9 GRAVITAZIONE UNIVERSALE

Le conoscenze relative alla forza di gravitazione si sono sviluppate a partire dalle osservazioni astronomiche del moto dei pianeti del sistema solare. Attraverso tali osservazioni Tyco Brahe raccolse un insieme di dati tramite i quali, successivamente, Johannes Keplero identificò delle regolarità nel moto dei pianeti che espresse attraverso delle leggi. Tali leggi, note come leggi di Keplero rappresentano una descrizione cinematica del moto dei pianeti e si enunciano nella maniera seguente:

1. *"Rispetto al Sole ogni pianeta descrive un'orbita ellittica di cui il Sole occupa uno dei fuochi"*.
2. *"Il raggio vettore condotto dal Sole ad ogni pianeta descrive aree proporzionali ai tempi impiegati per descriverle; cioè il moto del pianeta rispetto al Sole si svolge con velocità areolare costante"*.
3. *"I quadrati dei periodi di rivoluzione dei vari pianeti intorno al Sole sono proporzionali ai cubi dei semiassi maggiori delle rispettive orbite ellittiche"*.

La descrizione in termini dinamici del moto planetari e l'identificazione dell'interazione responsabile di tale moto fu opera di Newton, che formulò la *legge di gravitazione universale*.

9.1 La legge di gravitazione universale

Dopo la formulazione delle leggi della dinamica, il più importante contributo di Newton allo sviluppo della meccanica fu l'identificazione delle leggi dell'interazione gravitazionale; ossia l'interazione che si esplica tra due generici corpi materiali che determina un moto descrivibile attraverso le leggi di Keplero.

Il moto di un corpo soggetto ad una forza centrale è caratterizzato dal fatto che il momento angolare $\vec{L}$ calcolato rispetto al centro di forza è una costante del moto. Siccome la velocità areolare $d\vec{s}/dt$ si può esprimere come:

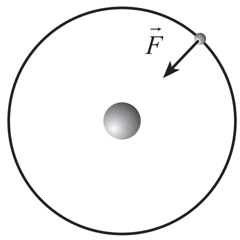
$$\frac{d\vec{s}}{dt} = \frac{1}{2}\vec{r}\times\vec{v} = \frac{\vec{L}}{2m},$$

dove m è la massa del corpo, alla costanza del momento angolare corrisponde la seconda legge di Keplero, che pertanto indica che la forza $\vec{F}$ associata all'interazione gravitazionale è di tipo centrale:

$$\vec{F} = f(r)\hat{r}.$$

Supponiamo, in prima approssimazione che le orbite dei pianeti, sebbene ellittiche, si possano considerare circolari, allora, dall'espressione della velocità areolare, segue:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{1}{2} r v = \frac{1}{2} r^2 \omega$$



essendo, in tale ipotesi, i vettori $\vec{r}$ e $\vec{v}$ perpendicolari e inoltre esprimendo v attraverso la velocità angolare ω come $r\omega$ dalla (2.28). Dalla costanza della velocità areolare e dall'ipotesi di orbite circolari (cioè con r costante), segue la costanza di ω. Se ω è costante, allora, dalle relazioni (2.30) e (2.31) segue che l'accelerazione tangenziale del pianeta è nulla e pertanto la sua accelerazione deve essere esclusivamente di tipo centripeto. Pertanto la forza agente sul pianeta può esprimersi come:

$$F = m\omega^2 r = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 r ,$$

dove, dalla (2.34) T è il periodo di rivoluzione. D'altra parte, confondendo il raggio dell'orbita circolare con il semiasse maggiore dell'ellisse[1], la terza legge di Keplero può esprimersi come:

$$T^2 = k r^3 ,$$

in cui k è un'opportuna costante di proporzionalità. Confrontando tra loro le precedenti relazioni, si ha:

$$F = m \frac{4\pi}{T^2} r = m \frac{4\pi^2}{k r^3} r = \frac{4\pi^2}{k} \frac{m}{r^2} ,$$

cioè la forza esercitata dal Sole sui pianeti è inversamente proporzionale alla distanza dal Sole. Contemporaneamente, se M rappresenta la massa del Sole, la forza esercitata dal pianeta sul Sole vale:

$$F_M = \frac{4\pi^2}{k_M} \frac{M}{r^2} .$$

Per la terza legge di Newton queste due forze devono avere lo stesso modulo, così:

$$k M = k_M m .$$

Posto allora:

$$G \equiv \frac{4\pi^2}{k_M m} = \frac{4\pi^2}{k M} ,$$

il modulo della forza di interazione tra il Sole e il pianeta si esprime come:

$$F = G \frac{Mm}{r^2} .$$

[1] Questa ipotesi segue dalla constatazione che l'eccentricità dell'orbita dei pianeti del sistema solare è molto piccola, per cui le corrispondenti orbite possono ritenersi, almeno in prima approssimazione, circolari.

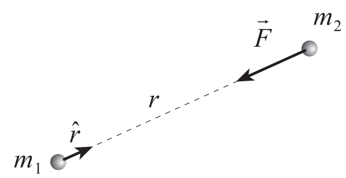
Data la semplicità di questa espressione, Newton ipotizzò che si trattasse di una formula di carattere generale ed enunciò la seguente legge di gravitazione universale:

> *"Ogni particella materiale esistente nell'universo attira ogni altra particella con una forza gravitazionale. Le forze gravitazionali esistenti tra due particelle (tra loro opposte per il principio di azione e reazione) hanno come retta di applicazione la retta passante per le due particelle e intensità proporzionale al prodotto delle masse delle particelle e inversamente proporzionale al quadrato della loro distanza".*

Nella trattazione precedente, a rigore, in luogo della massa m occorrerebbe considerare la massa ridotta μ del sistema composto da m e M, pari a $mM/(m+M)$, tuttavia nel caso considerato $M \gg m$, per cui $\mu \approx m$.

Esempio: Nel caso di Giove, che costituisce il pianeta più pesante del sistema solare, m vale $1.8971\times10^{27}\ kg$ e considerando che la massa M del Sole è $1.989\times10^{30}\ kg$, la massa ridotta del sistema è $1.895\times10^{27}\ kg$, cioè risulta inferiore a m dello $0.001\,\%$ circa. Si noti che nel sistema solare il Sole contiene il $99.85\,\%$ della massa dell'intero sistema mentre i pianeti concorrono solo allo $0.135\,\%$ di tale massa.

Vettorialmente, l'espressione della forza gravitazionale esercitata da un corpo di massa m_1 su un corpo di massa m_2, supposti puntiformi, vale:



$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r}.$$

La costante di proporzionalità G fu misurata sperimentalmente nel 1798 da Henry Cavendish adoperando una bilancia di torsione, in modo da rilevare la forza di attrazione tra due masse sferiche. Il valore attualmente noto di G è:

$$G \approx 6.6759\times10^{-11}\ \frac{m^3}{kg\cdot s^2}.$$

Esempio: Una verifica sperimentale della legge di gravitazione consiste nella determinazione dell'accelerazione di gravità g sulla Terra. Consideriamo un corpo di massa m situato sulla Terra; la forza subita per effetto della Terra vale:

$$F = G\frac{m\,m_T}{R_T^{\,2}},$$

dove m_T rappresenta la massa e R_T il raggio della Terra; in tale espressione si è supposto che la Terra eserciti la stessa forza sul corpo che eserciterebbe una massa puntiforme posta nel centro della Terra[2]. D'altra parte risulta:

$$F = mg,$$

pertanto, confrontando queste due espressioni, si ha:

---

[2] Questa proprietà è facilmente dimostrabile attraverso la legge di Gauss (si veda il secondo volume) ed è conseguenza della dipendenza funzionale della forza di gravità che si esercita tra due punti materiali dall'inverso del quadrato della reciproca distanza.

$$g = G\frac{m_T}{R_T^{\,2}}. \tag{9.1}$$

Nel caso della verifica fatta da Newton, non erano noti G e m_T, tuttavia la forza esercitata dalla Terra sulla Luna vale:

$$F_L = G\frac{m_L\, m_T}{d^2} = m_L \omega_L^{\,2} d,$$

dove m_L e ω_L sono, rispettivamente, la massa e la velocità angolare della Luna e d la distanza della Luna dalla Terra. Da tale relazione segue:

$$Gm_T = \omega_L^{\,2} d^3,$$

così, sostituendo nella relazione (9.1), si ha:

$$g = \frac{\omega_L^{\,2} d^3}{R_T^{\,2}}.$$

Infine, siccome ω_L vale $2\pi/T_L$, dove T_L è il periodo di rivoluzione della Luna attorno alla Terra, si ha:

$$g = \frac{4\pi^2 d^3}{T_L^{\,2} R_T^{\,2}}.$$

Per $T_L \approx 27.32\ giorni$, $d \approx 3.84\times10^8\ m$ e $R_T \approx 6.378\times10^6\ m$ si ottiene un valore di g pari a $9.863\, m/s^2$ in buon accordo con quello misurato.

Esempio: Un satellite geostazionario di massa m deve occupare una posizione fissa nello spazio rispetto alla superficie terrestre e pertanto il suo moto orbitale deve essere sincrono col moto di rotazione della Terra. Ne segue che il suo periodo T deve risultare pari ad un giorno, ossia uguale a $8.64\times10^4\ s$. La forza centripeta responsabile di questo moto vale:

$$F = m\omega^2 d = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 d = m\frac{4\pi^2}{T^2} d,$$

dove d è la distanza del satellite dal centro della Terra. Tale forza è determinata dall'accelerazione di gravità:

$$F = G\frac{m\, m_T}{d^2},$$

dove m_T è la massa della Terra. Uguagliando queste due espressioni, si ha:

$$m\frac{4\pi^2}{T^2} d = G\frac{m\, m_T}{d^2},$$

da cui segue:

$$d = \sqrt[3]{\frac{Gm_T T^2}{4\pi^2}}.$$

Infine, se R_T è il raggio della Terra e h la distanza del satellite dal suolo terrestre, si ha:

$$h = d - R_T = \sqrt[3]{\frac{Gm_T T^2}{4\pi^2}} - R_T \approx 3.59\times10^7\ m,$$

cioè il satellite orbita ad una quota di circa $36\,000\ km$ dalla superficie terrestre.

9.2 Massa inerziale e massa gravitazionale

La massa che compare nell'espressione della legge di gravitazione universale e che caratterizza l'intensità della forza con cui due corpi si attraggono viene denominata *massa gravitazionale*. Tale massa, in principio, risulta di natura completamente differente dalla massa inerziale che compare nella seconda legge di Newton e che determina l'accelerazione di un corpo in corrispondenza dell'azione di una forza. Consideriamo un corpo di massa inerziale m situato in prossimità della Terra; in tale circostanza vale relazione:

$$mg = G\frac{m_T'm'}{R^2},$$

dove con l'apice sono indicate le masse gravitazionali. Da tale identità segue:

$$g = G\frac{m_T'}{R^2}\frac{m'}{m},$$

cioè, in un dato luogo l'accelerazione di gravità dipende dal rapporto m'/m tra la massa gravitazionale e la massa inerziale. Poiché si osserva che in uno stesso luogo g non dipende dai particolari corpi, segue che m' e m sono proporzionali tra loro. Pertanto, attraverso un'opportuna scelta dell'unità di misura della massa gravitazionale m', cioè, in pratica, per un'adeguata scelta dell'unità di misura per G, è possibile adoperare lo stesso valore per la massa gravitazionale e per la massa inerziale, pertanto:

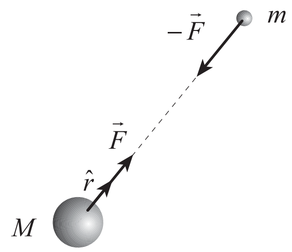
$$m' = m.$$

Ne segue che si può adoperare il termine "massa" in generale, sia per la massa inerziale che per quella gravitazionale.

La relazione precedente suggerisce l'esistenza di un legame tra l'inerzia e la gravitazione. Difatti, nell'ambito della Relatività Generale, tale legame è stabilito in forma di principio, cioè per sistemi di riferimento non inerziali, la Relatività Generale postula l'impossibilità di distinguere forze d'inerzia da forze gravitazionali, implicando pertanto l'identità concettuale tra massa inerziale e massa gravitazionale.

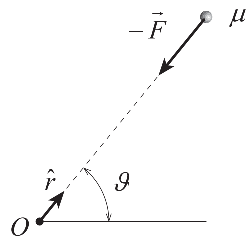
9.3 Equazione della traiettoria

Consideriamo un sistema isolato costituito da due corpi puntiformi, rispettivamente di masse m e M. In un sistema di riferimento inerziale risulta:



$$m\vec{a}_m = -G\frac{mM}{r^2}\hat{r},$$

$$M\vec{a}_M = G\frac{mM}{r^2}\hat{r};$$



introducendo la massa ridotta dei due corpi:

$$\mu = \frac{mM}{m+M},$$

il sistema viene assimilato ad un unico corpo di massa μ soggetto alla forza di interazione muta, per cui:

$$\mu\vec{a} = -G\frac{mM}{r^2}\hat{r}.$$

Utilizzando la formula di Binet (4.39) per esprimere l'accelerazione $\vec{a}$ in coordinate polari di un corpo di massa μ, si ottiene:

$$-\mu\frac{L^2}{\mu^2 r^2}\left[\frac{d^2}{d\vartheta^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r}\right] = -G\frac{mM}{r^2},$$

ovvero:

$$\frac{d^2}{d\vartheta^2}\left(\frac{1}{r}\right)+\frac{1}{r} = G\frac{\mu mM}{L^2}.$$

Sostituendo in tale espressione:

$$u(\vartheta) \equiv \frac{1}{r(\vartheta)}, \tag{9.2}$$

si ottiene l'equazione differenziale:

$$\frac{d^2u(\vartheta)}{d\vartheta^2}+u(\vartheta) = G\frac{\mu mM}{L^2}. \tag{9.3}$$

La soluzione generale di questa equazione può essere espressa nella forma:

$$u(\vartheta) = u_O(\vartheta)+u_{NO}(\vartheta),$$

in cui $u_O(\vartheta)$ rappresenta la soluzione dell'equazione omogenea associata alla (9.3):

$$\frac{d^2u_O(\vartheta)}{d\vartheta^2}+u_O(\vartheta) = 0,$$

e $u_{NO}(\vartheta)$ rappresenta una soluzione particolare della (9.3). Nell'espressione dell'equazione omogenea è possibile riconoscere l'equazione dell'oscillatore armonico (4.15), pertanto la corrispondente soluzione può esprimersi come:

$$u_O(\vartheta) = K\cos(\vartheta + \vartheta_0),$$

in cui K e ϑ_0 sono costanti di integrazione determinate dalle condizioni iniziali. Una banale soluzione $u_{NO}(\vartheta)$ dell'equazione non omogenea è rappresentata da:

$$u_{NO}(\vartheta) = G\frac{\mu mM}{L^2},$$

Pertanto, assumendo nulla la costante ϑ_0, la soluzione generale dell'equazione (9.3) si esprime come:

$$u(\vartheta) = K\cos\vartheta + G\frac{\mu mM}{L^2};$$

sostituendo infine a $u(\vartheta)$ la sua espressione (9.2), si ottiene:

$$\frac{1}{r(\vartheta)} = K\cos\vartheta + G\frac{\mu mM}{L^2},$$

da cui segue:

$$r(\vartheta) = \frac{1}{K\cos\vartheta + G\frac{\mu mM}{L^2}} = \frac{1}{G\frac{\mu mM}{L^2}\left[1-\left(-\frac{KL^2}{G\mu mM}\right)\cos\vartheta\right]} = \frac{\frac{L^2}{G\mu mM}}{1-\left(-\frac{KL^2}{G\mu mM}\right)\cos\vartheta}.$$

Questa relazione rappresenta l'equazione di una sezione conica (si veda l'Appendice) nella forma:

$$r = \frac{\varepsilon d}{1-\varepsilon\cos\vartheta}, \tag{9.4}$$

dove:

$$\varepsilon d \equiv \frac{L^2}{G\mu mM},$$
$$\varepsilon \equiv -\frac{KL^2}{G\mu mM},$$

così, facendo il rapporto membro a membro, si ottiene:

$$d = -\frac{1}{K},$$

pertanto l'eccentricità ε si esprime come:

$$\varepsilon = \frac{L^2}{G\mu mM}(-K) = \frac{L^2}{G\mu mMd}.$$

La costante d ha le dimensioni di una lunghezza e dipende dalle dimensioni geometriche dell'orbita. Dalla relazione precedente si ha:

$$L^2 = G\mu mM\varepsilon d, \tag{9.5}$$

quindi i parametri dell'orbita ε e d determinano il valore costante assunto dal momento angolare.

9.4 Orbite ed energia totale

Assumendo che il livello zero dell'energia potenziale sia posto all'infinito, l'energia potenziale gravitazionale di un corpo puntiforme di massa m posto a distanza r da un corpo puntiforme di massa M si esprime come:

$$E_p = -\frac{GMm}{r};$$

utilizzando l'equazione polare della traiettoria (9.4) e l'espressione (9.5) del momento angolare, l'energia potenziale è data da:

$$E_p = -\frac{GMm}{r} = -GMm\left(\frac{1}{\varepsilon d} - \frac{1}{d}\cos\vartheta\right) = -\frac{L^2}{\mu\varepsilon d}\left(\frac{1}{\varepsilon d} - \frac{1}{d}\cos\vartheta\right) = -\frac{L^2}{\mu\varepsilon^2 d^2} + \frac{L^2}{\mu\varepsilon d^2}\cos\vartheta.$$

Per valutare l'energia totale di un corpo di massa ridotta μ soggetto alla forza di attrazione gravitazionale, stabiliamo l'espressione dell'energia cinetica E_k; allo scopo. Facendo uso dell'espressione della velocità in coordinate polari (2.35), si ha:

$$E_k = \frac{1}{2}\mu v^2 = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\mu r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2. \tag{9.6}$$

D'altra parte, dall'identità:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt},$$

facendo uso dell'equazione della traiettoria (9.4) e della relazione (4.37), si ottiene:

$$\frac{dr}{dt} = -r^2\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right) = -r^2\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{\varepsilon d} - \frac{1}{d}\cos\vartheta\right) = -\frac{r^2}{d}\sin\vartheta\frac{d\vartheta}{dt} = -\frac{r^2}{d}\sin\vartheta\frac{L}{\mu r^2} = -\frac{L}{\mu d}\sin\vartheta.$$

Pertanto, sostituendo nella (9.6) e adoperando la (4.37) e la (9.4), si ha:

$$
\begin{aligned}
E_k &= \frac{1}{2}\mu v^2 = \frac{1}{2}\mu\left(-\frac{L}{\mu d}\sin\vartheta\right)^2 + \frac{1}{2}\mu r^2\left(\frac{L}{\mu r^2}\right)^2 = \frac{1}{2}\frac{L^2\sin^2\vartheta}{\mu d^2} + \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu^2}\frac{1}{r^2} = \\
&= \frac{1}{2}\frac{L^2\sin^2\vartheta}{\mu d^2} + \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu^2}\left(\frac{1}{\varepsilon d} - \frac{1}{d}\cos\vartheta\right)^2 = \\
&= \frac{1}{2}\frac{L^2\sin^2\vartheta}{\mu d^2} + \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu^2}\left(\frac{1}{\varepsilon^2 d^2} + \frac{1}{d^2}\cos^2\vartheta - \frac{2}{\varepsilon d^2}\cos\vartheta\right)^2 = \\
&= \frac{1}{2}\frac{L^2\sin^2\vartheta}{\mu d^2} + \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu^2\varepsilon^2 d^2} + \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu^2 d^2}\cos^2\vartheta - \frac{L^2}{\mu^2\varepsilon d^2}\cos\vartheta = \\
&= \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu d^2} + \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu^2\varepsilon^2 d^2} - \frac{L^2}{\mu^2\varepsilon d^2}\cos\vartheta.
\end{aligned}
$$

L'energia totale E del corpo di massa μ vale quindi:

$$
\begin{aligned}
E &= E_k + E_p = \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu d^2} + \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu^2\varepsilon^2 d^2} - \frac{L^2}{\mu^2\varepsilon d^2}\cos\vartheta - \frac{L^2}{\mu\varepsilon^2 d^2} + \frac{L^2}{\mu\varepsilon d^2}\cos\vartheta = \\
&= \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu d^2} - \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu\varepsilon^2 d^2} = \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu\varepsilon^2 d^2}\left(\varepsilon^2 - 1\right)
\end{aligned}
$$

e sostituendo, infine, a L^2 la sua espressione dalla relazione (9.5), si ottiene:

$$
E = \frac{1}{2}\frac{G\mu mM\varepsilon d}{\mu\varepsilon^2 d^2}\left(\varepsilon^2 - 1\right) = \frac{GmM}{2\varepsilon d}\left(\varepsilon^2 - 1\right) \tag{9.7}
$$

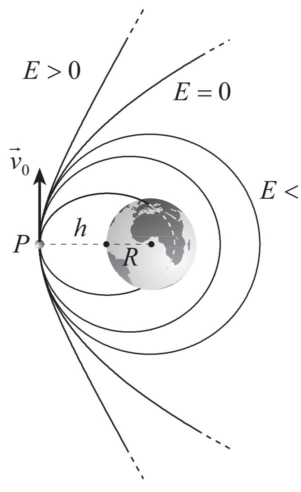
quindi, analogamente al momento angolare, anche l'energia totale può essere dedotta a partire dai parametri della traiettoria ε e d.

Siccome l'eccentricità caratterizza la forma della traiettoria del corpo, essendo ellittica per $\varepsilon > 1$, parabolica se $\varepsilon = 1$ e iperbolica per $\varepsilon > 1$, di conseguenza, in relazione al segno dell'energia totale, risulta:

$E < 0 \;\Rightarrow\;$ *orbita ellittica*;

$E = 0 \;\Rightarrow\;$ *orbita parabolica*;

$E > 0 \;\Rightarrow\;$ *orbita iperbolica*.



Poiché l'energia totale E è somma dell'energia cinetica E_k e potenziale E_p, fissata che sia quest'ultima, il segno di E è condizionato dalla relazione tra E_k e E_p. D'altra parte, essendo E_k pari a $(1/2)\mu v^2$, la forma della traiettoria è condizionata dal valore della velocità.

Esempio: I risultati appena conseguiti assumo un importante valore quando si vuole mettere in orbita un satellite artificiale. Supponiamo di lanciare dalla Terra un satellite; dopo aver raggiunto la massima altezza *h* in un punto *P* riceve una spinta attraverso o propri propulsori acquistando una velocità orizzontale $\vec{v}_0$. In questo modo l'energia totale *E* del satellite nel punto *P* vale:

$$E = \frac{1}{2}\mu v_0^2 - G\frac{mm_T}{R+h},$$

dove R e m_T sono rispettivamente il raggio e la massa della Terra, m è la massa del satellite e $\mu \approx m$ la massa ridotta tra m e m_T. A seconda del valore di v_0 si può avere una traiettoria chiusa che, eventualmente, può comportare la ricaduta sulla Terra, o un'orbita aperta, impiegata nei viaggi interplanetari.

Nel sistema solare le orbite sono chiuse quindi l'energia totale del sistema pianeta-Sole deve essere negativa e, di conseguenza, la forma delle orbite deve risultare ellittica, in accordi con la prima legge di Keplero. Nel caso di orbite ellittiche il semiasse maggiore a soddisfa la relazione (si veda l'Appendice):

$$a = \frac{\varepsilon d}{1-\varepsilon^2}$$

e pertanto l'energia totale (9.7) può esprimersi come:

$$E = \frac{GmM}{2}\frac{\varepsilon^2 - 1}{\varepsilon d} = -\frac{GmM}{2a}$$

ed il momento angolare (9.5):

$$L^2 = G\mu mM\varepsilon d = G\mu mMa\left(1-\varepsilon^2\right). \tag{9.8}$$

Quindi, assegnata l'energia E, viene di conseguenza stabilita la lunghezza del semiasse maggiore a ma non l'eccentricità dell'orbita che è definita una volta che è specificato il modulo del momento angolare $\vec{L}$. Pertanto l'energia totale ed il momento angolare risultano tra loro indipendenti.

Dalla costanza della velocità areolare $\vec{v}_A$, (4.36), per un corpo di massa ridotta μ:

$$\vec{v}_A = \frac{\vec{L}}{2\mu}$$

segue che l'area A dell'orbita ellittica sarà descritta in un tempo T pari a:

$$T = \frac{A}{v_A} = \frac{2\mu A}{L}.$$

D'altra parte, per un ellisse risulta (si veda l'Appendice):

$$A = \pi a^2\sqrt{1-\varepsilon^2},$$

così:

$$T = \frac{2\pi a^2\mu\sqrt{1-\varepsilon^2}}{L}$$

e in particolare, utilizzando la relazione (9.8), il quadrato di tale tempo vale:

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^4 \mu^2 \left(1-\varepsilon^2\right)}{L^2} = \frac{4\pi^2 a^4 \mu^2 \left(1-\varepsilon^2\right)}{G\mu m M a\left(1-\varepsilon^2\right)} = \frac{4\pi^2 \mu}{GmM} a^3 = \frac{4\pi^2}{GmM}\frac{mM}{m+M} a^3 = \frac{4\pi^2}{G\left(m+M\right)} a^3,$$

che rappresenta la terza legge di Keplero. Siccome nel caso del sistema solare risulta $M \gg m$, la costante di proporzionalità tra T^2 e a^3 vale circa $4\pi^2/\left(GM\right)$ ed è quindi praticamente la stessa per ogni pianeta.

Esempio: Stabiliamo la minima velocità v_0 che deve possedere un corpo di massa m affinché una volta lanciato dalla Terra se ne allontani indefinitamente. Per quanto visto, tale condizione si ottiene quando l'energia totale:

$$E = \frac{1}{2}\mu {v_0}^2 - G\frac{mm_T}{R},$$

risulta maggiore o uguale a zero. In particolare, la minima velocità iniziale $\vec{v}_0$ corrisponde al valore minimo dell'energia $E = 0$, ossia:

$$\frac{1}{2}\mu {v_0}^2 - G\frac{mm_T}{R} = 0,$$

da cui segue:

$$v_0 = \sqrt{\frac{2Gm_T}{R}} \approx 11.3\, km/s.$$

Esempio: Stabiliamo la velocità v_f con cui urta la Terra un corpo di massa m abbandonato, con velocità iniziale nulla, a distanza r dal centro della Terra. In questo caso l'energia totale, calcolata nel punto in cui il corpo è abbandonata, vale:

$$E = -G\frac{mm_T}{r}$$

e, una volta raggiunta la superficie terrestre, l'energia diventa:

$$E = \frac{1}{2}\mu {v_f}^2 - G\frac{mm_T}{R};$$

eguagliando tali espressioni, si trova:

$$\frac{1}{2}\mu {v_f}^2 - G\frac{mm_T}{R} = -G\frac{mm_T}{r},$$

da cui segue:

$$v_f = \sqrt{2Gm_T\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{r}\right)}.$$

In particolare, se la distanza r è grande rispetto al raggio terrestre R, segue:

$$v_f = \sqrt{\frac{2Gm_T}{R}},$$

che risulta uguale alla velocità v_0 testé valutata essendo tale circostanza esattamente inversa di quella del caso precedente.

9.5 Energia potenziale efficace

Dalle relazioni (9.6) e (4.37) segue che l'energia cinetica di un corpo di massa ridotta μ può esprimersi come:

$$E_k = \frac{1}{2}\mu v^2 = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\mu r^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\mu r^2\left(\frac{L}{\mu r^2}\right)^2 = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu r^2}.$$

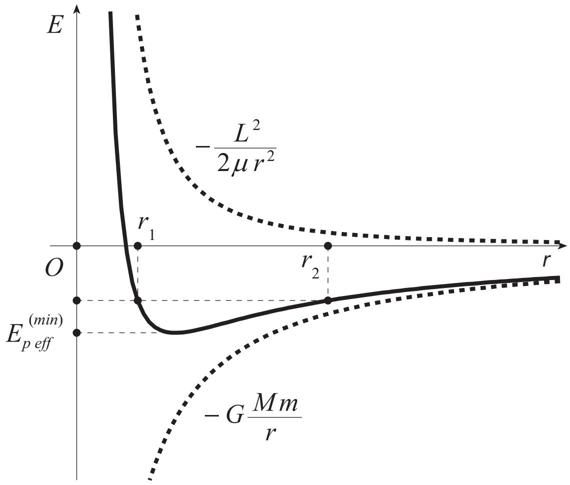
Pertanto l'energia totale E di un corpo soggetto alla forza di attrazione gravitazionale è:

$$E = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu r^2} - G\frac{mM}{r}.$$

La quantità:

$$E_{p\,eff} \equiv \frac{1}{2}\frac{L^2}{\mu r^2} - G\frac{mM}{r}$$

prende il nome di *energia potenziale efficace* ed è somma del termine $L^2/(2\mu r^2)$ pari al contributo all'energia cinetica dovuto alla componente angolare della velocità e dell'energia potenziale gravitazionale $-GMm/r$. Il termine $L^2/(2\mu r^2)$ prevale su quello gravitazionale a piccole distanze, mentre a grandi distanze prevale il potenziale gravitazionale, ossia:



$$\lim_{r\to 0} E_{p\,eff}(r) = +\infty,$$
$$\lim_{r\to +\infty} E_{p\,eff}(r) = 0,$$

per cui la funzione $E_{p\,eff}(r)$ deve presentare un minimo negativo per:

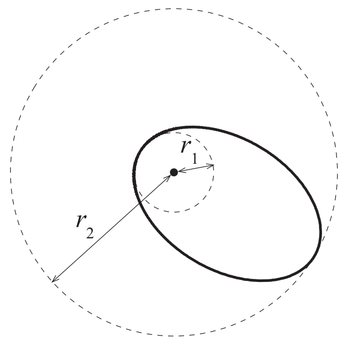
$$r = \frac{L^2}{G\mu mM},$$

dove $E_{p\,eff}$ vale:

$$E_{p\,eff}^{(min)} = -\frac{G^2\mu m^2 M^2}{2L^2}.$$

Fissate le condizioni iniziali e, di conseguenza fissati E e L, risulta:

$$\frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = E - E_{p\,eff},$$



per cui le regioni cinematicamente accessibili al moto radiale sono quelle per cui $E \geq E_{p\,eff}$ e, siccome $E_{p\,eff}$ presenta il minimo $E_{p\,eff}^{(min)}$, deve risultare:

$$E \geq E_{p\,eff}^{(min)} .$$

Se $E = E_{p\,eff}^{(min)}$ la regione permessa al moto radiale corrisponde ad un solo punto, cioè in tale circostanza r si mantiene costante ed il moto è circolare e, dalla (4.37), siccome $L = \mu r^2 \left(d\vartheta / dt \right)$ con L costante, anche $d\vartheta/dt$ è costante, cioè il moto è uniforme. Se $E > E_{p\,eff}^{(min)}$ il moto radiale si svolge nella regione $r_1 \leq r \leq r_2$, dove r_1 e r_2 (con $r_2 < +\infty$) sono le ascisse dei punti di intersezione della retta di ordinata E con il grafico della funzione $E_{p\,eff}\left(r\right)$; se $r_2 < +\infty$ la traiettoria si svolge nella regione finita compresa tra due circonferenze (nel piano del moto) di raggi r_1 e r_2; se $r_2 = +\infty$ il corpo tende ad allontanarsi indefinitamente dall'origine $r = 0$, cioè la traiettoria è aperta.