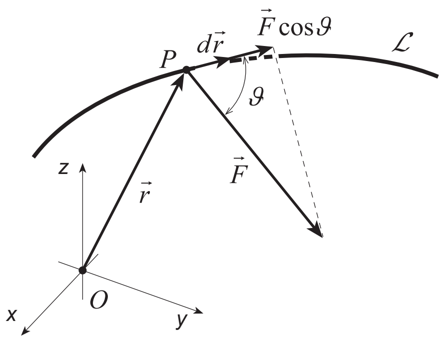
5 LAVORO ED ENERGIA

La valutazione dell'equazione del moto di una particella a partire dalla forza agente su di essa risulta particolarmente semplice qualora la forza è costante; in tal caso è possibile stabilire banalmente l'accelerazione del corpo e tale determinazione corrisponde, di fatto, ad un problema di cinematica. Lo studio del moto della particella diviene più complicato nella circostanza in cui la forza agente non è costante, ma dipende dal tempo o dalla posizione. Come già visto nei precedenti esempi, tale studio può essere portato avanti attraverso l'integrazione delle equazioni del moto.

Con l'introduzione dei concetti di lavoro e di energia è possibile effettuare una descrizione del moto alternativa a quanto visto fino ad ora, giungendo ai medesimi risultati che si ottengono tramite l'applicazione diretta delle leggi di Newton. In più circostanze l'analisi del problema condotta seguendo questo approccio risulta generalmente più semplice rispetto all'applicazione della seconda legge di Newton.

5.1 Lavoro di una forza

Consideriamo un punto materiale P in moto lungo una curva $\mathcal{L}$ per effetto di una forza $\vec{F}$; sia $\vec{r}$ il vettore posizione del punto in un sistema di riferimento inerziale. In un intervallo di tempo dt il punto compie uno spostamento $d\vec{r}$. Si definisce *lavoro* elementare della forza $\vec{F}$ agente sul punto materiale P che si sposta di $d\vec{r}$ la quantità scalare:



$$dW \equiv \vec{F} \cdot d\vec{r} = F dr \cos\vartheta . \qquad (5.1)$$

Siccome l'accelerazione $\vec{a}$ della particella può esprimersi attraverso la relazione (2.21) tramite la componente tangenziale a_t e quella normale a_n alla traiettoria, di conseguenza, dalla (4.1) la forza $\vec{F}$ può esprimersi come:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m\left(\hat{t}\, a_t + \hat{n}\, a_n\right) = \vec{F}_t + \vec{F}_n ,$$

dove $\vec{F}_t$ e $\vec{F}_n$ sono, rispettivamente, le componenti della forza $\vec{F}$ tangenziale e normale alla traiettoria; sostituendo questa espressione nella (5.1) si ottiene:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \left(\vec{F}_t + \vec{F}_n\right) \cdot d\vec{r} = \left(\vec{F}_t + \vec{F}_n\right) \cdot \left(\hat{t}\, ds\right),$$

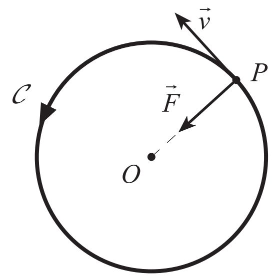
dove $d\vec{r}$ è stato espresso tramite la (2.4) attraverso lo spostamento infinitesimo ds lungo l'ascissa curvilinea; siccome il vettore $\vec{F}_n$ è perpendicolare a $\hat{t}$, segue:

$$dW = F_t\, ds ,$$

cioè il lavoro elementare è uguale al prodotto dello spostamento infinitesimo per la componente della forza lungo tale spostamento.

Dalla relazione (5.1) segue che se $\vartheta < 90°$ allora $dW > 0$ e il lavoro è detto *motore*; se $90° < \vartheta \leq 180°$ allora $dW < 0$ e il lavoro è detto *resistente*; infine se $\vartheta = 90°$ risulta $dW = 0$ essendo in questo caso la forza $\vec{F}$ ortogonale a $d\vec{r}$.

Esempio: Consideriamo il moto di un corpo lungo una traiettoria circolare $\mathcal{C}$ con velocità angolare costante. In tal caso l'accelerazione del corpo sarà solo centripeta e pertanto sul corpo deve agire una forza che, dalla (2.25) è pari a:



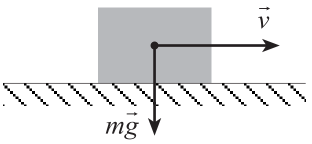
$$\vec{F} = m\vec{a}_n = m\frac{v^2}{R}\hat{n},$$

dalla relazione (5.1), il lavoro elementare fatto dal tale forza in corrispondenza di uno spostamento infinitesimo lungo la traiettoria $\mathcal{C}$ vale:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \left(m\frac{v^2}{R}\hat{n} \right) \cdot \left(\hat{t}\, ds \right) = 0,$$

cioè la forza $\vec{F}$ non compie lavoro.

Esempio: Consideriamo un corpo in moto su di un piano orizzontale, il lavoro elementare svolto dalla forza di gravità in corrispondenza di uno spostamento $d\vec{r}$ sul piano è:



$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \left(m\vec{g} \right) \cdot d\vec{r} = 0,$$

essendo $m\vec{g}$ ortogonale a $d\vec{r}$.

Esprimendo lo spostamento $d\vec{r}$ attraverso la (2.3) come somma degli spostamenti elementari lungo gli assi coordinati, la (5.1) può scriversi come:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \left(\hat{x}\, dx + \hat{y}\, dy + \hat{z}\, dz \right) = F_x dx + F_y dy + F_z dz\,,$$

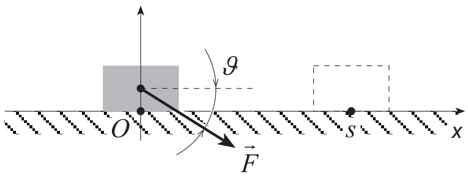
dove F_x, F_y e F_z rappresentano le componenti della forza lungo i tre assi coordinati. Il lavoro compiuto dalla forza $\vec{F}$ quando il punto materiale si sposta lungo la curva $\mathcal{L}$ tra un punto P_1 ed un punto P_2 si ottiene sommando i lavori elementari relativi agli infiniti spostamenti $d\vec{r}$ in cui è diviso il percorso da P_1 a P_2; tale somma prende il nome di *integrale di linea* lungo $\mathcal{L}$:

$$W_{12} = \int_{\mathcal{L}\, P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{L}\, P_1}^{P_2} F_x dx + F_y dy + F_z dz\,. \tag{5.2}$$

Pertanto, in generale, il lavoro eseguito dalla forza $\vec{F}$ nello spostamento del punto materiale dalla posizione P_1 a quella P_2 lungo un percorso $\mathcal{L}$ è l'integrale di linea di $\vec{F}$ da P_1 a P_2 lungo $\mathcal{L}$.

Nel sistema *SI* il lavoro viene misurato in *joule* (*J*) e $1\,J$ è il lavoro fatto da una forza di $1\,N$ in corrispondenza di uno spostamento di $1\,m$ del suo punto di applicazione nella direzione della forza.

Esempio: Consideriamo un corpo soggetto ad una forza $\vec{F}$, in moto rettilineo su un piano. Risulta:



$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x \, dx = F \cos \vartheta \, dx$$

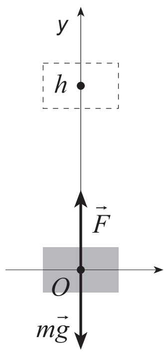
così, in corrispondenza di uno spostamento *s* lungo una retta, si ha:

$$W = \int_0^s \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_0^s F \cos \vartheta \, dx = F \cos \vartheta \int_0^s dx = Fs \cos \vartheta;$$

in particolare se $\vartheta = 0$ si ha $\cos \vartheta = 1$, così l'espressione precedente diventa:

$$W = Fs \, .$$

Esempio: Consideriamo un corpo di massa *m* in moto verticale a velocità costante dalla superficie terrestre fino ad una quota *h*. Affinché il moto avvenga a velocità costante la risultante delle forze agenti sul corpo lungo la direzione del moto deve essere nulla, cioè su di esso deve agire una forza $\vec{F}$ tale che:



$$F - mg = 0 \, ,$$

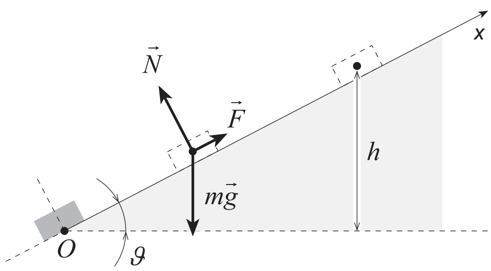
cioè la forza deve avere intensità:

$$F = mg \, .$$

In corrispondenza dello spostamento del corpo sino alla quota *h* il lavoro eseguito da tale forza vale:

$$W = \int_0^h F \, dy = Fh = mgh, \tag{5.3}$$

Esempio: Consideriamo un corpo di massa *m* che sale con velocità costante lungo un piano inclinato privo di attrito a partire dal suolo, fino ad una quota *h*. Siccome il moto avviene a velocità costante, la risultante delle forze agenti sul corpo lungo la direzione del moto deve essere nulla, cioè:



$$F - mg \sin \vartheta = 0 \, ,$$

dove *F* è il modulo della forza con cui viene spinto il blocco:

$$F = mg \sin \vartheta \, .$$

In corrispondenza dello spostamento del corpo sino alla quota *h*, il corpo avrà compiuto uno spostamento *s* lungo il piano inclinato pari a :

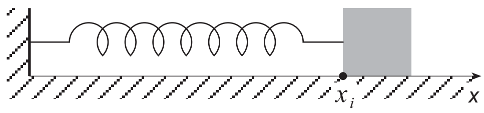
$$s = \frac{h}{\sin \vartheta} \, ,$$

così il lavoro eseguito dalla forza $\vec{F}$ vale:

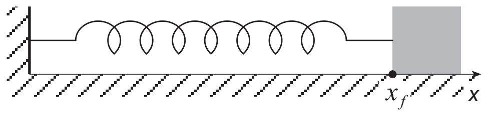
$$W = \int_0^s F \, dx = Fs = mg \sin \vartheta \frac{h}{\sin \vartheta} = mgh,$$

quindi il lavoro è lo stesso che si otterrebbe qualora il corpo fosse sollevato verticalmente con velocità costante sino alla quota *h* senza adoperare il piano inclinato.

Esempio: Consideriamo una molla elastica di costante k e stabiliamo il lavoro fatto dalla molla per portare un corpo ad essa collegato da una posizione x_i ad una posizione x_f. Siccome il problema è unidimensionale, dalla (4.14) risulta:



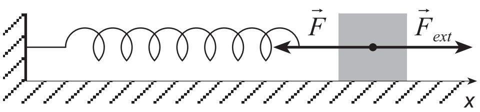
$$W = \int_{x_i}^{x_f} (-kx)\,dx = \frac{1}{2}kx_i^2 - \frac{1}{2}kx_f^2. \tag{5.4}$$



Si osservi che se $x_i > x_f$, cioè se la deformazione iniziale è maggiore di quella finale, $W > 0$, mentre se $x_i < x_f$, allora $W < 0$; quindi la molla compie un lavoro positivo solo quando tende a riportare il corpo nella posizione di equilibrio. In particolare, il lavoro eseguito dalla molla per portare il corpo dalla posizione di equilibrio $x_i = 0$ ad una generica posizione $x = x_f$ è:

$$W = \int_0^x (-k\xi)\,d\xi = -\frac{1}{2}kx^2.$$

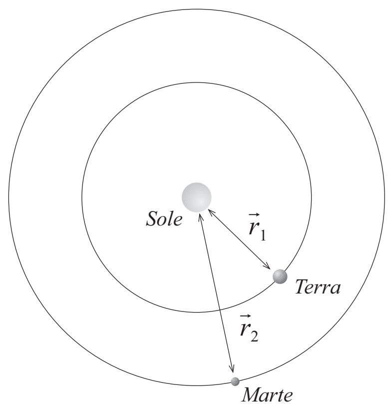
Siccome $W \propto |x|$, il lavoro della molla è lo stesso sia in compressione che in estensione. Stabiliamo il lavoro fatto da una forza esterna $\vec{F}_{ext}$ per portare il corpo connesso alla molla da una posizione iniziale $x_i = 0$ ad una finale $x = x_f$; in questo caso, affinché il corpo sia in equilibrio in ogni punto del percorso da x_i a x_f, la forza $\vec{F}_{ext}$ deve risultare uguale in modulo ma opposta alla forza elastica di richiamo (4.13), così:



$$W = \int_0^x F_{ext}\,dx = \int_0^x (k\xi)\,d\xi = \frac{1}{2}kx^2.$$

Ciò segue, per altro, dal fatto che $\vec{F}_{ext}$ è sempre diretta come lo spostamento $d\vec{r} = \hat{x}\,dx$, per cui risulta sempre $W > 0$; infatti, con riferimento allo schema di figura, se $\vec{F}_{ext}$ è nel verso delle x positive, lo spostamento avviene in tale verso e viceversa.

Esempio: Consideriamo una sonda spaziale in moto dalla Terra a Marte. Indicando con M la massa solare e con m quella della sonda, quando questa si trova a distanza r dal Sole, questo esercita sulla sonda una forza, detta *forza gravitazionale*, pari a:



$$\vec{F} = -G\frac{Mm}{r^2}\hat{r},$$

dove G è la *costante di gravitazione* pari a circa $6.67\times10^{11}\ Nm^2/kg^2$. Il lavoro eseguito da tale forza sulla sonda nel moto dalla Terra a Marte è:

$$W = \int_{r_1}^{r_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{r_1}^{r_2}\left(-G\frac{Mm}{r^2}\hat{r}\right)\cdot d\vec{r} = GMm\left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1}\right),$$

dove r_1 e r_2 sono, rispettivamente, le distanze del Sole dalla Terra e da Marte. Così siccome r_1 vale circa $1.5\times10^{11}\ m$ e r_2 vale circa $2.3\times10^{11}\ m$, la massa del Sole è di circa $1.99\times10^{30}\ kg$ e assumendo che la massa della sonda sia di $100\ kg$, si ha:

$$W \approx 3.0\times10^{10}\ J.$$

Si noti che il risultato conseguito è indipendente dal percorso tra la Terra e Marte ma dipende unicamente dai punti estremi di tale percorso. Pertanto, se la sonda si spostasse lungo un percorso differente da quello rettilineo, il lavoro eseguito dalla forza $\vec{F}$ su di essa sarebbe lo stesso. Osserviamo inoltre che se $r_2 \geq r_1$ allora $W \leq 0$ altrimenti, per $r_2 < r_1$ si ha $W > 0$, cioè, in particolare, il lavoro fatto da $\vec{F}$ è positivo se il satellite si avvicina al Sole; ciò è conseguenza del fatto che tale forza è attrattiva, ossia il corrispondente vettore punta sempre verso il Sole.

Esempio: Una forza pari a kt agisce su di una particella di massa *m*. Supponendo che la particella parta da ferma stabiliamo il lavoro della forza nei primi t_0 secondi. Per valutare lo spostamento infinitesimo prodotto dall'azione della forza sulla particella per un tempo dt ne stabiliamo la velocità, dalla (4.1) risulta:

$$ma(t) = kt\,,$$

da cui segue che l'accelerazione del corpo vale kt/m; pertanto integrando la relazione $dv = a(t)\,dt$ si ha:

$$\int_{v(0)}^{v(t)} d\varsigma = \int_0^t a(\zeta)\,d\zeta = \int_0^t \frac{k\zeta}{m}\,d\zeta\,,$$

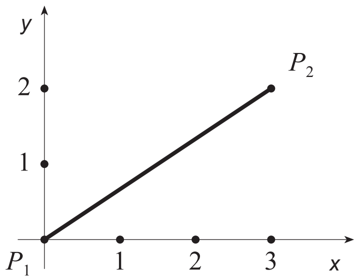
siccome per ipotesi $v(0) = 0$ si ha:

$$v(t) = \int_0^t \frac{k\zeta}{m}\,d\zeta = \frac{kt^2}{2m}$$

così, esprimendo lo spostamento infinitesimo come $v\,dt$, ovvero come $\left(kt^2/2m\right)dt$, il lavoro vale:

$$W = \int_0^x F\,d\xi = \int_0^{t_0} Fv\,d\zeta = \int_0^{t_0} (k\zeta)\left(\frac{k\zeta^2}{2m}\right)d\zeta = \frac{k^2 t_0^{\,4}}{8m}.$$

Esempio: Un punto materiale si sposta da una posizione P_1 di coordinate espresse in metri $(0, 0)$ ad una posizione P_2 di coordinate $(3, 2)$ in un piano e lungo una retta di equazione $y = (2/3)x$, sotto l'azione di una forza $\vec{F}$:



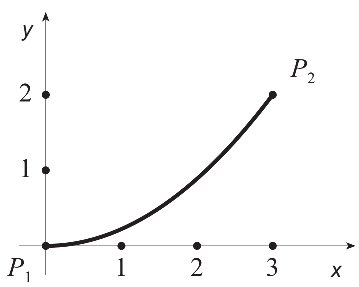
$$\vec{F} = \left(3xy + x^2\right)\hat{x} + (2y + 5)\,\hat{y}\,,$$

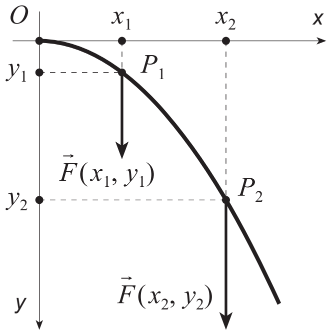
dove F è espressa in newton e le coordinate x e y in metri. Per calcolare il corrispondente lavoro utilizziamo l'espressione generale (5.2):

$$\begin{aligned} W &= \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_2} F_x dx + F_y dy = \int_{P_1}^{P_2} \left[\left(3xy + x^2\right)dx + (2y+5)\,dy\right] = \\ &= \int_0^3 \left\{\left[3x\left(\frac{2}{3}x\right) + x^2\right]dx + \left[2\left(\frac{2}{3}x\right) + 5\right]d\left(\frac{2}{3}x\right)\right\} = \int_0^3 \left(2x^2 + x^2 + \frac{8}{9}x + \frac{10}{3}\right)dx = \left(x^3 + \frac{4}{9}x^2 + \frac{10}{3}x\right)\Bigg|_0^3 = 41\,J. \end{aligned}$$

Qualora lo spostamento abbia luogo lungo un percorso differente il valore del lavoro cambia. Consideriamo infatti lo spostamento lungo la traiettoria parabolica di equazione $y = (2/9)x^2$, il lavoro vale:

$$\begin{aligned} W &= \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_2} F_x dx + F_y dy = \int_{P_1}^{P_2} \left[\left(3xy + x^2\right)dx + (2y+5)\,dy\right] = \\ &= \int_0^3 \left\{\left[3x\left(\frac{2}{9}x^2\right) + x^2\right]dx + \left[2\left(\frac{2}{9}x^2\right) + 5\right]d\left(\frac{2}{9}x^2\right)\right\} = \\ &= \int_0^3 \left(\frac{2}{3}x^3 + x^2 + \frac{16}{81}x^3 + \frac{20}{9}\right)dx = \left(\frac{35}{162}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{10}{9}x^2\right)\Bigg|_0^3 = 36.5\,J. \end{aligned}$$





Esempio: Un punto materiale si muove sotto l'azione di una forza pari a

$$\vec{F} = bx\,\hat{x},$$

in cui b è una costante positiva e il corrispondente moto è descritto dalle equazioni orarie.

$$\begin{cases} x(t) = kt^2, \\ y(t) = ht, \end{cases}$$

dove k e h sono entrambi positivi. Eliminando il parametro t da tali equazioni si trova l'equazione della traiettoria:

$$x = \frac{k}{h^2} y^2,$$

così Il lavoro fatto dalla forza $\vec{F}$ quando il punto materiale passa da una posizione P_1 ad una posizione P_2 vale:

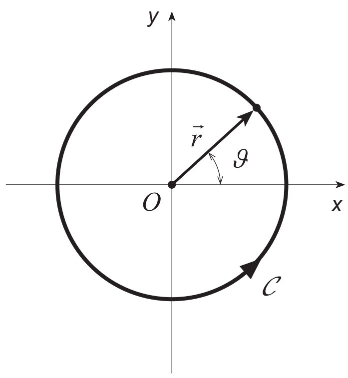
$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx = \int_{x_1}^{x_2} (bx)\,dx = \frac{b}{2}\left(x_2^{\,2} - x_1^{\,2}\right).$$

Si può pervenire al medesimo risultato attraverso le equazioni orarie, infatti il lavoro può essere espresso come:

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{x_1}^{x_2} F_x dx = \int_{t(x_1)}^{t(x_2)} F_x v_x d\zeta$$

dove la velocità del punto materiale nella direzione della forza vale:

$$v_x = \frac{dx(t)}{dt} = 2kt,$$



e inoltre $t(x_1) = \sqrt{x_1/k}$ e $t(x_2) = \sqrt{x_2/k}$, per cui sostituendo nell'espressione precedente, si ha:

$$W = \int_{t(x_1)}^{t(x_2)} F_x v_x d\zeta = \int_{\sqrt{x_1/k}}^{\sqrt{x_2/k}} \left[b\left(kt^2\right)\right](2kt)\,dt = 2k^2 b \frac{t^4}{4}\bigg|_{\sqrt{x_1/k}}^{\sqrt{x_2/k}} = \frac{bk^2}{2}\left(\frac{x_2^{\,2}}{k^2} - \frac{x_1^{\,2}}{k^2}\right) = \frac{b}{2}\left(x_2^{\,2} - x_1^{\,2}\right).$$

Esempio: Consideriamo un punto materiale in moto lungo una circonferenza $\mathcal{C}$ di raggio R situata nel piano *xy*, con centro nell'origine; il punto materiale è soggetto ad una forza:

$$\vec{F} = (2x - y + z)\,\hat{x} + \left(x + y - z^2\right)\hat{y} + (3x - 2y + 4z)\,\hat{z}.$$

Nel piano *xy* la coordinata *z* è nulla, per cui in tale piano la forza agente sul punto materiale è:

$$\vec{F} = (2x - y)\,\hat{x} + (x + y)\,\hat{y} + (3x - 2y)\,\hat{z};$$

il lavoro elementare fatto da questa forza, dalla (5.2) vale:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = (2x - y)\,dx + (x + y)\,dy. \qquad (5.5)$$

D'altra parte la traiettoria del punto è tale che:

$$\begin{cases} x = R\cos\vartheta, \\ y = R\sin\vartheta, \end{cases}$$

e, di conseguenza:

$$\begin{cases} dx = -R\sin\vartheta\, d\vartheta, \\ dy = R\cos\vartheta\, d\vartheta; \end{cases}$$

così, sostituendo tali differenziali nella (5.5) si ha:

$$\begin{aligned} dW &= \left(2R\cos\vartheta - R\sin\vartheta\right)\left(-R\sin\vartheta\right)d\vartheta + \left(R\cos\vartheta + R\sin\vartheta\right)\left(-R\cos\vartheta\right)d\vartheta = \\ &= -2R^2\cos\vartheta\sin\vartheta\, d\vartheta + R^2\sin^2\vartheta\, d\vartheta + R^2\cos^2\vartheta\, d\vartheta + R^2\cos\vartheta\sin\vartheta\, d\vartheta = \\ &= R^2\, d\vartheta - R^2\cos\vartheta\sin\vartheta\, d\vartheta. \end{aligned}$$

Infine, in corrispondenza di una rotazione lungo la circonferenza $\mathcal{C}$ l'angolo ϑ varia tra 0 e 2π così, integrando si ha:

$$W = \int_0^{2\pi}\left(R^2\, d\vartheta - R^2\cos\vartheta\sin\vartheta\, d\vartheta\right) = 2\pi R^2 - R^2\int_0^{2\pi}\cos\vartheta\sin\vartheta\, d\vartheta = 2\pi R^2 - R^2\int_0^{2\pi}\zeta\, d\zeta = 2\pi R^2.$$

Tale risultato rappresenta il lavoro svolto dalla forza $\vec{F}$ in corrispondenza di una rotazione del punto materiale lungo la circonferenza.

Un'ulteriore proprietà del lavoro derivante dalla sua formulazione matematica è rappresentata dall'additività. Consideriamo un insieme di forze, $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_N$ agenti su di uno stesso punto materiale; il lavoro compiuto dalla forza risultante $\vec{F}$ pari a

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_N,$$

in corrispondenza di uno spostamento del punto da una posizione P_1 ad una posizione P_2 vale:

$$\begin{aligned} W_{12} &= \int_{P_1}^{P_2}\vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_2}\left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_N\right)\cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_2}\vec{F}_1\cdot d\vec{r} + \int_{P_1}^{P_2}\vec{F}_2\cdot d\vec{r} + \ldots + \int_{P_1}^{P_2}\vec{F}_N\cdot d\vec{r} = \\ &= W_1^{(12)} + W_2^{(12)} + \ldots + W_N^{(12)}, \end{aligned}$$

cioè il lavoro della risultante $\vec{F}$ in corrispondenza di un certo spostamento è uguale alla somma dei lavori eseguiti da ciascuna componente relativamente allo stesso spostamento.

5.2 Potenza

Per caratterizzare un sistema dal punto di vista energetico, oltre alla capacità di compiere un certo lavoro, è opportuno stabilire la rapidità con cui tale lavoro può essere eseguito; a tale scopo si introduce il concetto di potenza. La *potenza istantanea* sviluppata da un agente è data da:

$$P \equiv \frac{dW}{dt},$$

e la *potenza media* sviluppata in un certo tempo *t* è:

$$\langle P \rangle \equiv \frac{W}{t}.$$

L'unita di misura della potenza è il J/s e, nel sistema *SI* a tale unità viene attribuito il nome di *watt*:

$$[P] \equiv W.$$

Impiegando questa unità è possibile anche esprimere il lavoro in unità di potenza per intervallo di tempo; da ciò deriva l'unità *kilowattora* (*kWh*) generalmente adoperata per la misura del lavoro elettrico speso presso le utenze: il *kilowattora* è il lavoro fatto in un ora da un dispositivo in grado di sviluppare una potenza di $1\,kW$.

Esempio: Una lampadina da $200\,W$ resta accesa per 1 mese, stimando un costo dell'energia di 0.141 € per $1\,kWh$, ciò corrisponde ad una spesa di $0.2\,kWh \times 30 \times 24\,h \times 0.141$ €$/kWh = 20.30$ €. A tale costo vanno aggiunte le tasse che stimiamo al 20%, così il costo complessivo è di 24.40 €.

La potenza meccanica sviluppata da un corpo può anche esprimersi mediante la velocità $\vec{v}$ del corpo e la forza $\vec{F}$ agente su di esso. Dalla (5.1) si ha:

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{\vec{F} \cdot d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}.$$

Nell'ipotesi in cui $\vec{F}$ e $\vec{v}$ sono paralleli, se hanno lo stesso verso risulta $P > 0$ altrimenti si ha $P < 0$, cioè il lavoro fatto sul corpo è negativo ovvero la forza esercitata sul corpo ha direzione opposta allo spostamento $d\vec{r}$ e quindi anche alla velocità $\vec{v}$.

5.3 Energia cinetica

Consideriamo un punto materiale di massa *m* indipendente dalla velocità soggetto ad una forza $\vec{F}$; dalla relazione (5.1), esprimendo la forza attraverso la (4.30), si ha:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot d\vec{r}, \tag{5.6}$$

esprimendo inoltre la velocità $\vec{v}$ come la derivata dello spostamento, il prodotto $(d\vec{v}/dt) \cdot d\vec{r}$ si può scrivere come[1]:

[1] Tale proprietà segue dalla definizione di differenziale di una funzione, infatti se *f* e *g* sono due funzioni derivabili, allora $df = (df/dt)dt$ e $dg = (dg/dt)dt$, così risulta:

$$\frac{df}{dt} dg = \frac{df}{dt}\left(\frac{dg}{dt} dt\right) = \left(\frac{df}{dt} dt\right)\frac{dg}{dt} = df\, \frac{dg}{dt}.$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = d\vec{v}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = d\vec{v}\cdot\vec{v}\ ,$$

così sostituendo nella (5.6), si ha:

$$dW = m\,d\vec{v}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}m\,d\left(\vec{v}\cdot\vec{v}\right) = \frac{1}{2}m\,dv^2 = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right),$$

dove l'ultimo passaggio è possibile solo nell'ipotesi in cui la massa del punto materiale è indipendente dalla velocità. In relazione ad uno spostamento finito da una posizione P_1 ad una P_2 il lavoro eseguito dalla forza $\vec{F}$ vale:

$$W_{12} = \int_{P_1}^{P_2} d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \frac{1}{2}mv_2^{\,2} - \frac{1}{2}mv_1^{\,2}\ . \tag{5.7}$$

dove v_1 e v_2 rappresentano i moduli della velocità del punto materiale, rispettivamente, nelle posizioni P_1 e P_2. Per un punto materiale di massa *m* e velocità $\vec{v}$, la quantità

$$E_k \equiv \frac{1}{2}mv^2 \tag{5.8}$$

prende il nome di *energia cinetica* del corpo, pertanto la (5.7) può esprimersi come:

$$W_{12} = E_{k\,2} - E_{k\,1}\,; \tag{5.9}$$

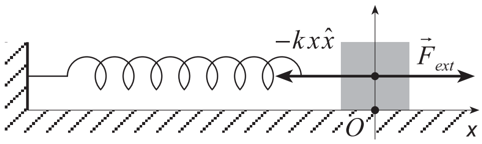
cioè il lavoro fatto dalla risultante delle forze agenti su un corpo è uguale alla variazione della sua energia cinetica. Questa conseguenza della seconda legge di Newton prende il nome di *teorema dell'energia cinetica*. Dalla relazione precedente segue che l'unità di misura dell'energia cinetica è la stessa di quella del lavoro.

Sebbene il modulo e la direzione della forza agente su un corpo non dipendano dal sistema di riferimento inerziale considerato, lo stesso non vale per lo spostamento. Ciò fa sì che il lavoro esercitato da una forza su un corpo dipende dal particolare sistema di riferimento utilizzato. Questo si verifica, ad esempio, se consideriamo l'azione di una forza su un corpo in moto a velocità costante; se il moto è riferito ad un sistema di riferimento solidale al corpo, il lavoro svolto dalla forza è ovviamente nullo essendo tale la velocità relativa. Così come il lavoro dipende dal sistema di riferimento anche l'energia cinetica del corpo dipende dal sistema di riferimento e ciò è una banale conseguenza del fatto che relativamente a sistemi di riferimento inerziali in moto relativo a differenti velocità si misurano velocità diverse per uno stesso corpo in moto. Tuttavia, pur non concordando sui valori del lavoro e dell'energia cinetica, differenti osservatori sono sempre in grado di verificare la validità del teorema dell'energia cinetica.

Esempio: Consideriamo il moto di un corpo su una traiettoria circolare. In questo caso sul corpo agisce la forza centripeta che, come già visto, essendo sempre perpendicolare alla direzione del moto, non compie lavoro. Dalla relazione (5.7) segue quindi che la velocità è costante in modulo; ciò significa che il vettore velocità, pur variando in direzione e verso istante per istante, non cambia in modulo.

Esempio: Consideriamo un corpo di massa *m* lasciato cadere da un'altezza *h* dalla superficie terrestre. Il lavoro *W* eseguito dalla forza di gravità in corrispondenza dello spostamento complessivo del corpo, dalla (5.3), vale mgh. Dal teorema dell'energia cinetica, considerando che la velocità iniziale del corpo è nulla, segue:

$$W = \frac{1}{2}mv_f^{\,2} - \frac{1}{2}mv_i^{\,2} = \frac{1}{2}mv_f^{\,2},$$



così sostituendo a W la sua espressione, si ha:

$$mgh = \frac{1}{2}mv_f^{\,2},$$

da cui segue:

$$v_f = \sqrt{2gh},$$

che è lo stesso risultato che si otterrebbe dalla diretta applicazione delle leggi di Newton.

Esempio: Consideriamo un punto materiale di massa m, in quiete, connesso ad una molla di costante elastica k. Supponiamo di applicare al punto una forza $\vec{F}_{ext}$ costante in modulo, direzione e verso. Il lavoro eseguito dalla risultante delle forze agenti sul corpo in corrispondenza di uno spostamento x sarà:

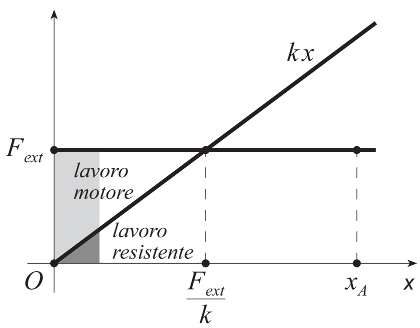
$$W = \int_0^x F_T(\xi)\,d\xi,$$

dove:

$$F_T(x) \equiv F_{ext} - kx,$$

per cui

$$W = \int_0^x \left(F_{ext} - k\xi\right)d\xi = F_{ext}x - \frac{1}{2}kx^2.$$

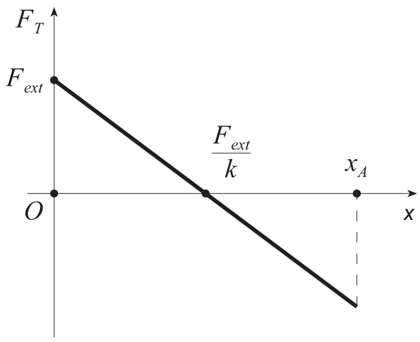


Dal teorema dell'energia cinetica, siccome la velocità iniziale è nulla, risulta:

$$F_{ext}x - \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mv^2,$$

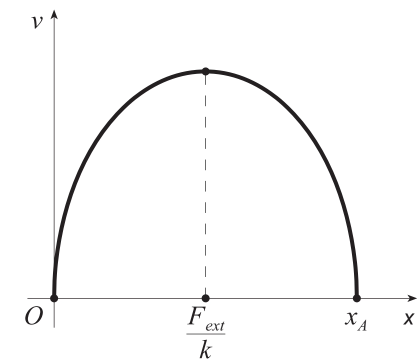
così l'espressione della velocità in relazione alla posizione del corpo è:

$$v = \sqrt{\frac{x}{m}\left(2F_{ext} - kx\right)}. \tag{5.10}$$



Da tale relazione ricaviamo la posizione x_A in corrispondenza della quale si arresta il corpo; ciò accade quando si annulla la velocità, ossia quando x vale:

$$x_A = \frac{2F_{ext}}{k}.$$



Dall'esame della (5.10) deduciamo che il modulo della velocità e quindi l'energia cinetica crescono fino ad un massimo che si ottiene quando i moduli della forza $\vec{F}_{ext}$ e della forza elastica della molla sono uguali, dopo di che l'energia cinetica prende a diminuire per annullarsi in x_A. Il lavoro complessivo di $F_T(x)$ sarà nullo, come consegue sia dal fatto che l'area sottesa da tale funzione tra 0 e x_A è nulla, sia dal teorema dell'energia cinetica, essendo nulle le velocità iniziali e finali del corpo.

Esempio: (*Lavoro di una forza di attrito dinamico*) In corrispondenza del moto di un corpo da un punto P_1 ad un punto P_2 lungo un percorso $\mathcal{L}_{12}$ su un piano scabro il lavoro della forza di attrito dinamico $\vec{f}_d$ vale:

$$W = \int_{\mathcal{L}_{12}\,P_1}^{P_2} \vec{f}_d \cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{L}_{12}\,P_1}^{P_2} \left(-\mu_d N \frac{\vec{v}}{v}\right)\cdot d\vec{r} = -\mu_d N \int_{\mathcal{L}_{12}\,P_1}^{P_2} dr = -\mu_d N \overline{\mathcal{L}_{12}} = -\mu_d NL$$

dove, dalla (4.11) la forza di attrito dinamico è stata espressa vettorialmente tenendo conto che è sempre opposta alla direzione del moto stabilita dal versore $\vec{v}/v$ e si è indicato con $\overline{\mathcal{L}_{12}}$ la lunghezza *L* del percorso $\mathcal{L}_{12}$, misurata lungo la traiettoria del corpo nel suo moto. Ne segue che, fissato il prodotto $\mu_d N$, cioè il modulo di $\vec{f}_d$, si ha un diverso lavoro in corrispondenza di differenti percorsi $\mathcal{L}_{12}$ che portano dal punto P_1 al punto P_2 e pertanto, a differenza, ad esempio, del lavoro della forza peso o di quello della forza gravitazionale, il lavoro della forza di attrito dinamico non può esprimersi come la differenza dei valori di una funzione delle coordinate nei punti P_1 e P_2. Si noti inoltre che il lavoro della forza di attrito dinamico è sempre resistente (cioè $\vec{f}_d \cdot d\vec{r} < 0$) e qualora cambia il verso del moto, si inverte anche quello di $\vec{f}_d$ essendo tale vettore proporzionale all'opposto del versore $\vec{v}/v$. È possibile includere l'attrito dinamico nella caratterizzazione energetica del moto su un piano scabro osservando che, nel caso in cui il moto è soggetto solo a tale forza, si ha:

$$-f_d = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = m\frac{dv}{dx}v\,,$$

e moltiplicando ambo i membri per dx, segue:

$$-f_d\,dx = mv\,dv\,,$$

così, integrando ambo i membri lungo un percorso $\mathcal{L}_{12}$ dal punto P_1 al punto P_2, si ha:

$$-f_d L = -f_d \overline{\mathcal{L}_{12}} = \int_{\mathcal{L}_{12}\,P_1}^{P_2} \vec{f}_d \cdot d\vec{r} = \int_{v_1}^{v_2} mv\,dv = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 = E_{k\,2} - E_{k\,1},$$

cioè:

$$E_{k\,2} - E_{k\,1} = -f_d L.$$

Quindi nel moto su una superficie scabra lungo una traiettoria di lunghezza *L*, l'energia cinetica di un corpo diminuisce sempre di una quantità $f_d L$. Sperimentalmente si osserva che a tale diminuzione corrisponde un riscaldamento sia del corpo che della superficie scabra. Qualora sul corpo agiscano altre forze oltre all'attrito, il teorema dell'energia cinetica assume la forma:

$$W - f_d L = E_{k\,2} - E_{k\,1},$$

in cui *W* rappresenta il lavoro eseguito dalla risultante delle forze agenti sul corpo esclusa la forza di attrito dinamico.

5.4 Forze conservative, energia potenziale

Negli esempi precedenti si è visto che per talune forze, come la forza elastica o la forza peso, il lavoro calcolato tra due punti dipende dalle sole coordinate di tali punti e risulta indipendente dal particolare percorso che congiunge i punti stessi; al contrario, per altre forze, come la forza di attrito, il lavoro dipende dalla traiettoria tra i punti. Le forze per le quali il lavoro non dipende dal cammino percorso sono dette *conservative* mentre quelle per le quali non vale tale proprietà sono dette *non conservative*.

Per una forza conservativa $\vec{F}$ il calcolo del lavoro tra due punti P_1 e P_2 non richiede la conoscenza del particolare percorso seguito così, tale determinazione può essere eseguita considerando la traiettoria tra P_1 e P_2 che comporta il calcolo più semplice; considerando le traiettorie $\mathcal{L}_I$ e $\mathcal{L}_{II}$, in tale caso si ha:

$$\int_{\mathcal{L}_I\,P_1}^{P_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{L}_{II}\,P_1}^{P_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}\cdot d\vec{r}\ ,$$

dove, nell'ultimo integrale, si prescinde dal percorso da P_1 a P_2 essendo, per ipotesi, ininfluente. Siccome il lavoro di una forza conservativa dipende dai soli punti estremi P_1 e P_2 del percorso, se si inverte il senso di percorrenza tra tali punti, ossia ci si sposta da P_2 a P_1, il lavoro cambia di segno:

$$\int_{P_1}^{P_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = -\int_{P_2}^{P_1} \vec{F}\cdot d\vec{r}\ .$$

Un generico percorso chiuso $\mathcal{C}$ può essere rivisto come l'unione di due percorsi aperti, il primo $\mathcal{L}_{AB}$ da un punto generico *A* di $\mathcal{C}$ ad un altro punto *B* sempre di $\mathcal{C}$ e il secondo, $\mathcal{L}_{BA}$ da *B* a d *A*:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\mathcal{L}_{AB}\,A}^{B} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\mathcal{L}_{BA}\,B}^{A} \vec{F}\cdot d\vec{r}\ ,$$

in cui si è fatto uso del simbolo $\oint$ per indicare l'integrazione lungo una curva chiusa. Se la forza $\vec{F}$ è conservativa i due integrali al secondo membro sono uno l'opposto dell'altro, per cui:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0\,;$$

siccome tale caratteristica prescinde dal particolare percorso chiuso $\mathcal{C}$, concludiamo che il lavoro di una forza conservativa fatto lungo un generico percorso chiuso è sempre nullo.

La funzione delle coordinate che esprime il lavoro di una forza conservativa prende il nome di *energia potenziale* E_p così, per una forza conservativa $\vec{F}$, il lavoro di tale forza nel percorso dal punto P_1 al punto P_2 vale:

$$W_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = E_{p1} - E_{p2} = -\left(E_{p2} - E_{p1}\right) = -\Delta E_p\,, \tag{5.11}$$

in cui E_{p1} e E_{p2} rappresentano, rispettivamente, il valore della funzione energia potenziale calcolato nei punti P_1 e P_2, cioè $E_{p1} = E_p\left(x_{P1}, y_{P1}, z_{P1}\right)$ e $E_{p2} = E_p\left(x_{P2}, y_{P2}, z_{P2}\right)$. Si osservi che l'energia potenziale è definita a meno di una costante additiva il cui ruolo è inessenziale nel calcolo del lavoro, infatti se all'espressione dell'energia potenziale si somma una costante *k*, posto:

$$E_p{}' \equiv E_p + k\,,$$

dalla (5.11) risulta:

$$E_{p1}{}' - E_{p2}{}' = E_{p1} + k - \left(E_{p2} + k\right) = E_{p1} - E_{p2} = W_{12}\,.$$

Tale caratteristica consente di definire il livello di riferimento dell'energia potenziale nella maniera più opportuna in relazione all'oggetto di studio. Ad esempio, in un problema di caduta di gravi, il livello di riferimento più utile è in corrispondenza della superficie terrestre mentre, per la descrizione del moto di un satellite generalmente risulta più conveniente assumere lo zero dell'energia potenziale a distanza infinita.

Consideriamo un moto unidimensionale; il lavoro di una forza conservativa per spostare un punto materiale da una posizione x_0 ad una posizione x vale:

$$\int_{x_0}^{x} F\,d\xi = E_p\left(x_0\right) - E_p\left(x\right),$$

da cui segue:

$$E_p\left(x\right) = -\int_{x_0}^{x} F\,d\xi + E_p\left(x_0\right);$$

derivando ambo i membri di questa relazione si trova:

$$F = -\frac{dE_p\left(x\right)}{dx}\,. \tag{5.12}$$

Questa identità, che costituisce un esempio particolare di una relazione di carattere generale, consente di ricavare la forza agente su di un corpo quando è nota l'espressione della sua energia potenziale; inoltre, dalla (5.12) segue che è possibile attribuire all'opposto della forza il significato di tasso di variazione dell'energia potenziale nella direzione *x*. Per generalizzare questa identità osserviamo che essa permette di esprimere il differenziale della funzione energia potenziale $dE_p\left(x\right)$ come il prodotto $-F\,dx$; se la forza $\vec{F}$ è una funzione delle tre variabili spaziali di un sistema di riferimento cartesiano, il differenziale dE_p si scrive come:

$$dE_p = -\vec{F}\cdot d\vec{r} = -\left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right). \tag{5.13}$$

Mentre in una dimensione il differenziale di E_p vale $\left(dE_p/dx\right)dx$, qualora la funzione E_p dipenda da più variabili, la legge di variazione di E_p va espressa attraverso le corrispondenti derivate parziali. Supponendo che l'energia potenziale sia funzione delle tre variabili spaziali, *x*, *y*, e *z* di un sistema di riferimento cartesiano, la derivata parziale di E_p rispetto ad una certa variabile, ad esempio *x*, è valutata stabilendo la derivata della la funzione E_p rispetto a *x*, calcolata mantenendo costanti *y* e *z*, cioè:

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} \equiv \left.\frac{dE_p}{dx}\right|_{y,z\equiv cost} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{E_p(x+\Delta x, y, z) - E_p(x, y, z)}{\Delta x}.$$

Così, in generale, il differenziale dE_p si esprime come:

$$dE_p = \frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz ,$$

pertanto, sostituendo nella (5.13), si ottiene:

$$\frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz = -\left(F_x dx + F_y dy + F_z dz\right).$$

Poiché le variabili *x*, *y*, e *z* sono tra loro indipendenti, lo sono anche i corrispondenti differenziali dx, dy e dz, così da questa identità segue:

$$\begin{cases} F_x = -\dfrac{\partial E_p}{\partial x}, \\ F_y = -\dfrac{\partial E_p}{\partial y}, \\ F_z = -\dfrac{\partial E_p}{\partial z}; \end{cases} \tag{5.14}$$

si osservi che tali relazioni conducono alla (5.12) nel caso di moto unidimensionale. Quindi come l'espressione $F_x dx + F_y dy + F_z dz$ viene riguardata come il prodotto scalare tra il vettore $\vec{F}$ e il vettore $d\vec{r}$, $\vec{F} \cdot d\vec{r}$, anche l'espressione $\left(\partial E_p/\partial x\right)dx + \left(\partial E_p/\partial y\right)dy + \left(\partial E_p/\partial z\right)dz$ può essere considerata quale il prodotto scalare di due vettori, ossia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_p}{\partial x} dx + \frac{\partial E_p}{\partial y} dy + \frac{\partial E_p}{\partial z} dz &= \left(\hat{x}\frac{\partial E_p}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial E_p}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial E_p}{\partial z}\right) \cdot \left(\hat{x}\,dx + \hat{y}\,dy + \hat{z}\,dz\right) = \\ &= \left(\hat{x}\frac{\partial E_p}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial E_p}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial E_p}{\partial z}\right) \cdot d\vec{r}. \end{aligned}$$

Il vettore $\hat{x}\left(\partial E_p/\partial x\right) + \hat{y}\left(\partial E_p/\partial y\right) + \hat{z}\left(\partial E_p/\partial z\right)$ prende il nome di *gradiente* della funzione E_p e si indica $\vec{\nabla} E_p$, pertanto:

$$\vec{\nabla} E_p \equiv \hat{x}\frac{\partial E_p}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial E_p}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial E_p}{\partial z}.$$

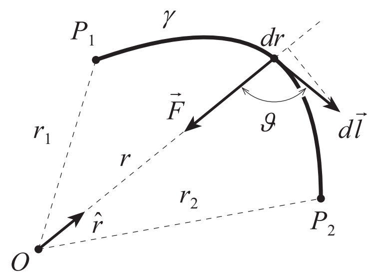
Attraverso il concetto di gradiente il legame tra la forza $\vec{F}$ e l'energia potenziale E_p, rappresentato dalle relazioni (5.14) può esprimersi, in sintesi, come:

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_p ,$$

che corrisponde all'identità:

$$\hat{x}\,F_x + \hat{y}\,F_y + \hat{z}\,F_z = -\left(\hat{x}\frac{\partial E_p}{\partial x} + \hat{y}\frac{\partial E_p}{\partial y} + \hat{z}\frac{\partial E_p}{\partial z} \right),$$

ne segue che, ad esempio, la componente lungo la direzione x della forza $\vec{F}$ è pari a $-\partial E_p / \partial x$.



Esempio: Consideriamo un punto materiale in moto lungo una traiettoria γ, da una posizione P_1 ad un'altra P_2 sotto l'azione di una forza centrale $\vec{F}$ pari a:

$$\vec{F} \equiv -f(r)\,\hat{r} ,$$

cioè costantemente diretta verso il centro di forza (ossia $\vec{F}$ è una forza attrattiva). Il lavoro elementare di tale forza in corrispondenza di uno spostamento $d\vec{l}$ vale:

$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{l} = \left|\vec{F}\right|\left|d\vec{l}\right|\cos\vartheta = f(r)\,dl\cos\vartheta = -f(r)\,dr ,$$

dove ϑ è l'angolo compreso tra i vettori $\vec{F}$ e $d\vec{l}$ e siccome dr vale $= -dl\cos\vartheta$. Pertanto, posto $r_1 \equiv \overline{OP_1}$ e $r_2 \equiv \overline{OP_2}$, il lavoro corrispondente al percorso da P_1 a P_2 lungo la traiettoria γ vale:

$$W_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int_{r_1}^{r_2} \left[-f(r)\right] dr.$$

Se $U(r)$ è la primitiva della funzione $f(r)$, cioè $f(r) = dU(r)/dr$, sostituendo nell'espressione precedente si trova:

$$W_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \left[-f(r)\right] dr = \int_{r_1}^{r_2} \left[-\frac{dU}{dr}\right] dr = -\int_{r_1}^{r_2} dU = -\left[U(r_2) - U(r_1)\right].$$

Dal fatto che il lavoro W_{12} non dipende dalla traiettoria γ da P_1 a P_2 concludiamo che una forza centrale è conservativa. Nel caso esaminato in questo esempio la funzione energia potenziale associata a $\vec{F}$ coincide con $U(r)$.

Esempio: La forza gravitazionale esercitata su un punto materiale di massa m_1 da un punto materiale di massa m_2 posto a distanza r è:

$$\vec{F} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\hat{r},$$

tale forza è evidentemente di tipo centrale e il lavoro da essa compiuto nello spostamento del punto di massa m_1 da una posizione a distanza r_1 da m_2 ad una a distanza r_2, sempre da m_2, vale:

$$W_{12} = \int_{r_1}^{r_2} \left(-G\frac{m_1 m_2}{r^2}\right) dr = G\frac{m_1 m_2}{r_2} - G\frac{m_1 m_2}{r_1}.$$

Dal fatto che la forza gravitazionale è una forza centrale e quindi è conservativa e dalla relazione (5.11) segue:

$$-\left[E_p\left(r_2\right)-E_p\left(r_1\right)\right]=W_{12}=G\frac{m_1m_2}{r_2}-G\frac{m_1m_2}{r_2}$$

così, indicando con k una costante arbitraria, l'energia potenziale associata alla forza gravitazionale vale:

$$E_p\left(r\right)=-G\frac{m_1m_2}{r}+k.$$

Come già anticipato l'arbitrarietà della costante additiva consente di fissare il livello zero dell'energia potenziale. Nel caso della forza gravitazionale tale livello viene solitamente posto all'infinito, cioè si pone:

$$E_p\left(\infty\right)=\lim_{r\to\infty}E_p\left(r\right)\equiv 0,$$

da cui segue $k\equiv 0$. Si noti infine come, attraverso la (5.12), è possibile ricavare l'espressione della forza a partire da quella dell'energia potenziale, infatti:

$$F=-\frac{dE_p\left(r\right)}{dr}=-\frac{d}{dr}\left(-G\frac{m_1m_2}{r}+k\right)=-G\frac{m_1m_2}{r^2}$$

Esempio: Il lavoro svolto dalla forza peso in corrispondenza di uno spostamento dalla quota y_1 alla quota y_2, con $y_1<y_2$ è

$$W_{12}=\int_{P_1}^{P_2}\left(-mg\hat{y}\right)\cdot d\vec{r}=\int_{y_1}^{y_2}\left(-mg\right)dy=mgy_1-mgy_2,$$

pertanto, dalla (5.11) possiamo identificare l'energia potenziale associata a tale forza con la funzione:

$$E_p\left(y\right)=mgy+k.$$

La costante k consente di fissare lo zero dell'energia potenziale ad una certa quota y_0, cioè, imponendo ad esempio $E_p\left(y_0\right)\equiv 0$, segue $k=-mgy_0$, così l'energia potenziale associata alla forza peso si esprime come:

$$E_p\left(y\right)=mg\left(y-y_0\right).$$

5.5 Conservazione dell'energia meccanica

Per una forza conservativa la (5.9) e la (5.11) valgono simultaneamente, così, confrontando tali relazioni, si ha

$$E_{p\,1}-E_{p\,2}=E_{k\,2}-E_{k\,1},$$

ovvero:

$$E_{k\,1}+E_{p\,1}=E_{k\,2}+E_{p\,2},$$

cioè la somma dell'energia cinetica e dell'energia potenziale di un punto materiale in moto sotto l'azione di una forza conservativa si mantiene costante durante il moto, ossia si conserva. La somma dell'energia cinetica E_k e dell'energia potenziale E_p di un corpo soggetto ad una forza conservativa è detta *energia meccanica* E del corpo:

$$E \equiv E_k + E_p \,. \tag{5.15}$$

Qualora sul corpo agiscano più forze conservative, l'energia potenziale sarà data dalla somma $E_p{}^{(1)} + E_p{}^{(2)} + \ldots + E_p{}^{(N)}$ delle energie potenziali corrispondenti a ciascuna delle forze conservative. In generale su un punto materiale possono agire contemporaneamente forze conservative e forze non conservative, così il lavoro della risultante di queste forze agenti sul punto può esprimersi come somma:

$$W_{12} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}^{(c)} \cdot d\vec{r} + \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}^{(nc)} \cdot d\vec{r} = W_{12}{}^{(c)} + W_{12}{}^{(nc)} \,,$$

dove $\vec{F}^{(c)}$ e $\vec{F}^{(nc)}$ rappresentano rispettivamente, la risultante delle forze conservative e non conservative agenti sul corpo. Dalla (5.9) segue:

$$W_{12} = W_{12}{}^{(c)} + W_{12}{}^{(nc)} = E_{k\,2} - E_{k\,1}$$

inoltre, siccome le forze $\vec{F}^{(c)}$ sono conservative, dalla (5.11) segue:

$$W_{12}{}^{(c)} = E_{p\,1} - E_{p\,2} \,,$$

così sostituendo nella relazione precedente, si ha:

$$E_{p\,1} - E_{p\,2} + W_{12}{}^{(nc)} = E_{k\,2} - E_{k\,1} \,,$$

ovvero, dalla (5.15):

$$W_{12}{}^{(nc)} = \left(E_{k\,2} + E_{p\,2}\right) - \left(E_{k\,1} + E_{p\,1}\right) = E_2 - E_1 \tag{5.16}$$

cioè, in generale, in presenza sia di forze conservative che di forze non conservative, l'energia meccanica non rimane costante durante il moto e, in particolare, la sua variazione risulta pari al lavoro delle forze non conservative.

Sperimentalmente si osserva che in ogni processo meccanico sono presenti delle forze di attrito che si oppongono al movimento, di conseguenza l'energia meccanica tende a diminuire durante il moto. Per contrastare tale azione è possibile applicare sul corpo in moto delle forze non conservative tali da compensare la diminuzione dell'energia e, eventualmente, anche di accrescere tale energia. In ogni caso, se nella descrizione del sistema si include anche l'agente esterno che fornisce il lavoro non conservativo, si osserva ancora che l'energia meccanica complessiva non si conserva ma diminuisce a causa di effetti dissipativi.

Nei fenomeni macroscopici la conservazione dell'energia meccanica è un caso limite in quanto è impossibile da realizzare a causa degli attriti sempre presenti; ne segue che nella (5.16) risulta sempre $W_{12}{}^{(nc)} < 0$. Tuttavia le interazioni fondamentali sono conservative, come è evidenziato dai processi microscopici, cioè la conservazione dell'energia è un principio fondamentale correlato ad una proprietà di simmetria di carattere generale, ovvero all'assenza di un'origine privilegiata per la misura del tempo. Le forze di attrito che si osservano a livello macroscopico determinano una trasformazione dell'energia in altre forme, così, se nel computo dell'energia del processo si include anche l'energia espressa in tali forme, si trova che l'energia complessiva si conserva.

5.6 Dinamica di un corpo soggetto a forze conservative

Consideriamo un punto materiale di massa m soggetto a sole forze conservative e supponiamo che l'energia potenziale vari nella direzione x secondo il diagramma mostrato in figura. Dalle relazioni (5.8) e (5.15) segue che l'energia del corpo vale:

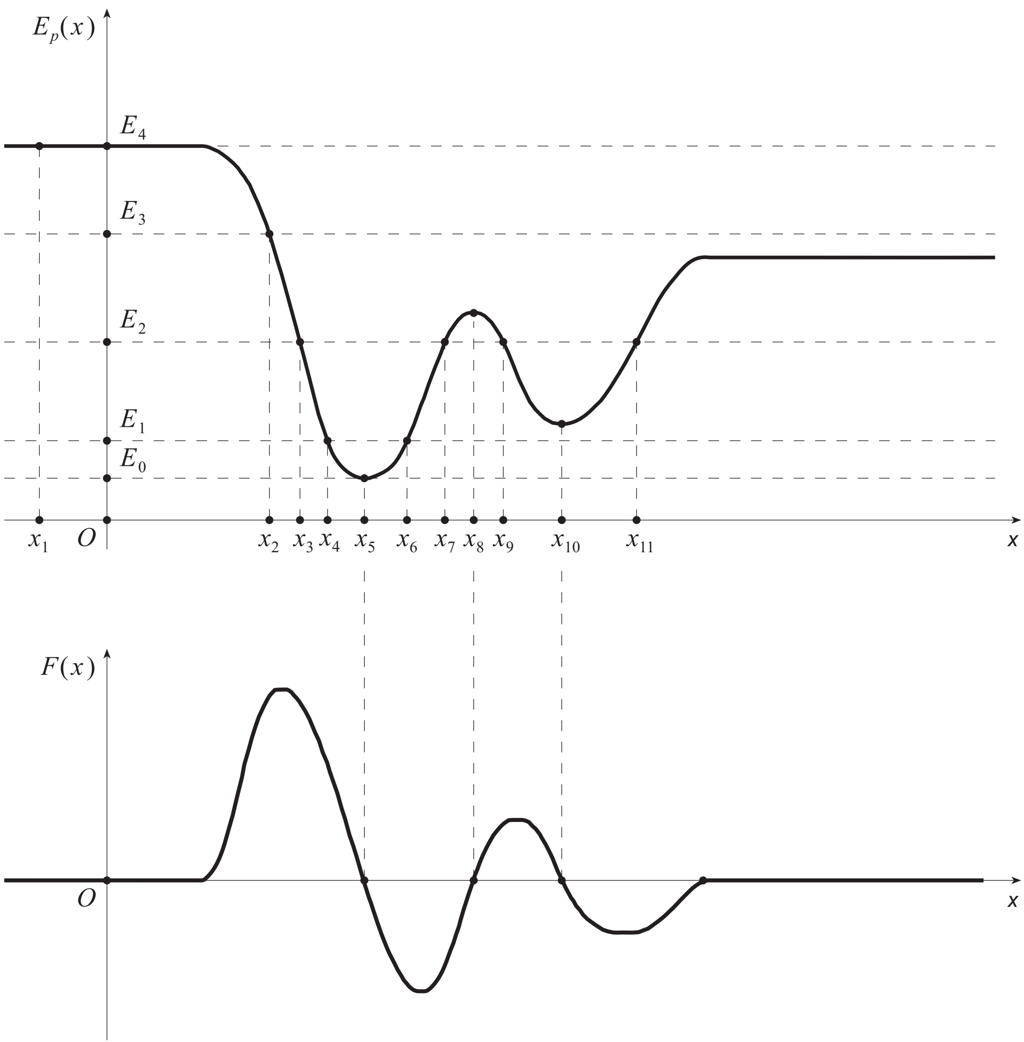
$$E = \frac{1}{2}mv^2 + E_p\left(x\right),$$

per cui il modulo della velocità del punto materiale è dato da:

$$v = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - E_p\left(x\right)\right]} \tag{5.17}$$

Affinché tale relazione risulti valida deve risultare sempre $E \geq E_p\left(x\right)$. Consideriamo una possibile curva di energia potenziale per un moto unidimensionale e valutiamo le caratteristiche del moto del punto materiale relativamente a differenti valori dell'energia.

Con riferimento alla figura seguente, consideriamo il caso in cui l'energia del corpo vale E_0; in tale circostanza l'energia del corpo è sempre inferiore all'energia potenziale tranne in



corrispondenza dell'ascissa x_5 in cui E è uguale all'energia potenziale. Dalla (5.17) segue che il corpo si mantiene in quiete in corrispondenza del punto x_5. Se il punto materiale viene spostato a destra da tale posizione, poiché la funzione $E_p(x)$ in tale direzione è crescente, dalla relazione (5.12) segue che su di esso agisce una forza diretta verso sinistra; se al contrario il punto è spostato a sinistra rispetto alla posizione x_5 su di esso agisce una forza diretta verso destra, poiché $E_p(x)$ in questa direzione è decrescente. Se ne conclude che qualora il punto materiale venga spostato dalla posizione di minimo dell'energia potenziale sul tale punto agisce sempre una forza attrattiva che tende a riportarlo nella posizione originaria, che pertanto rappresenta una posizione di *equilibrio stabile* per il punto materiale.

Supponiamo ora che l'energia del punto materiale valga E_1; in questo caso, se il punto materiale si muove da x_5 verso x_6 la sua velocità diminuisce con l'avvicinarsi a tale posizione e in particolare in questa posizione la velocità si annulla. La forza agente sul punto, che è nulla in x_5, aumenta di intensità con l'approssimarsi a x_6 ed è sempre diretta nel verso negativo delle x; in x_6 tale forza è massima e determina un'inversione della direzione del moto, pertanto il punto materiale prende a muoversi verso x_4. Tale forza inverte la sua direzione dopo che il punto ha superato la posizione di equilibrio x_5; in x_4 la velocità si annulla nuovamente e il moto inverte la sua direzione. Le posizioni x_4 e x_6 sono dette *punti di inversione del moto*. In questo caso il punto materiale è vincolato a muoversi tra i due punti di inversione e la regione all'interno della quale è confinato tale moto prende il nome di *buca di potenziale*.

Sviluppando in serie la funzione $E_p(x)$ intorno alla posizione di equilibrio x_5 si ottiene:

$$E_p(x) = E_p(x_5) + \left(\frac{dE_p}{dx}\right)_{x=x_5}(x - x_5) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_5}(x - x_5)^2 + \ldots =$$
$$= E_p(x_5) + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=x_5}(x - x_5)^2 + \ldots,$$

siccome x_5 è un punto di minimo e di conseguenza la derivata prima è nulla in tale punto. Nell'ipotesi che la differenza $x - x_5$ sia sufficientemente piccola, è possibile trascurare i termini superiori al secondo nel precedente sviluppo, inoltre la derivata $d^2E_p(x)/dx^2$ è una costante positiva nel punto x_5; indicando con k tale costante risulta:

$$E_p(x) \approx E_p(x_5) + \frac{1}{2}k(x - x_5)^2,$$

dalla relazione (5.4) segue quindi che tale espressione rappresenta l'energia potenziale di un oscillatore armonico al quale è attribuito $E_p(x_5)$ quale valore di riferimento per l'energia potenziale. In tale approssimazione, detta delle *piccole oscillazioni*, il moto del punto materiale all'interno della buca di potenziale è di tipo oscillatorio con frequenza pari a $(1/2\pi)\sqrt{k/m}$.

Consideriamo la circostanza in cui l'energia del punto sia pari a E_2, allora il moto si esplica tra gli intervalli $[x_3, x_7]$ e $[x_9, x_{11}]$ come nel caso precedente. Il punto materiale non può passare da un intervallo all'altro e la regione compresa tra tali intervalli e interdetta al moto è detta *barriera di potenziale*. Si osservi che la posizione di massimo relativo x_8 rappresenta una posizione di equilibrio per un punto materiale con energia pari all'energia potenziale in corrispondenza del massimo; a differenza della posizione x_5 tuttavia, qualora il punto materiale venga spostato da x_8

su di esso agisce una forza repulsiva che tende ad allontanarlo da tale posizione. Ne segue che il massimo relativo dell'energia potenziale rappresenta una posizione di *equilibrio instabile* per il punto materiale.

Supponiamo che il punto materiale sia caratterizzato dall'energia E_3 e assumiamo inoltre che si muova nella direzione negativa delle *x*. Allora durante tale moto la sua velocità varierà in relazione alla (5.17) e, in particolare aumenterà dove $E_p(x)$ decresce e viceversa. Giunta nel punto x_2 la velocità del punto sarà nulla e il moto invertirà la sua direzione.

Infine, qualora il punto materiale sia in una regione in cui $E_p(x)$ si mantiene costante, come nell'intorno del punto x_1 all'energia E_4, poiché la pendenza della funzione energia potenziale è nulla, la forza agente sul punto materiale è nulla. Tale regione è detta di *equilibrio indifferente* poiché il punto materiale può essere spostato al suo interno senza risentire di forze attrattive o repulsive.

Attraverso l'applicazione della legge di conservazione dell'energia è possibile dedurre l'equazione del moto. Esprimendo la relazione (5.17) come:

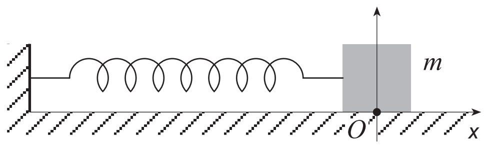
$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2}{m}\left[E - E_p(x)\right]}$$

e separando le variabili, si ottiene:

$$\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left[E - E_p(x)\right]}} = dt$$

dalla quale, nota l'espressione dell'energia potenziale $E_p(x)$ e la condizione iniziale, si può ricavare l'equazione del moto $x(t)$. In questo caso si ha il vantaggio di risolvere un'equazione differenziale del primo ordine anziché una del secondo, come imposto dalla seconda legge della dinamica.

Esempio: Consideriamo un punto materiale di massa *m* vincolato all'estremità di una molla di costante elastica *k* posta su un piano orizzontale privo di attrito e fissata all'altro estremo ad un vincolo fisso. L'energia potenziale associata alla forza elastica (4.14) vale:



$$E_p(x) = \frac{1}{2}kx^2;$$

assumere che la costante additiva arbitraria sia nulla corrisponde a fissare l'origine dell'energia potenziale nel punto di equilibrio $x = 0$. In una posizione generica l'energia del punto materiale vale:

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2. \tag{5.18}$$

Se in un grafico si rappresentano contemporaneamente la funzione energia potenziale $E_p(x)$ e il livello corrispondente all'energia meccanica *E*, il principio di conservazione dell'energia viene espresso dal fatto che si mantiene costante la somma delle distanze tra i punti del grafico dell'energia potenziale e, rispettivamente il livello di riferimento $E_p = 0$ e il livello dell'energia meccanica. Con riferimento alla figura, per ogni valore di *x* risulta quindi costante la somma $\overline{KP} + \overline{PH}$ e pari a $\overline{KH}$, dove $\overline{KP}$ rappresenta l'energia cinetica, $\overline{PH}$ rappresenta l'energia potenziale e $\overline{KH}$ l'energia meccanica. In particolare, se il sistema ha un'energia *E*, dalla (5.18) segue che la velocità del punto materiale varia con *x* secondo la legge:

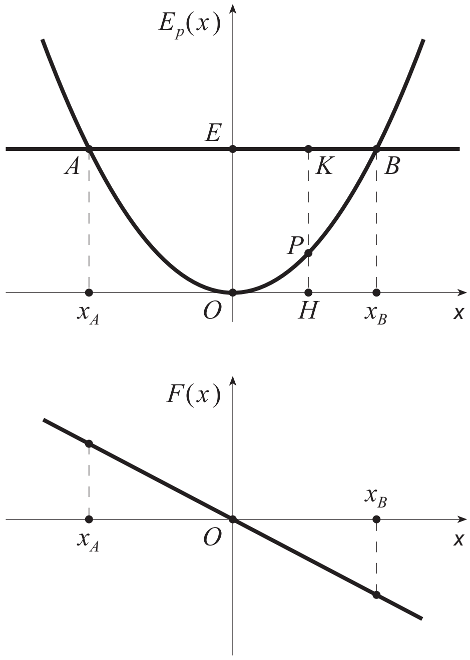
$$v = \sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{k}{m}x^2},$$

con:

$$\frac{2E}{m} - \frac{k}{m}x^2 \geq 0,$$

da cui segue:

$$-\frac{2E}{k} \leq x \leq \frac{2E}{k},$$



cioè il moto è limitato tra i punti $x_A \equiv -2E/k$ e $x_B \equiv 2E/k$; in corrispondenza di questi estremi l'energia cinetica è nulla mentre l'energia potenziale assume il suo valore massimo, pari ad *E*. Al contrario, per $x = 0$ l'energia potenziale è nulla e l'energia cinetica assume il valore massimo, pari a *E* e la velocità vale $\sqrt{2E/m}$. Dalla relazione (5.12) la forza $\vec{F}$ agente sul punto materiale vale $-\hat{x}\, dE_p(x)/dx$, così nel tratto da x_A a 0 in cui la funzione $E_p(x)$ è decrescente, la derivata $dE_p(x)/dx$ è negativa e di conseguenza $\vec{F}$ è diretta nel verso positivo delle *x*, al contrario se $E_p(x)$ è crescente. Nell'origine in cui $E_p(x)$ manifesta un minimo, la forza $\vec{F}$ ha intensità nulla. Quindi, sia nel tratto decrescente che in quello crescente della funzione $E_p(x)$ la forza agente sul punto materiale è tale da riportare tale punto verso la posizione di equilibrio $x = 0$ in cui tale forza agente è nulla. Pertanto concludiamo che $x = 0$ è un punto di equilibrio stabile per questo moto.

Esempio: (*pendolo semplice*) Consideriamo un punto materiale di massa *m* sospeso ad una fune inestensibile di lunghezza *l* e di massa trascurabile rispetto a *m*. Assumendo quale origine dell'energia potenziale la posizione più bassa della traiettoria del punto materiale, *O*, risulta:

$$E_p(y) = mgy,$$

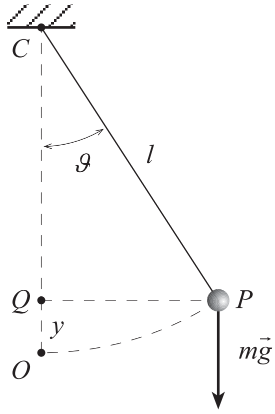
in cui *y* è la distanza $\overline{OQ}$ di figura. Tale lunghezza può esprimersi come la differenza tra $\overline{CO}$ e $\overline{CQ}$, ovvero:

$$y = \overline{CO} - \overline{CQ} = l - l\cos\vartheta = l(1-\cos\vartheta);$$

pertanto l'energia meccanica del punto materiale vale:

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(y) = \frac{1}{2}mv^2 + mgl(1-\cos\vartheta). \tag{5.19}$$

Siccome la traiettoria del punto materiale è un arco di circonferenza, la velocità *v* del punto materiale può esprimersi attraverso la corrispondente velocità angolare ω come $l\omega$, ossia:



$$v = l\omega = l\frac{d\vartheta}{dt},$$

così, sostituendo nella relazione (5.19) si ha:

$$E = \frac{1}{2}ml^2\left(\frac{d\vartheta}{dt}\right)^2 + mgl(1-\cos\vartheta).$$

Siccome il punto materiale è soggetto ad una forza conservativa, l'energia potenziale si conserva, cioè *E* è costante durante il moto; pertanto la derivata prima della sua espressione deve essere nulla:

$$ml^2 \frac{d\vartheta}{dt}\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + mgl\sin\vartheta \frac{d\vartheta}{dt} = 0,$$

ovvero:

$$\frac{d\vartheta}{dt}\left(\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\vartheta\right) = 0.$$

Questa identità implica sia il caso banale di assenza di moto $d\vartheta/dt = 0$ che l'equazione generale di descrizione del moto:

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \frac{g}{l}\sin\vartheta = 0; \tag{5.20}$$

tale espressione rappresenta un'equazione differenziale non lineare, essendo non lineare la funzione $\sin\vartheta$. Se consideriamo lo sviluppo in serie di questa funzione:

$$\sin\vartheta = \vartheta - \frac{\vartheta^3}{3!} + \frac{\vartheta^5}{5!} - \frac{\vartheta^7}{7!} + \dots,$$

per $\vartheta \ll 1$, cioè per piccoli angoli di oscillazione, è possibile trascurare i termini dello sviluppo di $\sin\vartheta$ superiori a ϑ:

$$\sin\vartheta \approx \vartheta$$

così, posto $\omega_0 \equiv \sqrt{g/l}$, l'espressione approssimata dell'equazione (5.20) diventa:

$$\frac{d^2\vartheta}{dt^2} + \omega_0{}^2\vartheta = 0.$$

Questa è l'equazione differenziale (4.15) dell'oscillatore armonico e pertanto il moto che essa descrive è un moto armonico di pulsazione ω_0 , cioè:

$$\vartheta(t) = \Theta\sin(\omega_0 t + \phi),$$

in cui Θ e ϕ sono stabiliti attraverso le condizioni iniziali.