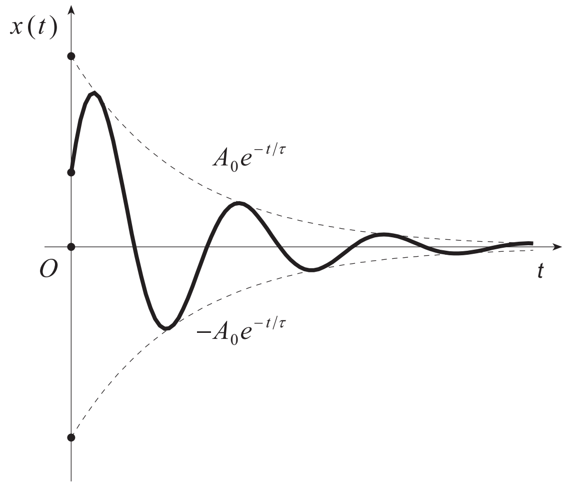
$$c_1 \equiv A_0 \sin\phi,$$
$$c_2 \equiv A_0 \cos\phi$$

così, sostituendo nella (4.22), si ha:

$$x(t) = e^{-t/\tau}\left(A_0 \sin\phi \cos\omega t + A_0 \cos\phi \sin\omega t\right) =$$
$$= A_0 e^{-t/\tau} \sin\left(\omega t + \phi\right),$$

ovvero:

$$x(t) = A_0 e^{-t/\tau} \sin\left(\omega t + \phi\right).$$



In questo caso il corpo, spostato dalla sua posizione di equilibrio tende a tornarvi attraverso un *moto oscillatorio* con ampiezza decrescente. Si osservi che, nel limite $\tau \to \infty$ dalla (4.21) si ottiene $\omega = \omega_0$, cioè la pulsazione coincide con quella dell'oscillatore armonico.

Consideriamo un corpo di massa m soggetto oltre che alla forza elastica (4.14) ed alla forza di attrito viscoso (4.12) anche ad una forza che varia col tempo con legge sinusoidale, $\vec{F}_0 \sin\omega t$; tale sistema prende il nome di *oscillatore forzato*. L'equazione del moto sarà:

$$m\vec{a} = -kx\hat{x} - \gamma\vec{v} + \vec{F}_0 \sin\omega t,$$

ovvero, indicando con F_0 la proiezione del vettore $\vec{F}_0$ lungo la direzione x ed esplicitando le quantità, si ottiene:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{\gamma}{m}\frac{dx(t)}{dt} + \frac{k}{m}x(t) = \frac{F_0}{m}\sin\omega t,$$

che possiamo scrivere nella forma:

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{2}{\tau}\frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = \frac{F_0}{m}\sin\omega t. \qquad (4.23)$$

Dalla teoria delle equazioni differenziali segue che la soluzione $x(t)$ della (4.23) può esprimersi come somma della soluzione $x_O(t)$ dell'equazione omogenea associata alla (4.23) e di una soluzione particolare $x_{NO}(t)$ della (4.23) stessa:

$$x(t) = x_O(t) + x_{NO}(t)\ .$$

L'equazione omogenea associata alla (4.23) è rappresentata dalla (4.20) che, per quanto appena visto, ha soluzioni che si annullano per tempi lunghi, cioè in generale risulta

$$\lim_{t\to\infty} x_O(t) = 0\ .$$

Pertanto la soluzione $x_{NO}(t)$ va interpretata come la soluzione a regime della (4.23), corrispondente alla situazione in cui il transitorio può ritenersi esaurito. Verifichiamo che, in corrispondenza del termine non omogeneo $\left(F_0/m\right)\sin\omega t$, la soluzione a regime della (4.23) assume la forma:

$$x(t) = x_{NO}(t) = A\sin(\omega t + \phi)\ .$$

Poiché:

$$\begin{aligned}\frac{dx(t)}{dt} &= \omega A\cos(\omega t + \phi),\\ \frac{d^2x(t)}{dt^2} &= -\omega^2 A\sin(\omega t + \phi),\end{aligned}$$

sostituendo nella (4.23), si trova:

$$-\omega^2 A\sin(\omega t + \phi) + \frac{2}{\tau}\omega A\cos(\omega t + \phi) + \omega_0^2 A\sin(\omega t + \phi) = \frac{F_0}{m}\sin\omega t$$

e, raggruppando i termini $\sin(\omega t + \phi)$ e $\cos(\omega t + \phi)$, si ha:

$$\left(-\omega^2 A + \omega_0^2 A\right)\sin(\omega t + \phi) + \frac{2}{\tau}\omega A\cos(\omega t + \phi) = \frac{F_0}{m}\sin\omega t\ ;$$

sviluppando quindi $\sin(\omega t + \phi)$ e $\cos(\omega t + \phi)$ risulta:

$$\left(-\omega^2 A + \omega_0^2 A\right)\left(\sin\omega t\cos\phi + \cos\omega t\sin\phi\right) + \frac{2}{\tau}\omega A\left(\cos\omega t\cos\phi - \sin\omega t\sin\phi\right) = \frac{F_0}{m}\sin\omega t\ ,$$

ovvero:

$$A\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\cos\phi - \frac{2}{\tau}\omega\sin\phi\right]\sin\omega t + A\left[\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\sin\phi + \frac{2}{\tau}\omega\cos\phi\right]\cos\omega t = \frac{F_0}{m}\sin\omega t\ .$$

Tale identità è soddisfatta se:

$$A\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\cos\phi - A\frac{2}{\tau}\omega\sin\phi \equiv \frac{F_0}{m},$$
$$A\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\sin\phi + A\frac{2}{\tau}\omega\cos\phi \equiv 0; \tag{4.24}$$

valutando il quadrato di ambo i membri di queste equazioni, si ha:

$$A^2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2\cos^2\phi + A^2\frac{4}{\tau^2}\omega^2\sin^2\phi - A^2\frac{4\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\omega}{\tau}\sin\phi\cos\phi = \frac{F_0^2}{m^2},$$
$$A^2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2\sin^2\phi + A^2\frac{4}{\tau^2}\omega^2\cos^2\phi + A^2\frac{4\left(\omega_0^2-\omega^2\right)\omega}{\tau}\sin\phi\cos\phi = 0$$

e sommando membro a membro, segue:

$$A^2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2 + \frac{4A^2}{\tau^2}\omega^2 = \frac{F_0^2}{m^2},$$

da cui si ottiene:

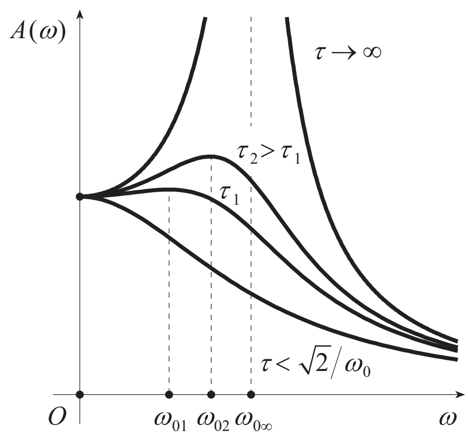
$$A = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\dfrac{4\omega^2}{\tau^2}}} \tag{4.25}$$

e sostituendo, infine, in una delle (4.24) si ha inoltre:

$$\tan\phi = -\frac{2\omega}{\tau\left(\omega_0^2-\omega^2\right)}. \tag{4.26}$$

Da tali relazioni si evince che ampiezza e fase dell'oscillazione forzata dipendono dalla pulsazione ω della sollecitazione; inoltre sia l'ampiezza che la fase sono indipendenti dalle condizioni iniziali che influenzano il solo transitorio. Per stabilire quando l'ampiezza $A = A(\omega)$ è massima, calcoliamo la derivata rispetto a ω del radicando al denominatore della (4.25) valutandone il minimo:

$$\frac{d}{d\omega}\left[\left(\omega_0^2-\omega^2\right)^2+\frac{4\omega^2}{\tau^2}\right] = 2\left(\omega_0^2-\omega^2\right)(-2\omega)+\frac{8\omega}{\tau^2} \equiv 0;$$



tale identità è soddisfatta quando la pulsazione ω assume il valore:

$$\omega_R \equiv \omega_0\sqrt{1-\frac{2}{\omega_0^2\tau^2}},$$

che prende il nome di *pulsazione di risonanza*. Si noti che l'espressione precedente ha significato solo se $\tau > \sqrt{2}/\omega_0$ altrimenti $A(\omega)$ ha un andamento monotono decrescente. Inoltre, nel limite di piccolo smorzamento, per $\tau \to \infty$, si ha:

$$\lim_{\tau\to\infty} \omega_R = \omega_0 ,$$

cioè la pulsazione di risonanza coincide con quella di oscillazione libera. In figura è mostrato il grafico della funzione $A = A(\omega)$ per vari valori del parametro τ . In corrispondenza della pulsazione di risonanza l'ampiezza (4.25) e la fase (4.26) della soluzione a regime della (4.23) diventano rispettivamente:

$$\begin{aligned} A(\omega_R) &= \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_R^2\right)^2+\frac{4\omega_R^2}{\tau^2}}} = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2-\omega_R^2+\frac{2}{\tau^2}\right)^2+\frac{4}{\tau^2}\left(\omega_0^2-\frac{2}{\tau^2}\right)}} = \\ &= \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{\frac{4}{\tau^4}+\frac{4\omega_0^2}{\tau^2}-\frac{8}{\tau^4}}} = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{\frac{4\omega_0^2}{\tau^2}-\frac{4}{\tau^4}}} = \frac{\tau F_0}{2m}\frac{1}{\sqrt{\omega_0^2-\frac{1}{\tau^2}}} , \end{aligned}$$

$$\tan\phi(\omega_R) = -\frac{2\omega_0\sqrt{1-\frac{2}{\omega_0^2\tau^2}}}{\tau\left[\omega_0^2-\left(\omega_0^2-\frac{2}{\tau^2}\right)\right]} = -\frac{2\omega_0\sqrt{1-\frac{2}{\omega_0^2\tau^2}}}{\frac{2}{\tau}} = -\omega_0\tau\sqrt{1-\frac{2}{\omega_0^2\tau^2}} = -\sqrt{\omega_0^2\tau^2-2}.$$

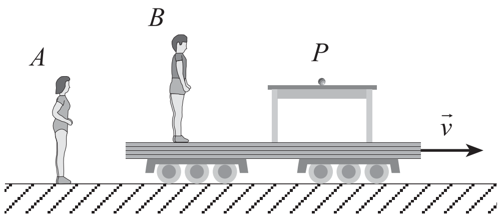
In particolare, nel limite di piccolo smorzamento si ha:

$$\lim_{\tau\to\infty} A(\omega_R) = +\infty ,$$

cioè il picco della risonanza in tali condizioni si ha alla pulsazione ω_0 ed è infinito.

4.10 Sistemi non inerziali e forze fittizie

In un sistema di riferimento inerziale le forze agenti su un punto materiale possono sempre essere ricondotte ad altri sistemi fisici presenti nell'ambiente in cui si esplica il moto. Lo stesso non accade nei sistemi di riferimento non inerziali; ad esempio, se ci si muove su un treno, quando questo frena o accelera bruscamente o curva, trasformandosi quindi in un sistema di riferimento non inerziale, si avverte una spinta in avanti o indietro o di lato. Si avverte, cioè, una forza la cui origine non è attribuibile ad alcun agente esterno; essa è conseguenza della non inerzialità del sistema di riferimento. Le forze che presentano queste caratteristiche prendono il nome di forze fittizie o apparenti.



Consideriamo, ad esempio, un sistema di riferimento originariamente in moto rettilineo uniforme rispetto ad un sistema di riferimento inerziale. Sul sistema in moto, ad esempio un treno, un osservatore *B* ha disposto su un tavolo orizzontale privo di attrito una palla da biliardo *P*; siccome il treno si muove di moto rettilineo uniforme con velocità $\vec{v}$, la palla rimane a riposo sul piano. Dal punto di vista di un osservatore stazionario *A* la palla, che non è vincolata nella direzione del moto, si muove di moto rettilineo uniforme con la stessa velocità $\vec{v}$ del treno. Supponiamo ora che il treno subisca una brusca frenata. Dal punto di vista dell'osservatore *A*, siccome la palla non è vincolata nella direzione del moto, continuerà a muoversi nella direzione originaria con la stessa velocità $\vec{v}$; quindi tra il treno che, decelerato, si arresta e la palla, si genera una velocità relativa conseguente al fatto che, mentre il treno decelera, la palla continua a muoversi di moto rettilineo uniforme. L'osservatore *B* invece vede che, rispetto al treno cui è solidale, la palla subisce un'accelerazione poiché da ferma prende a muoversi. Siccome la variazione della velocità di un corpo viene originata dall'azione su di esso di una forza, l'osservatore *B* attribuisce l'accelerazione della palla ad una forza, sebbene non sia identificabile nell'ambiente circostante di *B* alcun agente che ne possa essere responsabile. Una forza con tale caratteristica è detta *forza fittizia* o apparente o *forza d'inerzia*. L'osservatore *B* è certo che si tratti di una forza poiché, qualora ne voglia annullare l'effetto, mantenendo la palla a riposo nel suo sistema di riferimento, deve esercitare su di essa una forza. Dal punto di vista dell'osservatore *A* questa forza serve a frenare la palla contemporaneamente al treno mentre per *B* questa forza equilibra la forza di inerzia consentendo alla palla di restare a riposo nel sistema non inerziale, contrastando l'azione della forza di inerzia stessa.

Per formalizzare queste osservazioni consideriamo un sistema di riferimento inerziale che, convenzionalmente denominiamo "fisso" ed un sistema di riferimento non inerziale che denominiamo "mobile". Supponiamo che il sistema mobile si muova rispetto a quello fisso di moto traslatorio con velocità non costante. Se un punto materiale *P* di massa *m* si muove nel sistema fisso sotto l'azione di una forza $\vec{F}$, la sua accelerazione $\vec{a}$ soddisferà, per un sistema fisso, la relazione (4.1). Siccome la velocità nel sistema mobile non è costante, l'accelerazione $\vec{a}'$ di *P* in tale sistema è diversa dall'accelerazione $\vec{a}$ nel sistema fisso. In particolare risulta:

$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{A},$$

dove $\vec{A}$ è l'accelerazione del sistema mobile. Sostituendo questa relazione nella (4.1), si ha:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\left(\vec{a}' + \vec{A}\right) = m\vec{a}' + m\vec{A},$$

cioè

$$\vec{F} - m\vec{A} = m\vec{a}'.$$

Quindi eseguendo una misura della forza nel suo sistema di riferimento non inerziale l'osservatore mobile trova un risultato diverso dalla forza $\vec{F}$ misurata nel sistema inerziale. La forza osservata è pari a $\vec{F}$ diminuita della quantità $m\vec{A}$ che rappresenta la forza di inerzia. Tale forza è pari al prodotto della massa del corpo per l'accelerazione del sistema mobile cambiata di segno. Notiamo infine che, qualora si voglia mantenere in quiete il punto *P* nel sistema mobile, ovvero si voglia $\vec{a}' = \vec{0}$, deve essere $\vec{F} - m\vec{A} = \vec{0}$; cioè al punto materiale deve essere applicata una forza reale $\vec{F}$ pari a $m\vec{A}$. Queste considerazioni possono essere facilmente generalizzate al caso in cui il sistema non inerziale si muova di moto qualunque. In tale circostanza, dalla relazione (3.17) l'accelerazione $\vec{a}$ di *P* nel sistema di riferimento inerziale può esprimersi come:

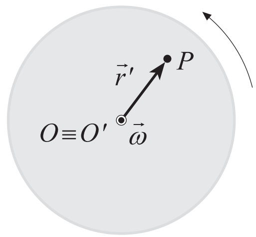
$$\vec{a} = \vec{a}' + \vec{a}_t + \vec{a}_c = \vec{a}' + \left[\vec{A} + \vec{\alpha}\times\vec{r}' + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'\right)\right] + 2\vec{\omega}\times\vec{v}',$$

dove $\vec{r}'$ e $\vec{v}'$ sono, rispettivamente, il vettore posizione e la velocità di *P* nel sistema di riferimento non inerziale e $\vec{\omega}$ e $\vec{\alpha}$ sono, rispettivamente, la velocità e l'accelerazione angolare con cui il sistema mobile ruota rispetto a quello fisso. Sostituendo questa relazione nell'espressione (4.1), si ha:

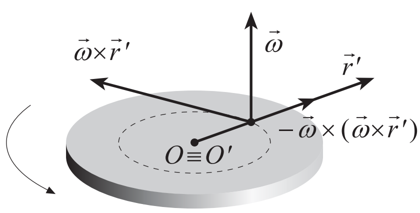
$$\vec{F} - m\vec{a}_t - m\vec{a}_c = m\vec{a}' \; ; \qquad (4.27)$$

in questo caso generale l'accelerazione di trascinamento $\vec{a}_t$ determina un termine della forza d'inerzia che, a differenza del caso precedente, è diverso da punto a punto nel sistema mobile, in quanto dipende da $\vec{r}'$; inoltre compare un ulteriore termine, detto *forza di Coriolis*, dipendente dalla velocità del punto materiale nel sistema mobile.

Esempio: Una piattaforma priva di attrito ruota con la frequenza costante di $2\,giri/s$ attorno al suo asse. A distanza di $3\,m$ dal centro di rotazione è posto un punto materiale *P* di $500\,g$. Stabiliamo la forza che deve essere applicata all'oggetto affinché si mantenga in equilibrio rispetto alla piattaforma. Facciamo riferimento al sistema non inerziale rappresentato dalla piattaforma rotante con origine nel centro di rotazione; la condizione di equilibrio per *P* in tale sistema è:



$$\vec{a}' = \vec{0}, \;\; \vec{v}' = \vec{0},$$



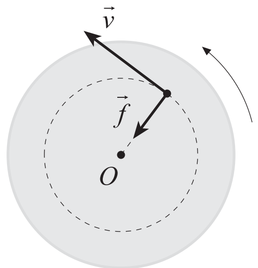
pertanto nell'espressione (4.27) è nulla la forza di Coriolis, che dipende da $\vec{v}'$, ed è nullo il secondo membro che contiene l'accelerazione $\vec{a}'$; inoltre, nell'espressione dell'accelerazione di trascinamento $\vec{A} + \vec{\alpha}\times\vec{r}' + \vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$, siccome le origini dei due sistemi di riferimento O e O' coincidono durante il moto, l'accelerazione $\vec{A}$ deve essere nulla e, poiché il moto avviene con velocità angolare costante, deve essere nulla anche l'accelerazione angolare $\vec{\alpha}$. Pertanto la condizione di equilibrio del punto materiale *P* è:

$$\vec{f} - m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}') = \vec{0}.$$

La forza apparente $-m\vec{\omega}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}')$ è una forza centrifuga, essendo diretta come $\vec{r}'$, di modulo $m\omega^2 r$; pertanto, allo scopo di bilanciare nel sistema mobile tale forza apparente, sul punto materiale deve agire la forza $\vec{f}$ diretta nel verso opposto a $\vec{r}'$ e di intensità:

$$f = m\omega^2 r \approx 236.9\;N,$$

siccome ω, pari a 2π volte la frequenza di rotazione della piattaforma, vale $12.6\;rad/s$. Dal punto di vista di un osservatore inerziale, affinché il punto materiale *P* si muovi lungo una traiettoria circolare di raggio *r* attorno ad *O* con velocità angolare $\vec{\omega}$, su di esso deve agire una forza centripeta, ovvero diretta verso l'asse di rotazione e di intensità pari a $m\omega^2 r$. Il vettore velocità $\vec{v}$ del punto materiale sarà sempre diretto tangenzialmente alla sua traiettoria ed avrà intensità:



$$v = r\omega \approx 37.7\;m/s.$$

Qualora l'agente che determina la forza centripeta sul punto materiale viene a cessare, il corpo si sposterà tangenzialmente alla traiettoria nella direzione del vettore $\vec{v}$ nell'istante in cui la forza centripeta si annulla, ed avrà velocità pari a $r\omega$.

4.11 Quantità di moto e impulso

La seconda legge di Newton può essere espressa in una forma più generale attraverso l'introduzione di un'opportuna grandezza vettoriale denominata *quantità di moto*. Il vettore quantità di moto $\vec{p}$ di una particella di massa m che si muove con velocità $\vec{v}$ è pari a:

$$\vec{p} \equiv m\vec{v} . \tag{4.28}$$

Le dimensioni della quantità di moto sono il prodotto di una massa per le dimensioni della velocità e la corrispondente unità di misura è:

$$[p] = \frac{kg \cdot m}{s} .$$

La formulazione più generale della seconda legge, peraltro, corrispondente alla originaria espressione proposta da Newton è la seguente:

"In un sistema di riferimento inerziale la forza totale applicata ad un punto materiale è pari alla derivata rispetto al tempo del vettore quantità di moto";

cioè:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} ; \tag{4.29}$$

questa espressione si riconduce alla (4.1) nel caso in cui la massa m è costante:

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right) = m\frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{a} , \tag{4.30}$$

tuttavia questa formulazione è più generale, in quanto consente di includere il caso in cui la massa è variabile, in tale circostanza si ha:

$$\vec{F} = \vec{v}\frac{dm}{dt} + m\vec{a} .$$

Qualora si schematizzi un corpo esteso con un punto materiale, la massa può variare con la velocità; si pensi, ad esempio, ad un veicolo a motore, che brucia carburante durante il moto o ad un nastro trasportatore.

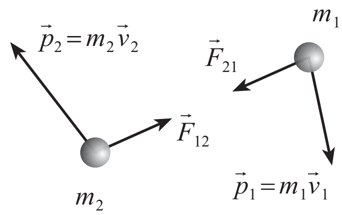
Da questa espressione alternativa segue una nuova formulazione anche della prima legge di Newton; infatti, nelle condizioni di tale legge, ovvero in assenza di forze agenti sul punto materiale, per $\vec{F} = \vec{0}$ si ha:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0} ,$$

quindi:

"In un sistema di riferimento inerziale, un punto materiale non sottoposto ad azioni, mantiene costante la sua quantità di moto".

Consideriamo due particelle, rispettivamente di masse m_1 ed m_2, che possono interagire tra loro ma che risultano isolate dall'ambiente esterno, ovvero tali che la sola forza che agisce su ciascuna particella è quella esercitata dall'altra particella. Siano $\vec{p}_1$ e $\vec{p}_2$ le rispettive quantità di moto, allora dalla seconda legge di Newton espressa nella forma (4.29), segue:



$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}_1}{dt} &= \vec{F}_{21}, \\ \frac{d\vec{p}_2}{dt} &= \vec{F}_{12}, \end{aligned} \tag{4.31}$$

dove $\vec{F}_{21}$ è la forza esercitata sulla particella di massa m_1 dalla particella di massa m_2 e $\vec{F}_{12}$ è la forza esercitata su m_2 da m_1. Dalla terza legge di Newton segue: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$, cioè:

$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = \vec{0},$$

e quindi, dalle relazioni (4.31), segue:

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{p}_1 + \vec{p}_2\right) = \frac{d\vec{p}_t}{dt} = \vec{0},$$

dove

$$\vec{p}_t \equiv \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

rappresenta la quantità di moto totale del sistema delle due particelle. Pertanto, dal fatto che la derivata di $\vec{p}_t$ è nulla, segue che tale quantità deve essere costante. Questo risultato è noto come *principio di conservazione della quantità di moto* e può estendersi ad un numero arbitrario di particelle costituenti un sistema isolato; la sua formulazione afferma che quando due o più particelle interagiscono in un sistema isolato, le relative quantità di moto delle singole particelle variano in maniera tale che la quantità di moto totale del sistema resta costante. Così la quantità di moto totale di un sistema isolato, in un qualsiasi istante, è uguale alla quantità di moto iniziale del sistema, quindi, se consideriamo le quantità di moto delle particelle tra due istanti, che chiamiamo iniziale e finale, durante l'intervallo di tempo in cui interagiscono, risulta:

$$\vec{p}_{1i} + \vec{p}_{2i} = \vec{p}_{1f} + \vec{p}_{2f},$$

che, generalizzata al caso di N particelle di un sistema isolato, corrisponde alle tre identità scalari:

$$\sum_{n=1}^{N} p_{n\,i_x} = \sum_{n=1}^{N} p_{n\,f_x},$$
$$\sum_{n=1}^{N} p_{n\,i_y} = \sum_{n=1}^{N} p_{n\,f_y},$$
$$\sum_{n=1}^{N} p_{n\,i_z} = \sum_{n=1}^{N} p_{n\,f_z}.$$

Consideriamo l'azione di una forza $\vec{F}$ su un punto materiale di massa m; dalla (4.29) segue:

$$d\vec{p} = \vec{F}dt;$$

la quantità $d\vec{p}$ è detta *impulso* elementare della forza $\vec{F}$ tra gli istanti di tempo t e $t+dt$; integrando tale quantità tra i tempi t_1 e t_2, si ottiene l'impulso della forza $\vec{F}$ nell'intervallo $t_2 - t_1$:

$$\vec{\mathcal{I}} \equiv \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}dt = \vec{p}(t_2) - \vec{p}(t_1),$$

pertanto l'impulso di $\vec{F}$ è pari alla variazione della quantità di moto della particella.

Esempio: Ad un punto materiale di massa pari ad $1\,kg$, in moto con velocità costante pari a $3\,m/s$, viene applicata, nella stessa direzione del moto, una forza variabile nel tempo con la legge $at+b$, dove a e b valgono, rispettivamente, $1\,N/s$ e $2\,N$, per un tempo pari a $4\,s$. Stabiliamo la velocità del punto materiale dopo l'azione della forza. L'impulso associato all'azione di tale forza nel tempo specificato è:

$$\mathcal{I} = \int_0^{t_f} F\,dt = \int_0^{t_f} (at+b)\,dt = \frac{1}{2}at_f^2 + bt_f \approx 16\,N\,s$$

così, poiché la velocità iniziale è nulla, si ha:

$$\mathcal{I} = p(0) - p(t_f) = mv_f,$$

da cui segue:

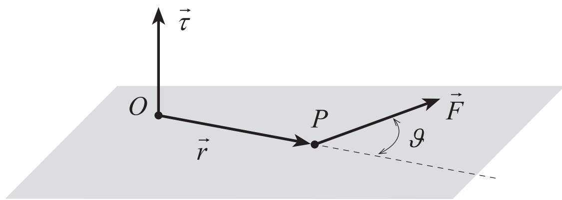
$$v_f = \frac{\mathcal{I}}{m} \approx 19\,m/s.$$

4.12 Momento di una forza e momento angolare

Nell'analisi del moto di punti materiali lungo traiettorie curvilinee risulta opportuno adoperare la seconda legge di Newton in una formulazione alternativa comprendente la quantità di moto. Tale formulazione diventa, inoltre, particolarmente utile nello studio del moto di sistemi di punti materiali. Per stabilire tale formulazione occorre introdurre due nuovi vettori, il momento di una forza e il momento angolare.

Consideriamo una forza $\vec{F}$ applicata ad un punto materiale P ed un generico punto O; si definisce *momento della forza* $\vec{F}$ rispetto ad O il vettore:

$$\vec{\tau} \equiv \vec{r} \times \vec{F} \,, \tag{4.32}$$



dove $\vec{r} \equiv \overrightarrow{OP}$. L'intensità di tale vettore è:

$$\tau = rF \sin\vartheta \,,$$

così, posto:

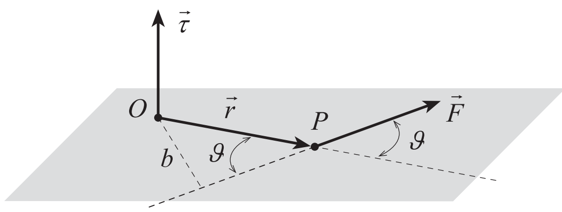
$$b \equiv r \sin\vartheta \,,$$

risulta:

$$\tau = Fb$$

dove b, detto *braccio* (della forza $\vec{F}$ rispetto ad O) rappresenta la distanza tra la direzione di $\vec{F}$ e il punto O che, in questo contesto viene solitamente definito *polo*. Qualora sul punto P agiscano più forze, cioè se

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i \,,$$



il momento di $\vec{F}$ vale

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{r} \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{n} \vec{\tau}_i \,,$$

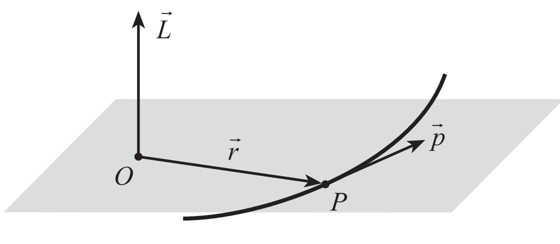
cioè $\vec{\tau}$ è la somma dei momenti di ciascuna forza.

Le dimensioni del momento sono il prodotto di una lunghezza per le dimensioni della forza e l'unità di misura è:

$$[\tau] = N \cdot m \,.$$

Consideriamo un punto materiale P di massa m e velocità $\vec{v}$ ed un generico punto O; si definisce *momento angolare* $\vec{L}$ o *momento della quantità di moto* rispetto ad O il vettore:

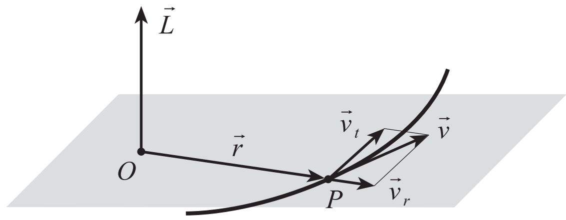
$$\vec{L} \equiv \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times (m\vec{v}) \,. \tag{4.33}$$



dove $\vec{r} \equiv \overrightarrow{OP}$. La dimensione del momento angolare è:

$$[L] = \frac{kg\ m^2}{s} = \frac{kg\ m^2}{s^2} \cdot s = (N \cdot m) \cdot s = J \cdot s \,,$$

avendo definito il *joule* (*J*) come il prodotto $N \cdot m$. Consideriamo un punto materiale P di massa m in moto lungo una traiettoria curvilinea piana. Sia $\vec{r}$ il vettore posizione di P rispetto ad un'origine O. Decomponiamo il vettore $\vec{v}$ nella direzione di $\vec{r}$ e nella direzione perpendicolare ad $\vec{r}$:



$$\vec{v} = \vec{v}_r + \vec{v}_t\ ;$$

il modulo del momento angolare di P rispetto a O vale:

$$L = \left|\vec{L}\right| = \left|\vec{r}\times\vec{p}\right| = \left|\vec{r}\times\left(m\vec{v}\right)\right| = \left|\vec{r}\times\left(m\vec{v}_r + m\vec{v}_t\right)\right| = mrv_t\,,$$

essendo $\vec{r}$ e $\vec{v}_r$ paralleli. In particolare se il moto è circolare, $\vec{v}_r = \vec{0}$ e dalla (2.28), si ha[2]:

$$\vec{L} = \vec{r}\times\left(m\vec{v}\right) = m\vec{r}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) = m\left[\left(\vec{r}\cdot\vec{r}\right)\vec{\omega} - \left(\vec{r}\cdot\vec{\omega}\right)\vec{r}\right] = mr^2\vec{\omega} = I\vec{\omega}\,.$$

Questa espressione, relativa alla rotazione di un punto materiale attorno ad un polo, è formalmente analoga alla (4.28) dove, al posto della velocità $\vec{v}$, compare la velocità angolare $\vec{\omega}$ e al posto della massa m compare la quantità mr^2, indicata con I, detta *momento di inerzia* del punto materiale rispetto ad O.

Consideriamo un punto materiale di massa m e momento angolare $\vec{L}$ rispetto ad un polo O; derivando rispetto al tempo la relazione (4.33), si trova:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times\vec{p}\right) = \frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{p} + \vec{r}\times\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v}\times\vec{p} + \vec{r}\times\vec{F}\ ;$$

in tale espressione, il termine $\vec{v}\times\vec{p}$ è nullo poiché $\vec{v}$ e $\vec{p}$ sono vettori paralleli così, dalla (4.32) segue:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}\ ; \tag{4.34}$$

questa relazione, formalmente analoga alla (4.29), esprime il *teorema del momento angolare*, il quale afferma che la variazione infinitesimale $d\vec{L}$ del momento angolare di una particella rispetto ad un certo polo in un intervallo di tempo dt è pari al momento $\vec{\tau}$ agente sulla particella, calcolato rispetto al medesimo polo. Se il momento risultante delle forze agenti su una particella è nullo, cioè se $\vec{\tau} = \vec{0}$, dalla (4.34) segue $d\vec{L}/dt = \vec{0}$, cioè $\vec{L}$ è un vettore costante. Tale proprietà costituisce il *principio di conservazione del momento angolare*:

> *"In un sistema di riferimento inerziale, se la risultante del momento delle forze agenti su un punto materiale rispetto ad un certo polo è nullo, il momento angolare totale rispetto allo stesso polo si mantiene costante".*

Tale condizione è soddisfatta, ad esempio, se la particella è libera, cioè se la risultante delle forze agenti su di essa è nulla, $\vec{F} = \vec{0}$, per cui il momento angolare $L = mvr\sin\vartheta$ è costante, come d'altra parte segue dal fatto che, essendo la particella libera, v e $\sin\vartheta$ non cambiano e la traiettoria è rettilinea.

---

[2] Si è fatto uso dell'identità vettoriale $\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right) = \left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\vec{B} - \left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)\vec{C}$.

Esempio: Si dice *centrale* una forza diretta sempre verso un punto fisso che prende, pertanto, il nome di *centro di forza* e che dipende dalla sola distanza da tale punto; una forza centrale si esprime quindi come:

$$\vec{F} = F(r)\hat{r},$$

dove r è la distanza dal punto e $\hat{r}$ è un versore che in ogni posizione in cui è applicato punta sempre verso il centro di forza. In natura molte forze hanno questa caratteristica, come la forza gravitazionale o la forza che si esplica tra due cariche elettriche puntiformi. Se si calcola il momento di tale forza rispetto al centro di forza si trova:

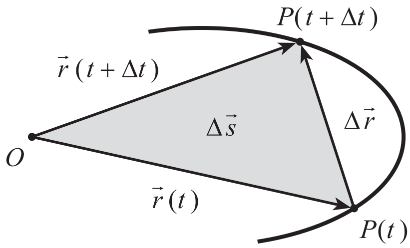
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \left[F(r)\hat{r}\right] = \vec{0},$$

e di conseguenza il momento angolare si conserva. Dalla (4.33) segue che il vettore momento angolare è sempre ortogonale al piano individuato da $\vec{r}$ e da $\vec{p}$; ma se, d'altra parte, $\vec{L}$ si conserva, il corrispondente moto avviene in un piano. Ciò accade, ad esempio, nel moto orbitale della Terra attorno al Sole, nell'ipotesi in cui si possa trascurare l'interazione con gli altri pianeti. Consideriamo il moto orbitale di un pianeta attorno al Sole, sia O la posizione occupata dal Sole e sia

$$\Delta\vec{r} \equiv \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t),$$

il vettore che congiunge le posizioni occupate da un pianeta rispettivamente ai tempi t e $t+\Delta t$. Consideriamo il vettore così definito:

$$\Delta\vec{s} \equiv \frac{1}{2}\vec{r} \times \Delta\vec{r}; \tag{4.35}$$



per $\Delta\vec{r}$ piccolo, in modo che $\vec{r}(t)$ è confrontabile con $\vec{r}(t+\Delta t)$, questo vettore è caratterizzato dall'avere il modulo pari all'area del triangolo che congiunge i punti[3] O, $P(t)$ e $P(t+\Delta t)$. Dividendo ambo i membri della (4.35) per Δt e passando al limite per $\Delta t \to 0$, si trova:

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{r} \times \vec{v},$$

dove $d\vec{s}/dt$ è detta *velocità areolare*. Dalla (4.33) segue:

$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{1}{2m}\vec{r} \times (m\vec{v}) = \frac{\vec{L}}{2m}, \tag{4.36}$$

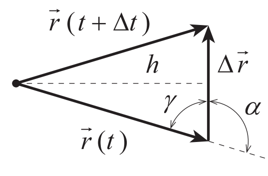
siccome il moto avviene per effetto di una forza centrale il momento angolare si conserva per cui, passando ai moduli e integrando, si trova:

$$s = \frac{L}{2m}t,$$

avendo assunto che l'area descritta dal vettore posizione del pianeta all'istante di tempo iniziale $t = 0$ fosse nulla. Questa relazione è l'espressione della *seconda legge di Keplero* relativa ai moti dei pianeti del sistema solare, cioè che le aree descritte dal raggio vettore che unisce il Sole al pianeta sono proporzionali ai tempi impiegati per descriverle. Quindi tale legge equivale alla costanza del momento angolare del pianeta, conseguenza del fatto che la forza agente sul pianeta è centrale.

---

[3] Infatti, con riferimento alla figura, se $\vec{r}(t+\Delta t) \approx \vec{r}(t)$, risulta:



$$\Delta s = \frac{1}{2}\Delta r\, r \sin\gamma = \frac{1}{2}\Delta r\, r \sin(\pi - \alpha) = \frac{1}{2}\Delta r\, r \sin\alpha = \frac{1}{2}\left|\Delta\vec{r} \times \vec{r}\right|$$

Esempio: (*accelerazione dovuta ad una forza centrale*) Se il momento angolare di un corpo è costante, come nel caso in cui il corpo è soggetto ad una forza centrale, risulta conveniente esprimere l'accelerazione del corpo in funzione del suo momento angolare. Dalla definizione (4.33), facendo uso dell'espressione della velocità in funzione delle coordinate polari (2.35), si ottiene:

$$\vec{L} = \vec{r} \times (m\vec{v}) = m\vec{r} \times \left(\frac{dr}{dt}\hat{r} + r\hat{\vartheta}\frac{d\vartheta}{dt} \right) = m\vec{r} \times \left(r\hat{\vartheta}\frac{d\vartheta}{dt} \right) = mr^2 \frac{d\vartheta}{dt}\hat{r} \times \hat{\vartheta};$$

pertanto, in modulo, risulta:

$$L = mr^2 \frac{d\vartheta}{dt}. \tag{4.37}$$

Con riferimento alla relazione (2.36) in cui l'accelerazione è espressa attraverso le coordinate polari, in corrispondenza di una forza centrale, la componente lungo il versore $\hat{\vartheta}$ dell'accelerazione è nulla, per cui tale grandezza varrà:

$$\vec{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\vartheta}{dt} \right)^2 \right]\hat{r}. \tag{4.38}$$

Sfruttando la relazione (4.37), la derivata di r rispetto al tempo risulta:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\vartheta}\frac{d\vartheta}{dt} = \frac{L}{mr^2}\frac{dr}{d\vartheta} = -\frac{L}{m}\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1}{r} \right),$$

così la derivata seconda vale:

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{d\vartheta}\frac{d\vartheta}{dt} \right) = \frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{dr}{dt}\frac{d\vartheta}{dt} \right) = \frac{d}{d\vartheta}\left\{ \left[-\frac{L}{m}\frac{d}{d\vartheta}\left(\frac{1}{r} \right) \right]\frac{L}{mr^2} \right\} = -\frac{L^2}{m^2r^2}\frac{d^2}{d\vartheta^2}\left(\frac{1}{r} \right),$$

infine, sostituendo nella (4.38) si ha:

$$\vec{a} = \left[-\frac{L^2}{m^2r^2}\frac{d^2}{d\vartheta^2}\left(\frac{1}{r} \right) - r\frac{L^2}{m^2r^4} \right]\hat{r} = -\frac{L^2}{m^2r^2}\left[\frac{d^2}{d\vartheta^2}\left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right]\hat{r}; \tag{4.39}$$

tale espressione prende il nome di *formula di Binet*.