

# 5 PROPRIETÀ MAGNETICHE DEI MATERIALI



André Marie Ampère

A seguito della scoperta di Ørsted dell'azione magnetica prodotta da un filo conduttore percorso da corrente l'ipotesi più naturale che molti fisici avanzarono per spiegare questo effetto fu che in tale circostanza il filo conduttore diventa un magnete. Nel 1820 Ampère propose un'interpretazione alternativa che, al contrario, ipotizzava che il magnete si dovesse ritenere costituito da un insieme di correnti. In particolare Ampère immaginò che, ad esempio, all'interno di un magnete cilindrico si situasse un complesso di correnti circolari equiverse, disposte perpendicolarmente all'asse del magnete. In tale modello, un filo conduttore fisso percorso da corrente situato parallelamente all'asse del magnete determina una forza su questo facendolo deviare. Tale ipotesi è alla base dell'interpretazione moderna dei fenomeni magnetici. L'attuale conoscenza della struttura microscopica della materia ci porta a ricondurre, in una descrizione classica degli atomi, le *correnti amperiane* ai moti degli elettroni negli atomi. In un tale modello per l'atomo di idrogeno, ad esempio, l'elettrone ruota attorno al nucleo con velocità  $\vec{v}$  costante lungo un percorso circolare. Se  $r$  è il raggio dell'orbita, il tempo  $T$  necessario a descrivere tale orbita è:

$$T = \frac{2\pi r}{v},$$

e la corrente  $I$  associata a questo moto è:

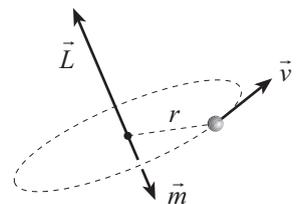
$$I = \frac{e}{T} = \frac{ev}{2\pi r}, \tag{5.1}$$

dove  $e$  rappresenta la carica dell'elettrone. Dal teorema di equivalenza di Ampere, se  $S$  indica la superficie dell'orbita, il momento magnetico  $\vec{m}$  associato a questo moto ha modulo pari a:

$$m = IS = \frac{ev}{2\pi r} \pi r^2 = \frac{1}{2} evr.$$

Siccome il modulo del momento angolare  $\vec{L}$  dell'elettrone rispetto all'asse di rotazione vale  $m_e vr$ , dove  $m_e$  indica la massa dell'elettrone, il momento magnetico si scrive:

$$\vec{m} = -\left(\frac{e}{2m_e}\right)\vec{L},$$



dove il segno meno segue dal fatto che la carica dell'elettrone è negativa.

Una descrizione completa dei fenomeni atomici richiede l'impiego della meccanica quantistica, nondimeno in tale ambito è possibile provare che la relazione precedente continua a restare valida, sebbene il momento angolare possa assumere solo valori proporzionali ad una quantità  $\hbar$  pari a  $h/(2\pi)$ , in cui  $h$ , detta *costante di Planck*, vale  $6.62 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$  circa; in particolare risulta:

$$L = \hbar \sqrt{l(l+1)} \quad l = 0, 1, 2, \dots,$$

e pertanto:

$$m = \sqrt{l(l+1)} \frac{e\hbar}{2m_e} \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

Il momento magnetico corrispondente alla rivoluzione dell'elettrone attorno al nucleo prende il nome di *momento magnetico orbitale*. Siccome nella maggior parte delle sostanze il momento orbitale di un elettrone si compensa con quello, di verso contrario, di un altro elettrone orbitante nella direzione opposta, l'effetto magnetico prodotto dal moto orbitale degli elettroni è nullo o molto piccolo. Un ulteriore contributo al momento magnetico dell'atomo è costituito da una caratteristica dell'elettrone che prende il nome di *spin* e rappresenta un momento angolare intrinseco di questa particella. Il modulo dello spin  $\vec{S}$  è pari a  $\hbar/2$  ed a tale momento angolare è associato un momento magnetico, detto *momento magnetico di spin*  $m_B$ , che in questo caso assume il valore:

$$\vec{m}_B = -\left(\frac{e}{m_e}\right) \vec{S}.$$

pertanto:

$$m_B = \frac{e\hbar}{2m_e}.$$

Negli atomi o molecole gli elettroni sono accoppiati tra loro con gli spin in direzioni opposte con la conseguente compensazione dei relativi momenti magnetici; tuttavia gli atomi con un numero dispari di elettroni o quelli in cui l'accoppiamento con gli spin contrapposti non è favorito energeticamente, possono avere uno o più elettroni spaiati e, di conseguenza, un momento magnetico non nullo. In generale il momento magnetico di un atomo è la somma vettoriale, calcolata secondo le regole della meccanica quantistica, dei momenti magnetici orbitali e di spin<sup>1</sup>.

---

<sup>1</sup> Anche i costituenti del nucleo atomico, il protone ed il neutrone, possiedono un momento angolare di spin  $\vec{S}$  di modulo pari a  $\hbar/(2\pi)$  e di conseguenza determinano un momento magnetico. Per il protone risulta:

$$\vec{m}_p = 2.79 \left(\frac{e}{2m_p}\right) \vec{S},$$

dove  $m_p$  è la massa del protone; per il neutrone si ha:

$$\vec{m}_n = -1.91 \left(\frac{e}{2m_n}\right) \vec{S},$$

## 5.1 Magnetizzazione

Consideriamo un materiale omogeneo in cui gli atomi o le molecole costituenti siano dotati di un momento magnetico elementare; supponiamo di realizzare un cilindro macroscopico molto lungo rispetto alla sua sezione. Supponiamo infine che tutti questi momenti magnetici siano allineati parallelamente all'asse del cilindro; in tale circostanza si osserva che le correnti elementari interne al cilindro tendono ad elidersi mutuamente, lasciando il solo contributo delle correnti situate in corrispondenza della superficie. Pertanto, dal punto di vista macroscopico il cilindro magnetizzato equivale ad una distribuzione superficiale di corrente; tale corrente prende il nome di *corrente di magnetizzazione*. La corrente di magnetizzazione può essere descritta in maniera quantitativa introducendo il *vettore di magnetizzazione*  $\vec{M}$  in maniera analoga a quanto già fatto col vettore di polarizzazione per i materiali dielettrici; sia  $\langle \vec{m} \rangle$  il momento magnetico medio nella direzione dell'asse del cilindro magnetizzato e  $n$  il numero di molecole per unità di volume, allora, una misura del grado di allineamento dei dipoli magnetici molecolari del cilindro è dato dal vettore:

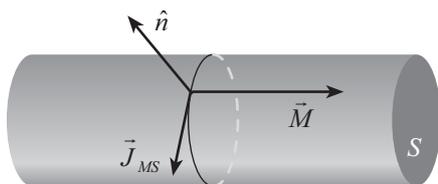
$$\vec{M} \equiv n \langle \vec{m} \rangle.$$

Consideriamo un tratto di lunghezza  $l$  del cilindro testé introdotto; per effetto della sua magnetizzazione uniforme, il vettore  $\vec{M}$  sarà diverso da zero all'interno e nullo all'esterno. Se  $S$  è la sezione del cilindro, il momento magnetico totale sarà  $MlS$ . D'altra parte, per il teorema di equivalenza, se  $\vec{J}_{MS}$  indica il vettore *densità lineare di corrente di magnetizzazione* (espressa in  $A/m$ ), il momento magnetico associato a tale corrente ha modulo  $J_{MS}lS$ . Siccome queste sono due differenti rappresentazioni dello stesso fenomeno fisico, le due corrispondenti quantità devono essere uguali, ovvero:

$$M = J_{MS}; \tag{5.2}$$

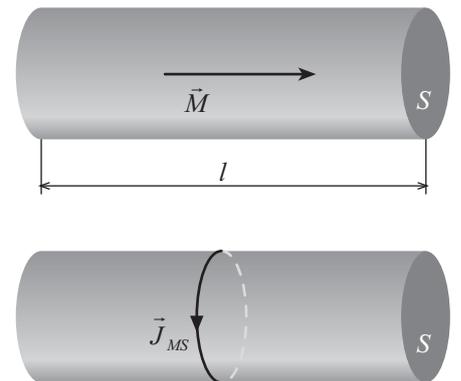
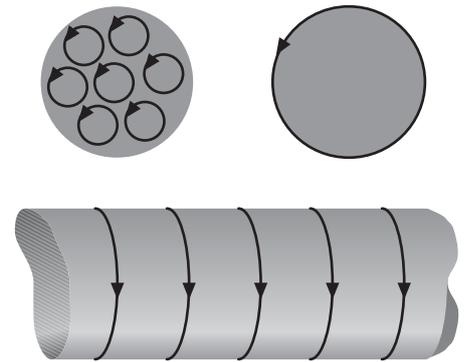
vettorialmente, se  $\hat{n}$  è il versore normale all'asse del cilindro, orientato verso l'esterno, allora:

$$\vec{J}_{MS} = \vec{M} \times \hat{n}. \tag{5.3}$$



L'identità tra il modulo del vettore magnetizzazione e la densità di corrente lineare di magnetizzazione comporta che, dal punto di vista dimensionale, il vettore  $\vec{M}$  si esprima in  $A/m$ . Sebbene ricavata per una particolare configurazione geometrica, si prova

dove  $m_n$  è la massa del neutrone. Poiché la massa del protone e quella del neutrone sono circa 2000 volte più grandi di quella dell'elettrone, il modulo del momento magnetico associato allo spin dei componenti del nucleo atomico risulta di tre ordini di grandezza circa inferiore rispetto a quello dell'elettrone e pertanto il loro contributo viene solitamente trascurato nel computo del momento magnetico complessivo dell'atomo.

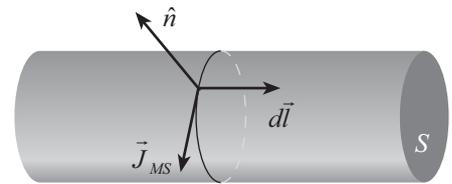


che la relazione (5.2) è di carattere generale; risulta infatti che in ogni punto della superficie la densità lineare di corrente di magnetizzazione è uguale alla componente del vettore magnetizzazione parallela ad un piano tangente alla superficie nel punto considerato. Dalla (5.3) segue, infine, che la direzione di questo vettore è sempre perpendicolare alla direzione di  $\vec{M}$ . Si osservi che siccome  $\vec{J}_{MS}$  rappresenta la densità lineare di corrente e, in quanto tale si misura in  $A/m$ , per ricavare la corrispondente intensità della corrente di magnetizzazione  $I_M$  occorre calcolare:

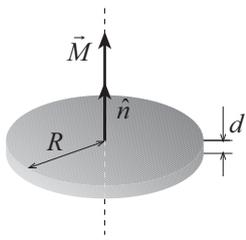
$$I_M = \int_{\mathcal{L}} \vec{J}_{MS} \cdot (d\vec{l} \times \hat{n}), \quad (5.4)$$

dove l'integrazione è estesa alla lunghezza  $\mathcal{L}$  della superficie sulla quale è distribuito il vettore  $\vec{J}_{MS}$ . Nel caso del cilindro descritto precedentemente, se il vettore  $d\vec{l}$  è tangente alla sua superficie laterale e parallelo all'asse, la lunghezza attraversata dalla corrente di densità  $\vec{J}_{MS}$  è  $l$ , quindi, se  $\vec{J}_{MS}$  è uniforme lungo  $l$  si ha:

$$I_M = J_{MS} l.$$



Ciò in analogia alla densità di corrente introdotta nella relazione (3.2), detta *densità volumetrica di corrente*  $\vec{J}_V$  che, se distribuita uniformemente su una sezione  $S$ , determina una corrente di intensità pari al prodotto  $J_V S$ .



**Esempio:** Consideriamo un disco formato con un materiale omogeneo magnetizzato, di raggio  $R$  e spessore  $d$ . Supponendo che il vettore di magnetizzazione  $\vec{M}$  sia diretto parallelamente all'asse del disco, stabiliamo il vettore campo magnetico  $\vec{B}$  al centro del disco. Il disco uniformemente magnetizzato corrisponde ad un dipolo magnetico  $\vec{m}$  pari a:

$$\vec{m} = \vec{M}V,$$

dove  $V$  è il volume del disco pari a  $Sd$ , dove  $S$  è la superficie delle basi. Dal teorema di equivalenza di Ampere segue che tale configurazione è equivalente ad una spira percorsa da una corrente  $I_M$  che genera nel suo centro lo stesso campo magnetico  $\vec{B}$ . Per determinare questa corrente è possibile procedere in due maniere. Identifichiamo con  $\vec{m}$  il momento di dipolo della spira equivalente esprimendolo come:

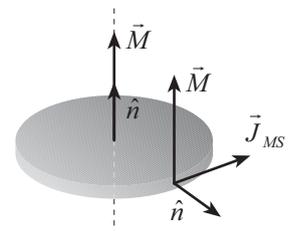
$$\vec{m} = I_M S \hat{n},$$

dove  $\hat{n}$  è il versore normale passante per l'asse del disco; uguagliando questa espressione con la relazione precedente, si trova:

$$\vec{M}V = I_M S \hat{n},$$

da cui segue:

$$I_M = \frac{MV}{S} = \frac{MSd}{S} = Md.$$

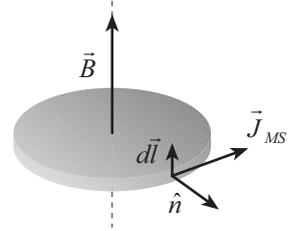


Alternativamente, dalla relazione (5.3) è possibile dedurre la densità lineare di corrente di magnetizzazione  $\vec{J}_{MS}$ ; tale vettore è diverso da zero solo in corrispondenza del bordo del disco ed ha intensità:

$$J_{MS} = M ;$$

infine, dalla (5.4), integrando lungo lo spessore  $\mathcal{L}$  del bordo segue:

$$I_M = \int_{\mathcal{L}} \vec{J}_{MS} \cdot (d\vec{l} \times \hat{n}) = \int_{\mathcal{L}} J_{MS} dl = J_{MS} d = Md.$$



Nota  $I_M$ , è possibile ricavare  $\vec{B}$  attraverso l'espressione del campo magnetico al centro di una spira circolare percorsa da corrente:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I_M}{2R} \hat{n} = \frac{\mu_0 M d}{2R} \hat{n}.$$

## 5.2 Il vettore $\vec{H}$

Consideriamo un solenoide ideale di lunghezza indefinita; se le spire di tale solenoide sono percorse da una corrente di intensità  $I$ , l'interno sarà sede di un campo magnetico  $\vec{B}_0$  di intensità proporzionale ad  $I$ . Per un solenoide ideale (o per uno reale a grande distanza dai suoi estremi), il campo magnetico all'interno ha intensità:

$$B_0 = \mu_0 n I , \tag{5.5}$$

dove  $n$  rappresenta il numero di spire per unità di lunghezza. In un tratto di lunghezza  $L$  del solenoide, costituito da  $N$  spire,  $n$  vale  $N/L$ , così il prodotto  $nI$  è pari a  $NI/L$ ; siccome la quantità  $NI$  può essere riguardata come la corrente totale che scorre nel tratto  $L$  di superficie del solenoide, il rapporto  $NI/L$ , pari a  $nI$  rappresenta il modulo della densità  $\vec{J}_S$  con cui è distribuita superficialmente la corrente sul solenoide:

$$J_S \equiv nI .$$

Alla luce di tale definizione la relazione (5.5) può essere scritta come:

$$B_0 = \mu_0 J_S .$$

Supponiamo di introdurre all'interno del solenoide un cilindro di sezione pari a quella del solenoide e costituito da un materiale magnetizzato nella direzione del suo asse, col vettore magnetizzazione  $\vec{M}$  orientato come  $\vec{B}_0$ . Per il principio di sovrapposizione, il campo magnetico totale  $\vec{B}$  nel cilindro contenuto all'interno del solenoide sarà pari alla somma del campo  $\vec{B}_0$  prodotto dal solenoide e del campo  $\vec{B}_M$  prodotto dalla corrente di magnetizzazione del cilindro:

$$B = B_0 + B_M = \mu_0 J_S + \mu_0 J_{MS} = \mu_0 J_S + \mu_0 M ,$$

avendo sostituito  $J_{MS}$  con  $M$  dalla (5.2). Introduciamo un campo così definito:

$$H \equiv \frac{B}{\mu_0} - M = J_s = nI ,$$

facendo uso di questo campo è possibile esprimere il campo magnetico totale all'interno del cilindro come:

$$B = \mu_0 (H + M) .$$

Sebbene ricavata in un'accezione unidimensionale e per una particolare configurazione di corrente, si prova che tale espressione ha validità di carattere generale e risulta:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) . \quad (5.6)$$

Questa relazione fra i tre vettori  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$  e  $\vec{M}$  presenta una formale analogia con la relazione  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  che lega tra loro i vettori  $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$  e  $\vec{P}$ , tuttavia, mentre è concettualmente evidente la similitudine fenomenologica tra i vettori  $\vec{M}$  e  $\vec{P}$ , non è altrettanto manifesta l'analogia tra i vettori  $\vec{H}$  e  $\vec{E}$ . Dalla definizione del vettore  $\vec{H}$  segue che dimensionalmente tale grandezza si esprime in  $A/m$ .

Nel caso dei materiali dielettrici la relazione di proporzionalità tra il campo elettrico applicato e la polarizzazione che ne consegue è stata rappresentata attraverso la (2.12) con l'introduzione di una quantità detta suscettività dielettrica. Analogamente la *suscettività magnetica* dovrebbe essere definita come il rapporto tra l'intensità del vettore di magnetizzazione ed il modulo del campo magnetico, vista l'affinità dei ruoli rivestiti da questi due vettori. Tuttavia, per ragioni di carattere storico, questa quantità si definisce attraverso la relazione seguente:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H}$$

così, dalla (5.6), il campo magnetico per una sostanza magnetizzata può essere scritto come:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (1 + \chi_m) \vec{H} ;$$

la quantità  $1 + \chi_m$  prende il nome di *permeabilità magnetica relativa* del mezzo considerato, e si indica:

$$\mu_r \equiv 1 + \chi_m ;$$

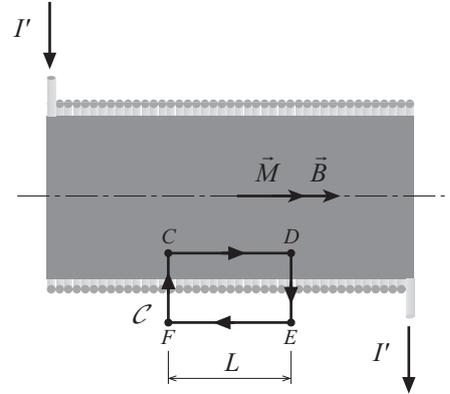
pertanto, sostituendo, si ha:

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \vec{H} = \mu \vec{H} , \quad (5.7)$$

dove  $\mu$  prende il nome di *permeabilità magnetica (assoluta)* del mezzo. Occorre infine fare presente che tale trattazione non può essere applicata alle sostanze *ferromagnetiche*.

### 5.3 Proprietà del vettore $\vec{H}$

Consideriamo un tratto di un solenoide ideale avvolto strettamente intorno ad un cilindro magnetizzato; supponiamo che l'avvolgimento sia percorso da una corrente  $I'$  e che la superficie del cilindro risulti sede di una corrente di magnetizzazione di intensità  $I_M$ . Siccome il solenoide è ideale, all'esterno il campo magnetico  $\vec{B}$  risulterà nullo, inoltre, poiché il materiale magnetizzato è interno al solenoide, all'esterno sarà nullo anche il vettore  $\vec{M}$ ; di conseguenza, per la (5.6), all'esterno anche il campo  $\vec{H}$  sarà nullo. All'interno del solenoide sia  $\vec{B}$  che  $\vec{M}$  sono diretti coassialmente al solenoide, così anche  $\vec{H}$  sarà parallelo all'asse del solenoide. Stabiliamo la circuitazione del vettore  $\vec{H}$  lungo il percorso  $\mathcal{C}$  di figura. Solo il contributo lungo il tratto  $CD$  sarà diverso da zero, essendo  $\vec{H}$  nullo lungo il percorso  $EF$  ed ortogonale alla direzione di circolazione  $d\vec{l}$  nei tratti  $DE$  e  $FC$ ; pertanto:



$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_C^D \vec{H} \cdot d\vec{l} = HL = nLI',$$

essendo il modulo di  $\vec{H}$  pari a  $nI'$ . D'altra parte il prodotto  $nL$  rappresenta il numero complessivo di spire racchiuse all'interno del circuito  $\mathcal{C}$ ; così, indicando con  $I$  la corrente totale che percorre il solenoide nel tratto contenuto all'interno del circuito considerato:

$$I = nLI',$$

si ha:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I. \quad (5.8)$$

La corrente  $I$ , somma delle  $nL$  correnti  $I'$  che attraversano il solenoide è da distinguere dalla corrente totale che attraversa la superficie del sistema (solenoidi più cilindro) considerato, che è comprensiva anche della corrente di magnetizzazione. La relazione ricavata in questo particolare contesto può essere provata in condizioni più generali e rivela l'importanza, dal punto di vista pratico del campo  $\vec{H}$ , nel senso che solo tale campo, dipendendo dalla sola corrente macroscopica  $I$  può essere, in generale, oggetto di controllo sperimentale. Infatti, confrontando la (5.8) con l'analoga relazione per  $\vec{B}$ :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I + I_M),$$

si osserva che al secondo membro compare la corrente totale  $I + I_M$  che attraversa la superficie del sistema; in presenza di fenomeni di magnetizzazione tale corrente non può essere oggetto di

controllo. Analogamente per il vettore  $\vec{D}$  risulta  $\int_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = q$  dove  $q$  è la carica libera contenuta all'interno della superficie chiusa  $S$ , mentre per il vettore  $\vec{E}$  risulta  $\int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = (q + q_p)/\epsilon_0$ , dove  $q + q_p$  rappresenta la somma della carica libera e di polarizzazione contenuta nel volume considerato. L'analogia tra i vettori  $\vec{D}$  e  $\vec{H}$  è solo formale poiché, mentre nel caso dei dielettrici risulta quasi sempre impossibile scindere le cariche totali in cariche libere e cariche di polarizzazione, e quindi  $\vec{D}$  riveste un ruolo concettualmente importante ma trascurabile nella pratica, nel caso dei processi di magnetizzazione è generalmente semplice scindere le correnti totali in correnti libere e correnti di magnetizzazione, così il ruolo del campo  $\vec{H}$  è decisamente più importante di quanto non lo sia quello del campo  $\vec{D}$  nel caso elettrico.

Nell'espressione della circuitazione di  $\vec{H}$  lungo una curva chiusa  $\mathcal{C}$  è possibile dedurre la corrente  $I$  come flusso del vettore  $\vec{J}$  attraverso una superficie  $S$  che ha come contorno  $\mathcal{C}$ :

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s};$$

applicando il teorema del rotore all'integrale al primo membro, si ha:

$$\oint_S (\vec{\nabla} \times \vec{H}) \cdot d\vec{s} = \oint_{\mathcal{C}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{s}$$

e, dovendo valere tale identità per ogni superficie  $S$ , segue:

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J}. \quad (5.9)$$

Analogamente, siccome:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (I + I_M) = \mu_0 \int_S (\vec{J} + \vec{J}_M) \cdot d\vec{s},$$

seguendo la stessa procedura, si ottiene:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \vec{J}_M.$$

D'altra parte, applicando l'operatore rotore ad ambo i membri dell'espressione (5.6), si ha:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{H} + \mu_0 \vec{\nabla} \times \vec{M}, \quad (5.10)$$

da cui segue:

$$\vec{J}_M = \vec{\nabla} \times \vec{M}. \quad (5.11)$$

Si osservi che  $\vec{J}_M$  è una densità di corrente definita in un volume e misurata in  $A/m^2$ , mentre  $\vec{J}_{MS}$  è una densità lineare di corrente, definita su una superficie e misurata in  $A/m$ . La densità di corrente  $\vec{J}_M$  è nulla, ad esempio, in assenza di correnti libere  $\vec{J}$ , infatti in tale circostanza dalla

(5.9) segue che è nullo  $\vec{\nabla} \times \vec{H}$  e quindi dalla (5.7) che è nullo  $\vec{\nabla} \times \vec{B}$ , così dalla (5.10) si ha che è nullo anche  $\vec{\nabla} \times \vec{M}$  ed infine, dalla (5.11) segue che è nullo il vettore  $\vec{J}_M$ .

Le relazioni:

$$\begin{aligned}\vec{J}_{MS} &= \vec{M} \times \hat{n}, \\ \vec{J}_M &= \vec{\nabla} \times \vec{M},\end{aligned}$$

stabiliscono nel caso più generale le relazioni tra il vettore magnetizzazione  $\vec{M}$ , introdotto per caratterizzare il momento magnetico acquisito dal mezzo e le correnti di magnetizzazione, che costituiscono l'aspetto macroscopico delle correnti atomiche, originate nel mezzo dalla presenza di un campo magnetico esterno. Gli effetti magnetici del materiale magnetizzato possono quindi essere dedotti da una distribuzione superficiale di corrente con densità lineare  $\vec{J}_{MS}$  e da una distribuzione volumetrica di corrente con densità  $\vec{J}_M$ . La situazione precedentemente descritta risulta formalmente analoga a quella di un dielettrico polarizzato in cui l'effetto del mezzo si calcola a partire da una distribuzione superficiale di carica di polarizzazione  $\sigma_p$  e da una distribuzione di volume di densità  $\rho_p$ , legate al vettore polarizzazione  $\vec{P}$  dalle relazioni:

$$\begin{aligned}\sigma_p &= \vec{P} \cdot \hat{n}, \\ \rho_p &= -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}.\end{aligned}$$

**Esempio:** Consideriamo un filo conduttore indefinito di raggio trascurabile, percorso da una corrente stazionaria  $I$ , posto sull'asse di un tubo cilindrico, di materiale magnetizzabile, di raggi  $R_1$  e  $R_2$ . Stabiliamo l'andamento dei vettori  $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$  ed  $\vec{M}$  in tutto lo spazio. La simmetria del problema suggerisce che i campi dipendano dalla sola distanza  $r$  dall'asse. Consideriamo una circonferenza  $\mathcal{C}$  di raggio  $r < R_1$  concentrica all'asse del tubo e disposta perpendicolarmente a tale asse. Applicando la relazione (5.8) a tale circonferenza, si ha:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2\pi r H = I,$$

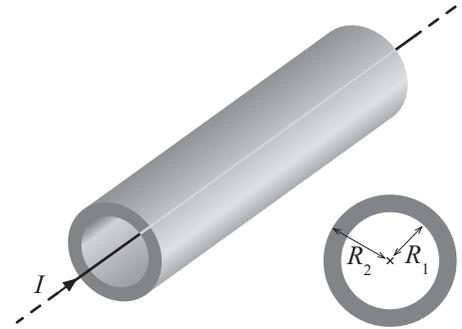
cioè:

$$H = \frac{1}{2\pi} \frac{I}{r}. \quad (5.12)$$

Per  $r < R_1$  si è nel vuoto, pertanto è possibile ricavare il campo magnetico dalla relazione (5.7) per  $\mu_r = 1$ , così:

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I}{r}. \quad (5.13)$$

Per  $R_1 < r < R_2$ , siccome la circuitazione del vettore  $\vec{H}$  dipende dalle sole correnti di conduzione, continua a valere l'espressione (5.12) e, analogamente per  $r > R_2$ . Dalla (5.7) segue che nel passaggio dalla regione interna al tubo, dove  $r < R_1$  a quella in cui  $R_1 < r < R_2$ , il campo magnetico subisce una discontinuità, cioè:



$$B = \mu_0 \mu_r H = \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r} \quad (5.14)$$

e infine, per  $r > R_2$  continua a valere la (5.13). Il vettore magnetizzazione  $\vec{M}$  sarà diverso da zero solo per  $R_1 < r < R_2$ ; dalla relazione (5.6), utilizzando la (5.12) e la (5.14), il suo modulo vale:

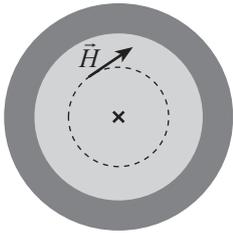
$$M = \frac{B}{\mu_0} - H = \frac{1}{\mu_0} \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r} - \frac{1}{2\pi r} I = \frac{\mu_r - 1}{2\pi r} I.$$

Pertanto il vettore  $\vec{H}$  vale:

$$H = \frac{1}{2\pi} \frac{I}{r} \quad r > 0;$$

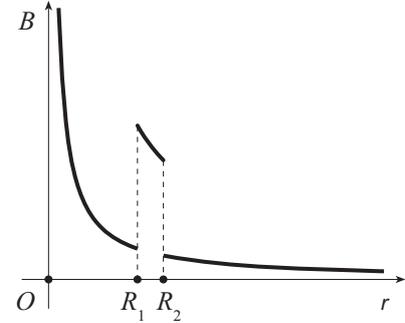
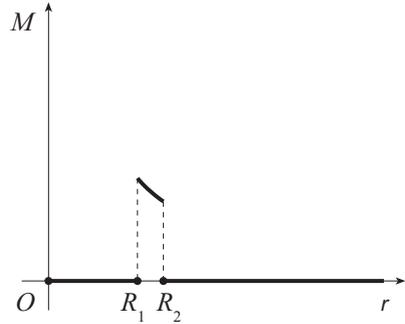
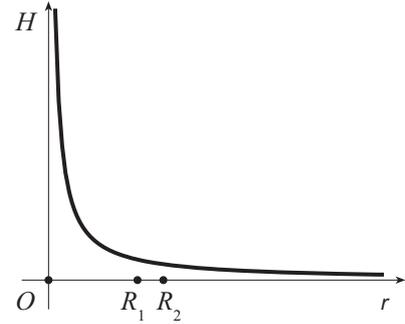
il campo magnetico vale:

$$B = \begin{cases} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & 0 < r < R_1, \\ \frac{\mu_0 \mu_r I}{2\pi r} & R_1 < r < R_2, \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi r} & r > R_2; \end{cases}$$



e il vettore magnetizzazione vale:

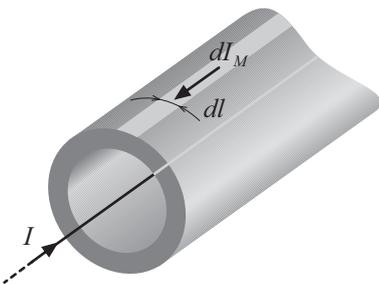
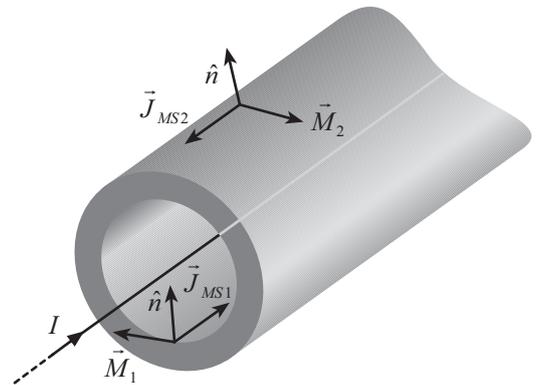
$$M = \begin{cases} 0 & 0 < r < R_1, \\ \frac{\mu_r - 1}{2\pi} \frac{I}{r} & R_1 < r < R_2, \\ 0 & r > R_2. \end{cases}$$



Vettorialmente,  $\vec{H}$ ,  $\vec{B}$  ed  $\vec{M}$  sono tangenti alle circonferenze concentriche al filo col verso dipendente da quello della corrente  $I$  secondo la regola della mano destra; le densità lineari di corrente di magnetizzazione sulla superficie interna,  $\vec{J}_{MS1}$ , ed esterna,  $\vec{J}_{MS2}$ , del tubo sono date dalla relazione (5.3) e pertanto hanno i versi indicati in figura e i moduli:

$$J_{MS1} = M_1 = \frac{\mu_r - 1}{2\pi} \frac{I}{R_1},$$

$$J_{MS2} = M_2 = \frac{\mu_r - 1}{2\pi} \frac{I}{R_2}.$$



Per stabilire le intensità delle correnti di magnetizzazione dividiamo la corrente che percorre le superfici del tubo in tante strisce, parallele all'asse e di spessore infinitesimo  $dl$ , ciascuna equiparabile ad un filo rettilineo percorso dalla corrente  $dI_M$  pari a  $J_{MS} dl$ , allora:

$$I_{M1} = \int_0^{2\pi R_1} J_{MS1} dl = J_{MS1} 2\pi R_1 = \frac{\mu_r - 1}{2\pi} \frac{I}{R_1} 2\pi R_1 = (\mu_r - 1) I =$$

$$= \frac{\mu_r - 1}{2\pi} \frac{I}{R_2} 2\pi R_2 = J_{MS2} 2\pi R_2 = \int_0^{2\pi R_2} J_{MS2} dl = I_{M2}.$$

Cioè alle diverse densità di corrente  $\vec{J}_{MS1}$  e  $\vec{J}_{MS2}$  corrispondono eguali correnti che scorrono parallelamente a  $I$ ,  $I_{M1}$  in senso concorde e  $I_{M2}$  in senso discorde.

**Esempio:** (*Campo magnetico di una bobina avvolta su un supporto magnetizzabile*) Consideriamo un solenoide indefinito percorso da una corrente  $I$  e avvolto attorno ad un cilindro magnetizzabile, come nel precedente paragrafo. Per quanto visto, la circuitazione del vettore  $\vec{H}$  lungo il percorso  $\mathcal{C}$  di figura vale:

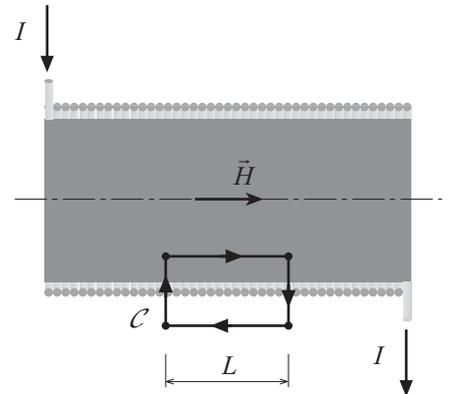
$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = HL = nLI,$$

cioè:

$$H = nI.$$

Applicando la relazione (5.7) segue:

$$B = \mu_0 \mu_r H = \mu_0 \mu_r nI.$$



## 5.4 Sorgenti del campo $\vec{H}$

La caratteristica del campo elettrostatico di presentare dei *poli*, nel senso che le sue linee di forza sono aperte, originando dalle cariche o terminando su queste, viene rappresentata matematicamente dalla legge di Gauss che, puntualmente si esprime come  $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ . L'assenza di poli magnetici è sintetizzata dalla relazione  $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ . D'altra parte, applicando l'operatore divergenza ad ambo i membri dell'equazione (5.6), siccome la divergenza del vettore  $\vec{B}$  è nulla, si ha:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M}.$$

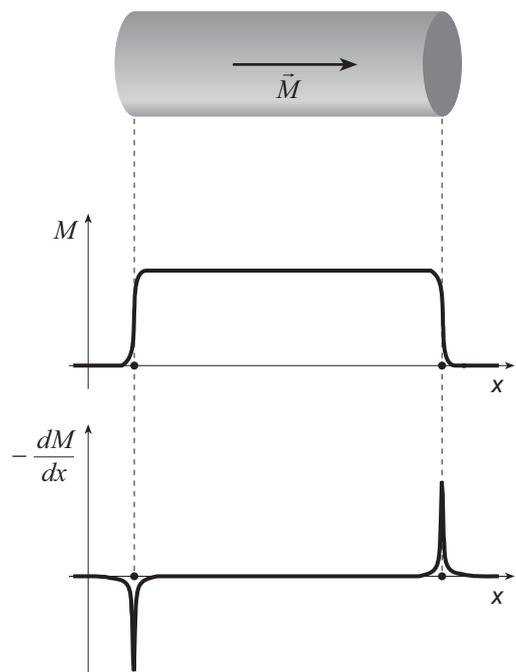
Consideriamo un magnete permanente, ossia tale da non richiedere delle correnti libere per sostenere la magnetizzazione; Supponiamo che il magnete abbia forma cilindrica e sia uniformemente magnetizzato lungo il suo asse, al quale associamo un'ascissa  $x$ ; così il vettore  $\vec{M}$  sarà diretto lungo  $x$  e si avrà:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{M} = \frac{dM}{dx}.$$

Introducendo quindi una *densità di poli magnetici*  $\rho_m$  definita come:

$$\rho_m \equiv -\frac{dM}{dx},$$

risulterà:



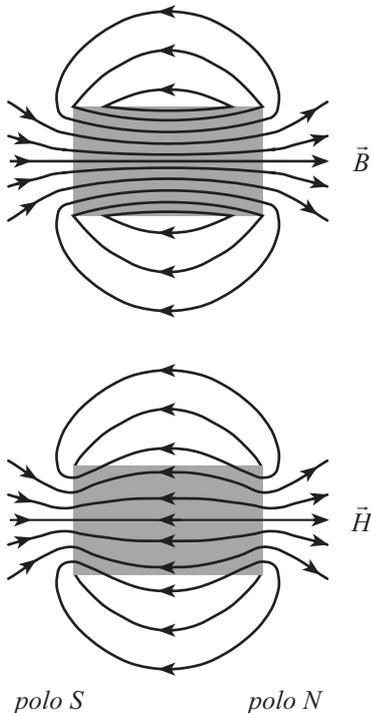
$$\vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \rho_m.$$

Dall'analisi dell'andamento di  $\rho_m$  con  $x$  si evince che il campo  $\vec{H}$  ammette dei poli situati in corrispondenza delle estremità del cilindro considerato e, in generale, dove risulta non nulla la divergenza di  $\vec{M}$ . Quindi, in assenza di correnti libere,  $\vec{J} = \vec{0}$  e il vettore  $\vec{H}$  soddisfa le relazioni:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{H} &= \vec{0}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{H} &= \rho_m;\end{aligned}$$

ciò mette in luce l'analogia con il comportamento del campo elettrostatico, che soddisfa le relazioni

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= \vec{0}, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0}.\end{aligned}$$

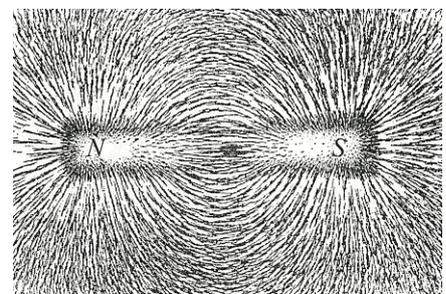


Cioè entrambi i campi sono conservativi e sono generati da poli che possono essere positivi (da essi si dipartono le linee di flusso) o negativi (in essi convergono tali linee). Questo concilia inoltre l'uso del termine *polo magnetico* con il fatto che il campo  $\vec{B}$  è a divergenza nulla: i poli magnetici a cui ci si riferisce alludendo alle estremità di un magnete permanente sono, in effetti, sorgenti del campo  $\vec{H}$  e non del campo  $\vec{B}$ .

L'analogia tra i due sistemi di equazioni consente di ricavare la configurazione di linee di forza di  $\vec{H}$ . Con riferimento alla figura, siccome  $\vec{M}$  presenta una discontinuità in corrispondenza delle interfacce rappresentate dalle estremità del cilindro magnetizzato, queste costituiranno un polo negativo, detto *polo sud*, (a sinistra) e un polo positivo, detto *polo nord*, (a destra). Queste linee di flusso risultano simili a quelle del campo elettrico  $\vec{E}$  generate da due distribuzioni di carica di segno opposto separate da una certa distanza, cioè a quelle di un dipolo elettrico.

Il campo  $\vec{H}$  prodotto dalla magnetizzazione del materiale punta nel verso opposto a quello del vettore  $\vec{M}$  all'interno del materiale e

per questo motivo il campo  $\vec{H}$  interno al magnete è detto *campo demagnetizzante*. All'esterno del materiale,  $\vec{M}$  è nullo ed i campi  $\vec{B}$  e  $\vec{H}$  sono legati tra loro da una relazione di proporzionalità attraverso il coefficiente  $\mu_0$ , pertanto le linee di flusso di questi due campi, all'esterno del materiale, sono identiche. Così le differenze tra  $\vec{B}$  e  $\vec{H}$  si manifestano al solo interno del materiale, dove  $\vec{B}$  è proporzionale, sempre attraverso il coefficiente  $\mu_0$ , alla somma  $\vec{H} + \vec{M}$ .



Linee di forza generate da un magnete (adattato da *Practical Physics*, 1914)

## 5.5 Classificazione dei materiali magnetici



Dispositivo adoperato da Faraday per lo studio del diamagnetismo (Royal Institution, London)

Nel 1845 Faraday osservò che un pezzo di vetro posto in prossimità di una grossa elettrocalamita veniva debolmente respinto da questa; analoghi effetti repulsivi erano stati notati in precedenza ma tali osservazioni erano restate isolate. Faraday trovò molteplici sostanze che godevano di questa caratteristica e le chiamò *diamagnetiche*. Le sostanze che invece risultano attratte dai poli magnetici furono denominate *paramagnetiche*. Alla fine di un lungo studio sperimentale, Faraday concluse che non esistono corpi neutri nei confronti del fenomeno magnetico ma tutti i corpi sono o paramagnetici o diamagnetici. Le sostanze magnetiche possono essere distinte attraverso i valori della corrispondente suscettività magnetica  $\chi_m$  (o della permeabilità magnetica relativa  $\mu_r$ , pari a  $1 + \chi_m$ ), relativamente al valore nullo che assume nel vuoto. Vale la seguente classificazione:

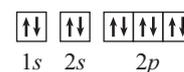
Sostanze diamagnetiche	$\chi_m < 0$ ( $ \chi_m  \approx 10^{-5}$ )	$\mu_r < 1$
Sostanze paramagnetiche	$\chi_m > 0$ ( $\chi_m \approx 10^{-5}$ )	$\mu_r > 1$
Sostanze ferromagnetiche	$\chi_m > 0$ ( $\chi_m \approx 10^3 \div 10^5$ )	$\mu_r \gg 1$

Siccome  $\chi_m$  per le sostanze diamagnetiche e paramagnetiche è molto piccolo, il prodotto  $\mu_0\mu_r$  per tali sostanze è praticamente uguale a  $\mu_0$ . Inoltre, come già anticipato, la relazione di semplice proporzionalità tra i vettori  $\vec{B}$  e  $\vec{H}$  indicata nella (5.7) non ha valore per i materiali ferromagnetici; per tali sostanze, infatti, il valore di  $\mu_r$  dipende sia dallo stato precedente che dal trattamento subito dalla sostanza.

### 5.5.1 Sostanze diamagnetiche

Il diamagnetismo può essere considerato un fenomeno di tipo generale, nel senso che è comune a tutte le sostanze; i materiali paramagnetici e ferromagnetici sono tali per la presenza di altri effetti più significativi che si sovrappongono al diamagnetismo, pure presente. Nel caso dei materiali propriamente diamagnetici, l'assenza di un momento di dipolo permanente da parte degli atomi costituenti esalta questo effetto. L'applicazione di un campo magnetico esterno ad una sostanza diamagnetica determina l'induzione nel materiale di un debole momento magnetico di verso opposto a quello del campo, tale momento si annulla alla rimozione del campo esterno.

**Esempio:** L'atomo del neon ha 10 elettroni disposti secondo la configurazione  $1s^2 2s^2 2p^2$ ; poiché tutte le coppie di elettroni per livello sono appaiate con momenti magnetici di spin contrapposti, l'atomo di questo elemento non presenta un momento di dipolo magnetico permanente, come mostrato dal diagramma orbitale di figura. Sono diamagnetici molti elementi, tra cui il rame, l'argento, il mercurio, l'oro, il bismuto e il carbonio negli stati di diamante o della grafite. Il bismuto e il diamante sono i materiali col diamagnetismo più intenso (rispettivamente con  $\chi_m$  pari a  $-16.6 \times 10^{-5}$  e  $-2.1 \times 10^{-5}$ ). I materiali superconduttori raffreddati al di sotto della temperatura critica, in presenza di un campo magnetico esterno, annullano il campo magnetico all'interno diventando dei materiali diamagnetici perfetti, con  $\chi_m = -1$  o  $\mu_r = 0$  (*effetto Meissner*). Questo fenomeno, scoperto nel 1933 da Walther Meissner e Robert Ochsenfeld, è dovuto alla generazione di correnti elettriche superficiali in questi materiali al di sotto della temperatura critica, tali da rendere nullo il campo magnetico totale all'interno del materiale.



La teoria per la descrizione del diamagnetismo fu proposta nel 1905 da Paul Langevin. L'azione di un campo magnetico sugli elettroni orbitanti attorno al nucleo atomico determina un moto di precessione antiorario del vettore momento angolare degli elettroni attorno alla direzione del campo magnetico (*precessione di Larmor*). Come il moto orbitale degli elettroni produce la corrente (5.1), al moto di precessione corrisponde una corrente che circola in senso antiorario attorno alla direzione del campo magnetico e che, dal teorema di equivalenza di Ampere genera, di conseguenza, un momento magnetico diretto in verso opposto rispetto al campo.

## 5.5.2 Sostanze paramagnetiche

Nel modello di Langevin il paramagnetismo è una proprietà dovuta alla presenza di atomi dotati di un momento di dipolo magnetico permanente, di origine orbitale o di spin. In assenza di un campo magnetico esterno i dipoli sono allineati casualmente, determinando una magnetizzazione netta nulla. L'origine della magnetizzazione nel materiale è una competizione tra l'effetto ordinante del campo magnetico esterno e l'effetto disordinante dell'agitazione termica; si trova infatti che se i momenti di dipolo magnetico non interagiscono tra loro, la suscettività del materiale segue la *legge di Curie*:

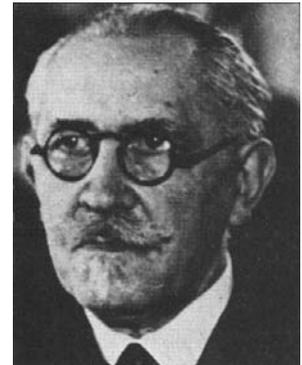
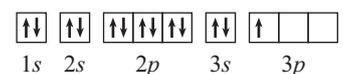
$$\chi_m = \frac{C\rho}{T},$$

in cui  $\rho$  è la densità del materiale,  $T$  la temperatura assoluta e  $C$  un fattore di proporzionalità detto *costante di Curie*. Tale legge rappresenta un caso particolare della *legge di Weiss-Curie* che estende il modello anche al caso in cui i dipoli magnetici interagiscono tra loro:

$$\chi_m = \frac{C\rho}{T - T_c}.$$

In tale espressione  $T_c$  può essere positiva, negativa o nulla; un valore positivo di  $T_c$  indica la temperatura di transizione (*temperatura di Curie*) al di sotto della quale il materiale presenta proprietà ferromagnetiche, un valore negativo di  $T_c$  caratterizza i materiali che sono *antiferromagnetici* al di sotto di una certa temperatura di critica.

**Esempio:** L'atomo di alluminio ha 13 elettroni disposti secondo la configurazione  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^1$ ; lo spin dell'elettrone spaiato sul livello  $3p$  determina un momento magnetico complessivo non nullo. Il piccolo valore della suscettività magnetica per questa classe di materiali relativamente a quella dei materiali ferromagnetici li porta ad essere considerati generalmente come materiali non magnetici. Esempi di materiali paramagnetici oltre all'alluminio sono il tungsteno, il cesio, il litio, e il sodio.



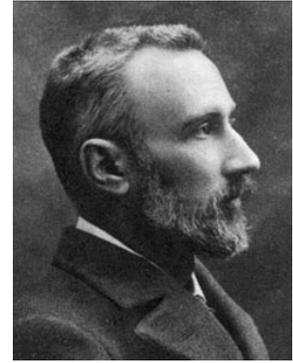
Paul Langevin

## 5.5.3 Sostanze ferromagnetiche

Mentre nei materiali paramagnetici la magnetizzazione dipende dalla presenza di un campo magnetico esterno per cui, all'annullarsi del campo tale magnetizzazione viene meno, nei materiali ferromagnetici è possibile osservare una magnetizzazione anche in assenza di un campo magnetico esterno (*magnetizzazione spontanea*). In tali materiali, a dispetto dell'agitazione termica, è presente

un agente ordinante dovuto alla forte interazione fra dipoli elementari vicini che determina l'orientazione dei corrispondenti momenti tutti nella medesima direzione.

Sebbene a basse temperature la magnetizzazione spontanea risulti sostanzialmente indipendente dalla temperatura, all'aumentare della temperatura la magnetizzazione diminuisce per effetto dell'azione disordinante dell'agitazione termica sui dipoli magnetici elementari. Il fenomeno secondo cui una calamita perde le proprietà magnetiche sopra una certa temperatura fu riportato da Gilbert nel *De Magnete* e studiato successivamente da molti fisici, compreso Faraday, fino a Pierre Curie che, nel 1895 ne formulò la descrizione. La magnetizzazione spontanea si annulla in corrispondenza della temperatura di Curie  $T_C$ , ciò comporta che



Pierre Curie

per ottenere una magnetizzazione nel materiale considerato per temperature superiori a  $T_C$  occorre applicare un campo magnetico esterno.

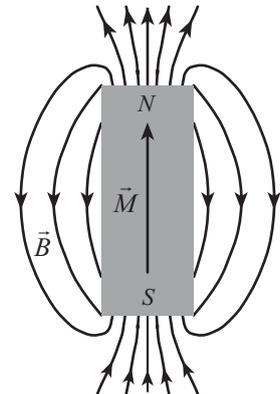


Pierre Weiss

Una teoria dei materiali ferromagnetici fu proposta nel 1906 dal fisico francese Pierre Weiss. E' possibile verificare sperimentalmente che la direzione del vettore magnetizzazione in un materiale ferromagnetico non è arbitraria ma dipende dalla direzione degli assi cristallografici. Consideriamo idealmente un parallelepipedo di materiale ferromagnetico tagliato in maniera tale che un'asse risulti coincidente con una direzione preferenziale di magnetizzazione. A causa della magnetizzazione spontanea la regione di spazio situata in prossimità del solido sarà sede di un campo magnetico. E' possibile provare che dal punto di vista energetico tale configurazione non è la più favorevole. L'energia associata al campo magnetico  $\vec{B}$  in tutto lo spazio è data dall'integrale<sup>2</sup>:

$$U_m = \frac{1}{2} \int_V \vec{H} \cdot \vec{B} dv,$$

dove il vettore  $\vec{H}$  è legato al campo magnetico dalla relazione (5.7) che, per semplicità, assumiamo valida anche per questi materiali, con  $\mu_r \gg 1$ ; nell'espressione precedente  $V$  indica il volume entro cui il prodotto  $\vec{H} \cdot \vec{B}$  è diverso da zero. Nel caso in questione tale integrale può essere diviso in due termini, uno calcolato nel volume del materiale e l'altro nello spazio restante:



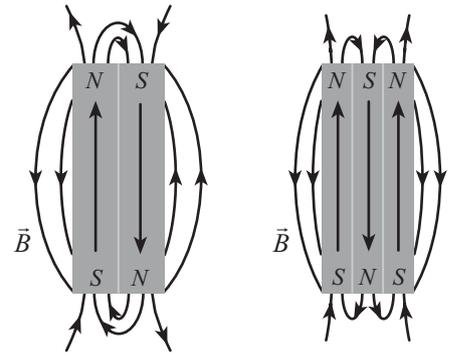
$$U_m = \frac{1}{2\mu_0} \int_{esterno} B^2 dv + \frac{1}{2\mu_0\mu_r} \int_{materiale} B^2 dv$$

dove, essendo  $\mu_r \gg 1$  il secondo addendo è trascurabile rispetto al primo, così:

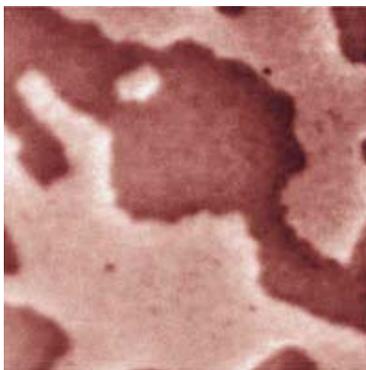
$$U_m \approx \frac{1}{2\mu_0} \int_{esterno} B^2 dv$$

<sup>2</sup> Questa relazione verrà ricavata nel par. 6.6

Questa energia sarà tanto maggiore quanto più è esteso il volume entro il quale il campo magnetico assume valori significativamente diversi da zero. Configurando la magnetizzazione in due regioni separate, dette *domini*, è possibile ridurre il valore dell'energia poiché in questa maniera diminuisce il volume entro cui è significativo il campo magnetico, in quanto le linee di forza si chiuderanno strettamente dal polo nord di un dominio a quello sud dell'altro. Siccome a tale configurazione compete un'energia magnetica inferiore a quella della configurazione precedente, ne segue che tale configurazione risulta favorita. E' possibile naturalmente estendere questo procedimento a maggiori frammentazioni dei domini per conseguire stati energeticamente sempre più favorevoli. Questo comportamento suggerisce che un materiale ferromagnetico ha la tendenza, per motivi energetici, ad organizzarsi in regioni, in ciascuna delle quali la magnetizzazione è omogenea ma differente da quella presente nelle regioni circostanti. Si prova inoltre che tale divisione non procede sino al completo disallineamento di tutti i dipoli elementari che costituiscono il materiale poiché all'aumentare del numero di domini aumentano altre forme di energia interna sino a rendere sfavorevole l'ulteriore frammentazione dei domini; si raggiunge così una condizione di equilibrio corrispondente ad un numero di domini magnetici inferiore al numero di dipoli elementari.



In assenza di un campo magnetico esterno il materiale non manifesta, in generale, proprietà magnetiche perché, sebbene in un dominio sia presente una certa magnetizzazione spontanea, l'effetto è globalmente annullato dalle magnetizzazioni diverse dei domini contigui. L'effetto di un campo magnetico esterno corrisponde quindi all'alterazione della struttura a domini in misura tale da determinare l'orientazione dei vettori magnetizzazione locale nella direzione del campo esterno.



Domini magnetici in un film di nickel spesso 8 nm. La direzione del vettore magnetizzazione è orientata perpendicolarmente al piano del foglio, il verso è entrante nelle regioni più scure e uscente in quelle più chiare. (R. Hoffmann et al., Univ. di Basel, Svizzera)

Cioè, a seguito dell'applicazione del campo esterno aumenterà il numero di regioni in cui la magnetizzazione è orientata nella direzione del campo, a scapito di quelle in cui è orientata diversamente. In pratica tale effetto sarà determinato o da uno spostamento delle pareti (*pareti di Bloch*) che delimitano i domini di magnetizzazione concorde al campo verso i domini di differente magnetizzazione, oppure da una specifica orientazione dei dipoli elementari costituenti i domini, nella direzione del campo esterno. L'esistenza dei domini magnetici fu confermata sperimentalmente nel 1931 da Francis Bitter attraverso osservazioni al microscopio.

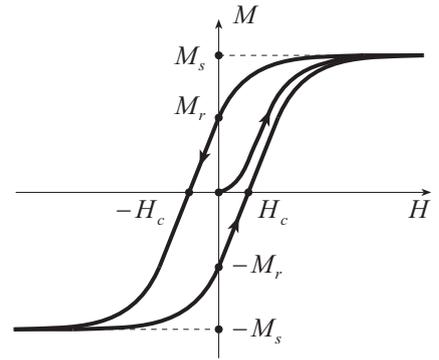
Nel 1932 Louis-Eugène Néel mostrò che in alcune sostanze, per temperature inferiori ad una certa temperatura critica (*temperatura di Néel*), metà dei momenti magnetici è orientata in una certa direzione e l'altra metà è allineata nella direzione opposta, per cui la magnetizzazione risultante è nulla. Tali sostanze sono dette antiferromagnetiche.

## 5.6 Isteresi magnetica

Consideriamo un materiale ferromagnetico a temperature inferiori a quella di Curie e supponiamo che gli effetti dei domini magnetici siano mutuamente compensati, in modo che la magnetizzazione netta del materiale sia nulla.

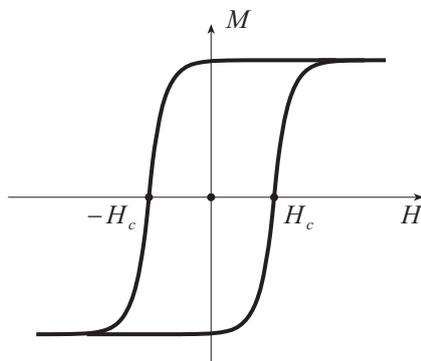
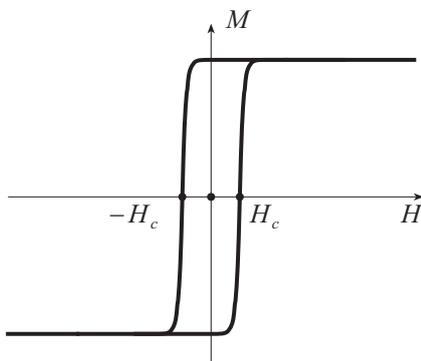
All'applicazione di un campo  $\vec{H}$ , col crescere del modulo di questo, l'intensità del vettore magnetizzazione  $\vec{M}$  nel materiale aumenterà sino a raggiungere un valore di saturazione  $M_s$ .

corrispondente alla situazione in cui tutti i domini sono orientati nella direzione del campo esterno. Al ridursi del modulo di  $\vec{H}$ , l'intensità della magnetizzazione non diminuirà passando attraverso i valori assunti precedentemente ma, a causa della non linearità del fenomeno della magnetizzazione, seguirà un altro andamento. Quando il campo esterno si annulla la magnetizzazione mantiene un valore non nullo  $M_r$ , detto *magnetizzazione residua*. Per annullare questa magnetizzazione si rende necessario, quindi, invertire il verso del campo applicato, sino a raggiungere un valore  $-H_c$ , detto *campo coercitivo*.



Aumentando ulteriormente l'intensità del campo, sempre in tale direzione, si raggiunge una nuova condizione di saturazione corrispondente, in questo caso, allo stato in cui tutti i domini sono orientati nella nuova direzione del campo  $\vec{H}$ . Diminuendo l'intensità del campo sino ad annullarla, la magnetizzazione mantiene un valore non nullo  $-M_r$ . Per annullare tale magnetizzazione occorre nuovamente invertire la direzione del campo e portarlo ad un valore pari a  $H_c$ . Infine, aumentando ulteriormente il campo  $\vec{H}$  si riottiene la condizione di saturazione corrispondente alla magnetizzazione  $M_s$ . Da questo punto in poi, riducendo il campo e poi aumentandolo nuovamente si ripercorre la stessa curva che prende il nome di *curva di isteresi*.

Attraverso la conoscenza dei valori delle intensità della magnetizzazione residua  $M_r$  e del campo coercitivo  $H_c$  è possibile classificare i materiali dal punto di vista della risposta all'applicazione di un campo magnetico esterno. Un materiale ferromagnetico con un basso valore



di  $H_c$  e con  $M_r$  prossimo al valore di saturazione  $M_s$  è caratterizzato dal richiedere campi appena superiori a  $H_c$  per raggiungere la saturazione. Siccome la suscettività magnetica del materiale è definita come il rapporto  $M/H$ , in prossimità dei tratti del ciclo in cui la pendenza è elevata, risulta alta, di conseguenza, anche la suscettività e quindi è grande anche la permeabilità del materiale. I materiali di questo tipo sono detti *dolci* nel senso che sono in grado di variare rapidamente il loro stato magnetico in corrispondenza di piccole variazioni del campo applicato. Un materiale ferromagnetico in cui  $H_c$  è elevato, sebbene  $M_r$  sia prossimo a  $M_s$  è detto *duro*, perché presenta un'estrema difficoltà ad essere magnetizzato, nel senso che, se per effetto di un campo esterno viene portato alla condizione di saturazione, occorre fornire un campo intenso per determinarne la smagnetizzazione. Ad esempio, in un sistema di memorizzazione su supporto magnetico è presente una testina magnetica realizzata in ferro dolce, per essere in grado di seguire rapidamente le variazioni della corrente applicata alla bobina eccitatrice, ed un supporto per l'immagazzinamento dei dati in ferro duro, in maniera da impedire la perdita di informazioni per smagnetizzazione.

## 5.7 Condizioni di raccordo all'interfaccia tra due materiali magnetici

Le condizioni di raccordo per i campi  $\vec{B}$  e  $\vec{H}$  nel passaggio da un mezzo materiale ad un altro possono essere dedotte in maniera analoga a quanto fatto per i vettori  $\vec{D}$  e  $\vec{E}$  nel caso dei materiali dielettrici. In particolare, considerando un cilindro infinitesimo che interseca l'interfaccia considerata, siccome il flusso del vettore  $\vec{B}$  attraverso una qualsiasi superficie chiusa è nullo, si ottiene:

$$B_{n1} = B_{n2}; \quad (5.15)$$

inoltre, dalla (5.7) segue:

$$\mu_{r1} H_{n1} = \mu_{r2} H_{n2}.$$

Considerando un percorso infinitesimo chiuso situato a cavallo dell'interfaccia considerata e che non concatena alcuna corrente macroscopica, poiché in tal caso dalla (5.8) segue che la circuitazione del vettore  $\vec{H}$  è nulla, si ottiene:

$$H_{t1} = H_{t2},$$

e, dalla (5.7):

$$\frac{B_{t1}}{\mu_{r1}} = \frac{B_{t2}}{\mu_{r2}}. \quad (5.16)$$

Pertanto, le relazioni di raccordo all'interfaccia tra due mezzi materiali diversi sono, per il campo magnetico:

$$\begin{cases} B_{n1} = B_{n2} \\ \frac{B_{t1}}{\mu_{r1}} = \frac{B_{t2}}{\mu_{r2}} \end{cases},$$

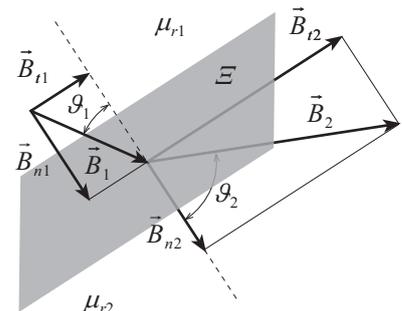
e per il vettore  $\vec{H}$ :

$$\begin{cases} \mu_{r1} H_{n1} = \mu_{r2} H_{n2} \\ H_{t1} = H_{t2} \end{cases}.$$

**Esempio:** Dalle condizioni di raccordo si evince che le linee di forza del campo magnetico tendono ad addensarsi all'interno di un materiale ferromagnetico. Sia  $\mathcal{E}$  la superficie di separazione tra due mezzi materiali di permeabilità magnetica relativa, rispettivamente  $\mu_{r1}$  e  $\mu_{r2}$ . Con riferimento alla figura, risulta:

$$\tan \vartheta_1 = \frac{B_{t1}}{B_{n1}},$$

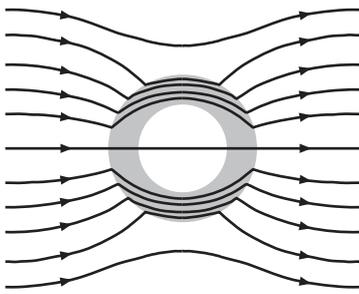
$$\tan \vartheta_2 = \frac{B_{t2}}{B_{n2}},$$



per cui, dividendo membro a membro, dalla (5.15) e dalla (5.16), si ottiene:

$$\frac{\tan \vartheta_1}{\tan \vartheta_2} = \frac{B_{t1} B_{n2}}{B_{n1} B_{t2}} = \frac{B_{t1}}{B_{t2}} = \frac{\mu_{r1}}{\mu_{r2}},$$

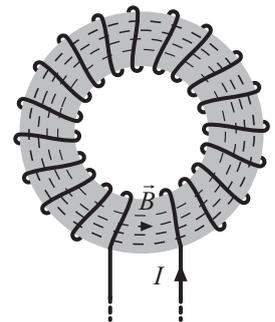
espressione nota come *legge della rifrazione delle linee di forza del campo magnetico* nel passaggio da un mezzo materiale ad un altro. Se  $\mu_{r2} \gg \mu_{r1}$ , come accade all'interfaccia tra il vuoto, in cui  $\mu_{r1}$  vale 1, e un materiale ferromagnetico, in cui  $\mu_{r2}$  è dell'ordine di  $10^2 \div 10^4$ , risulta  $\vartheta_2 \gg \vartheta_1$ , cioè il vettore  $\vec{B}_2$  è praticamente parallelo alla



superficie  $\Sigma$ . Questa proprietà è alla base del funzionamento degli *schermi magnetici*. Consideriamo un tubo di materiale ferromagnetico situato in una regione in cui è presente un campo magnetico; per quanto visto le linee di forza tendono ad addensarsi nel materiale dove il campo assume un valore elevato mentre sono quasi assenti all'interno. L'azione dello schermo è imperfetta poiché se il campo magnetico incide perpendicolarmente alla superficie del tubo e  $\vartheta_1$  vale 0, allora dalla relazione precedente si ha che anche  $\vartheta_2$  vale 0 e, pertanto, le corrispondenti linee di forza del campo magnetico penetrano all'interno. Tale dispositivo viene comunemente adoperato in tutte le circostanze in cui si rende necessario annullare il campo magnetico all'interno di una regione.

## 5.8 Circuiti magnetici

L'esempio precedente mostra come, adoperando un materiale ferromagnetico, è possibile confinare in maniera soddisfacente le linee di forza del campo magnetico in una ristretta regione dello spazio. Tale proprietà dei materiali ferromagnetici costituisce la base per la costruzione dei *circuiti magnetici*. Consideriamo  $N$  spire di filo conduttore uniformemente avvolte su un supporto ferromagnetico toroidale di sezione  $S$  e percorse da una corrente  $I$ ; trascurando le linee di forza di  $\vec{B}$  che escono dal supporto<sup>3</sup>, il flusso del campo magnetico assume lo stesso valore in corrispondenza di ciascuna sezione del supporto. Supponendo inoltre che il vettore  $\vec{B}$  sia uniforme su tutti i punti della sezione e diretto perpendicolarmente ad essa, assumendo valida per questo materiale la relazione (5.7), risulta:



$$\phi(\vec{B}) = BS = \mu_0 \mu_r SH. \tag{5.17}$$



John Hopkinson

Inoltre, dalla (5.8), valutando la circuitazione del vettore  $\vec{H}$  lungo la linea mediana  $\mathcal{C}$  del supporto (di lunghezza  $l$ ), si ha:

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = Hl = NI. \tag{5.18}$$

Confrontando le relazioni (5.17) e (5.18) segue:

$$NI = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{l}{S} \phi(\vec{B}); \tag{5.19}$$

<sup>3</sup> Tali linee di forza costituiscono il *flusso disperso* del campo magnetico.

questa espressione, formulata da John Hopkinson nella seconda metà del diciannovesimo secolo, mette in luce una relazione di proporzionalità tra la corrente complessiva  $NI$  che attraversa le spire del solenoide ed il flusso del campo magnetico  $\phi(\vec{B})$ . Tale relazione risulta formalmente analoga alla legge di Ohm applicata ad un circuito elettrico chiuso in cui un generatore di forza elettromotrice determina il flusso di una corrente attraverso una resistenza. Indicando con:

$$\mathcal{R} \equiv \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \frac{l}{S}$$

e definendo inoltre:

$$\mathcal{F} \equiv NI,$$

la legge di Hopkinson (5.19) si esprime come:

$$\mathcal{F} = \mathcal{R} \phi(\vec{B}). \quad (5.20)$$

Le quantità  $\mathcal{F}$  ed  $\mathcal{R}$ , rispettivamente analoghe alla forza elettromotrice ed alla resistenza, prendono i nomi di *forza magnetomotrice* e *riluttanza*. La forza magnetomotrice si misura in *amperspire* (*Asp*) e, poiché il flusso del campo magnetico si esprime in *Wb*, la riluttanza si misura in *Asp/Wb*.

**Esempio:** Consideriamo il dispositivo di figura in cui i vari tronchi del circuito magnetico, posti a contatto tra loro come mostrato, sono caratterizzati da diversi valori della sezione e della permeabilità magnetica relativa; assumendo che sia trascurabile il flusso disperso, il flusso del campo magnetico attraverso le sezioni di ciascun tronco vale:

$$\phi(\vec{B}) = B_1 S_1 = B_2 S_2 = B_3 S_3 = B_4 S_4;$$

inoltre, calcolando la circuitazione del vettore  $\vec{H}$  lungo la linea mediana del circuito si ha:

$$H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_3 l_3 + H_4 l_4 = N_1 I_1 + N_2 I_2 + N_3 I_3 + N_4 I_4,$$

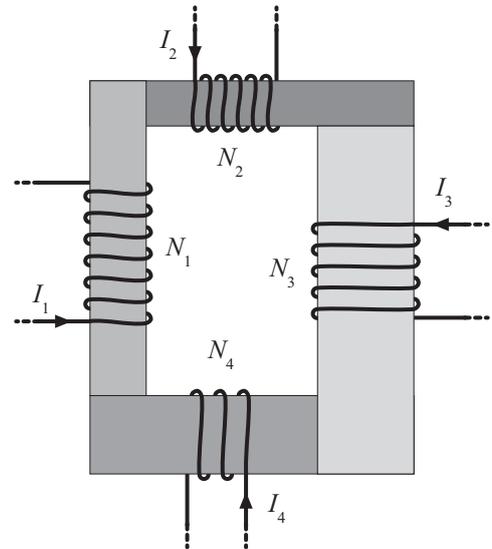
dove  $l_1, l_2, l_3$  e  $l_4$  rappresentano le lunghezze di ogni tronco del circuito e  $N_1 I_1, N_2 I_2, N_3 I_3$  e  $N_4 I_4$  le forze magnetomotrici associate a ciascuna bobina. Indicando con:

$$\mathcal{F} = N_1 I_1 + N_2 I_2 + N_3 I_3 + N_4 I_4$$

la forza magnetomotrice totale agente sul circuito magnetico, dalla relazione (5.7) segue:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} = N_1 I_1 + N_2 I_2 + N_3 I_3 + N_4 I_4 &= H_1 l_1 + H_2 l_2 + H_3 l_3 + H_4 l_4 = \frac{B_1}{\mu_0 \mu_{r1}} l_1 + \frac{B_2}{\mu_0 \mu_{r2}} l_2 + \frac{B_3}{\mu_0 \mu_{r3}} l_3 + \frac{B_4}{\mu_0 \mu_{r4}} l_4 = \\ &= \frac{l_1}{\mu_0 \mu_{r1} S_1} B_1 S_1 + \frac{l_2}{\mu_0 \mu_{r2} S_2} B_2 S_2 + \frac{l_3}{\mu_0 \mu_{r3} S_3} B_3 S_3 + \frac{l_4}{\mu_0 \mu_{r4} S_4} B_4 S_4 = \\ &= \left( \frac{l_1}{\mu_0 \mu_{r1} S_1} + \frac{l_2}{\mu_0 \mu_{r2} S_2} + \frac{l_3}{\mu_0 \mu_{r3} S_3} + \frac{l_4}{\mu_0 \mu_{r4} S_4} \right) \phi(\vec{B}), \end{aligned}$$

pertanto, indicando con



$$\mathcal{R} \equiv \frac{l_1}{\mu_0 \mu_{r1} S_1} + \frac{l_2}{\mu_0 \mu_{r2} S_2} + \frac{l_3}{\mu_0 \mu_{r3} S_3} + \frac{l_4}{\mu_0 \mu_{r4} S_4} = \mathcal{R}_1 + \mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3 + \mathcal{R}_4 \quad (5.21)$$

la somma delle riluttanze di ciascun tronco del circuito, risulta:

$$\mathcal{F} = \mathcal{R} \phi(\vec{B}).$$

L'espressione (5.21) è analoga a quella relativa alla serie di resistenze, pertanto i tronchi del circuito magnetico considerato e, di conseguenza, le corrispondenti riluttanze, sono detti in serie.

La relazione (5.20) può essere generalizzata in una espressione analoga alla legge di Kirchhoff per le tensioni:

$$\sum_m \mathcal{F}_m = \sum_l \sum_n \mathcal{R}_n \phi_l(\vec{B})$$

la quale afferma che la somma delle forze magnetomotrici in un circuito magnetico chiuso  $\sum_m \mathcal{F}_m$  è uguale alla somma delle “cadute di tensione magnetica”  $\mathcal{R}_n \phi_l(\vec{B})$  dei vari tronchi che costituiscono il circuito.

Consideriamo una porzione di circuito magnetico in cui confluiscono più tronchi, in analogia al caso dei circuiti elettrici a tale porzione in cui si uniscono le linee di flusso provenienti dai diversi tronchi diamo il nome di nodo. Valutando il flusso del campo magnetico attraverso una superficie  $S$  chiusa che contiene tale nodo, ed assumendo che sia trascurabile il flusso disperso, dalla (4.26) risulta:

$$0 = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = -B_1 S_1 + B_2 S_2 + B_3 S_3,$$

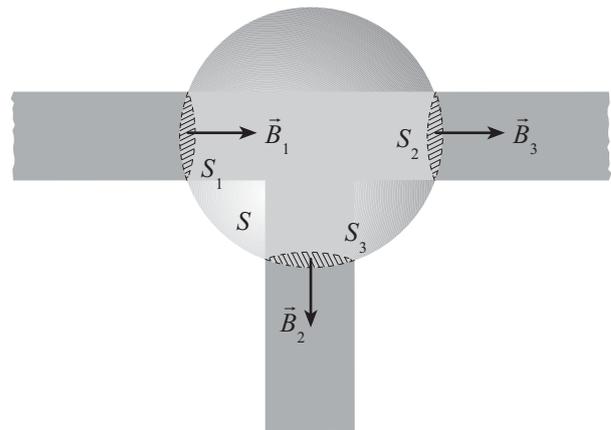
ovvero:

$$\phi_1(\vec{B}_1) - \phi_2(\vec{B}_2) - \phi_3(\vec{B}_3) = 0.$$

Questa relazione può essere facilmente generalizzata al caso di  $n$  tronchi attraverso la relazione:

$$\sum_{k=1}^n \phi_k(\vec{B}_k) = 0, \quad (5.22)$$

dove la somma è calcolata sul numero di tronchi che confluiscono nel nodo. Tale espressione rappresenta l'analogo della legge di Kirchhoff per le correnti relativa ai circuiti magnetici. Pertanto, in generale, per lo studio dei circuiti magnetici complessi è possibile ricorrere ai metodi risolutivi propri delle reti elettriche, facendo uso della formale analogia esistente tra circuiti elettrici e circuiti magnetici.



**Esempio:** Consideriamo il circuito magnetico di figura costituito da materiale ferromagnetico omogeneo di sezione  $S$  costante dove l'avvolgimento di  $N$  spire è percorso dalla corrente  $I$ . Applicando la relazione (4.26) ad una superficie chiusa contenente il nodo  $A$ , trascurando il flusso disperso risulta:

$$0 = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s} = -B_1 S + B_2 S + B_3 S,$$

ovvero, posto:

$$\begin{cases} \phi_1 \equiv B_1 S, \\ \phi_2 \equiv B_2 S, \\ \phi_3 \equiv B_3 S, \end{cases} \quad (5.23)$$

si ha:

$$\phi_1 = \phi_2 + \phi_3. \quad (5.24)$$

Calcolando la circuitazione del vettore  $\vec{H}$  lungo le due maglie  $\mathcal{C}_1$  e  $\mathcal{C}_2$  che costituiscono il circuito, assumendo arbitrariamente il verso di circolazione orario per entrambe, dalla (5.8) si ha:

$$\begin{cases} \oint_{\mathcal{C}_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_1 l_1 + H_2 l_2 = NI, \\ \oint_{\mathcal{C}_2} \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_3 l_3 - H_2 l_2 = 0, \end{cases} \quad (5.25)$$

dove  $l_1$ ,  $l_2$  e  $l_3$  rappresentano la lunghezza di ciascun tronco che costituisce il circuito. Assumendo la validità della relazione (5.7), dalle (5.23) si ha:

$$\begin{aligned} H_1 &= \frac{B_1}{\mu_0 \mu_r} = \frac{\phi_1}{\mu_0 \mu_r S}, \\ H_2 &= \frac{B_2}{\mu_0 \mu_r} = \frac{\phi_2}{\mu_0 \mu_r S}, \\ H_3 &= \frac{B_3}{\mu_0 \mu_r} = \frac{\phi_3}{\mu_0 \mu_r S}, \end{aligned}$$

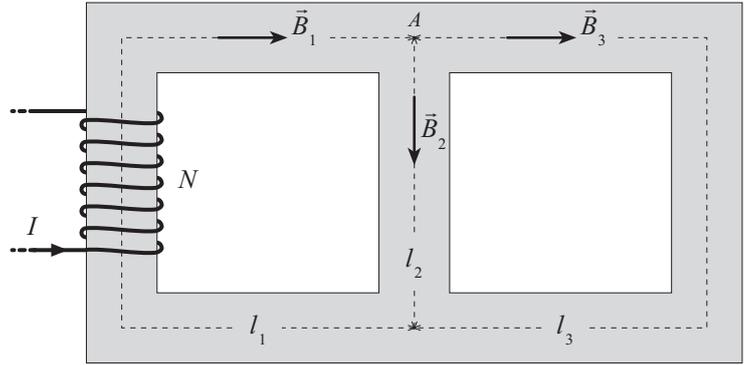
e, sostituendo nelle (5.25) si ottiene:

$$\frac{\phi_1}{\mu_0 \mu_r S} l_1 + \frac{\phi_2}{\mu_0 \mu_r S} l_2 = NI, \quad (5.26)$$

$$-\frac{\phi_3}{\mu_0 \mu_r S} l_3 + \frac{\phi_2}{\mu_0 \mu_r S} l_2 = 0. \quad (5.27)$$

Risolvendo il sistema lineare tra le equazioni (5.24), (5.26) e (5.27) è possibile determinare il flusso del campo magnetico attraverso un qualsiasi tronco del circuito magnetico e, dalle relazioni (5.23) si ricavare le intensità dei campi magnetici nei tronchi. In particolare, ad esempio:

$$\phi_1 \left( \frac{l_1}{\mu_0 \mu_r S} + \frac{\frac{l_2}{\mu_0 \mu_r S} \frac{l_3}{\mu_0 \mu_r S}}{\frac{l_2}{\mu_0 \mu_r S} + \frac{l_3}{\mu_0 \mu_r S}} \right) = NI, \quad (5.28)$$



da cui segue:

$$B_1 = \frac{NI}{S} \frac{1}{\frac{l_1}{\mu_0 \mu_r S} + \frac{l_2}{\mu_0 \mu_r S} + \frac{l_3}{\mu_0 \mu_r S}} \quad (5.29)$$

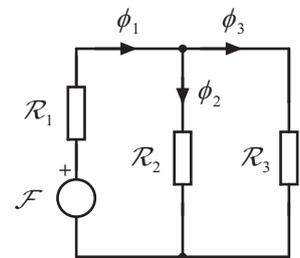
Adoperando l'analogia tra circuiti magnetici e circuiti elettrici è possibile ritrovare agevolmente lo stesso risultato; associando ad ogni tronco del circuito magnetico la corrispondente riluttanza:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &\equiv \frac{l_1}{\mu_0 \mu_r S}, \\ \mathcal{R}_2 &\equiv \frac{l_2}{\mu_0 \mu_r S}, \\ \mathcal{R}_3 &\equiv \frac{l_3}{\mu_0 \mu_r S}, \end{aligned}$$

e indicando con  $\mathcal{F}$  la forza magnetomotrice  $NI$ , il circuito magnetico può essere schematizzato così come rappresentato nella figura. Da tale schema segue che il flusso  $\phi_1$  soddisfa la relazione:

$$\phi_1 \left( \mathcal{R}_1 + \frac{\mathcal{R}_2 \mathcal{R}_3}{\mathcal{R}_2 + \mathcal{R}_3} \right) = \mathcal{F}$$

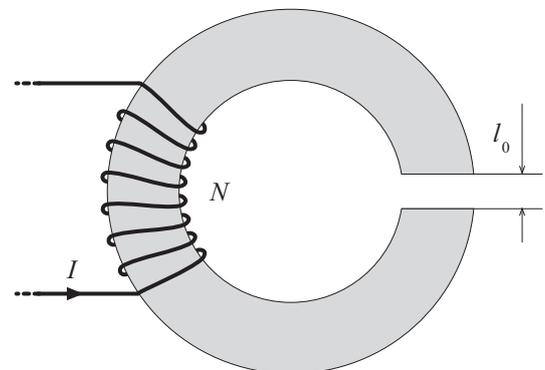
che coincide con la (5.28).



La legge di Hopkinson può continuare ad essere adoperata anche qualora nel circuito magnetico venga asportata una porzione di un tronco di lunghezza molto minore della sezione del tronco stesso, creando in aria un *traferro*. Dalla condizione di raccordo (5.15), segue che la componente normale del campo magnetico si mantiene continua in corrispondenza di qualsiasi interfaccia, pertanto, in prima approssimazione è possibile trascurare il flusso disperso e rappresentare il traferro attraverso la sua corrispondente riluttanza. Con la realizzazione di traferri è possibile quindi rendere accessibile un campo magnetico all'esterno del circuito; i circuiti magnetici dotati di traferro trovano applicazione della realizzazione di elettromagneti, invece i circuiti magnetici chiusi si adoperano, ad esempio, nei trasformatori.

**Esempio:** Consideriamo un supporto ferromagnetico omogeneo toroidale di sezione  $S$  sul quale è realizzato un avvolgimento di  $N$  spire conduttrici percorse da una corrente  $I$ . Il circuito, di lunghezza complessiva  $l$  presenta un traferro in aria di lunghezza  $l_0$ . Le riluttanze del circuito e del traferro valgono, rispettivamente:

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \frac{l-l_0}{\mu_0 \mu_r S}, \\ \mathcal{R}_0 &= \frac{l_0}{\mu_0 S}, \end{aligned}$$



dove  $\mu_r$  rappresenta la permeabilità magnetica relativa del materiale; poiché il traferro è in aria nel calcolo della corrispondente riluttanza  $\mathcal{R}_0$  si è assunto  $\mu_r = 1$ . Il circuito considerato può essere schematizzato come mostrato in figura, così, applicando la legge di Hopkinson e considerando che le riluttanze  $\mathcal{R}$  e  $\mathcal{R}_0$  sono disposte in serie, si ha:

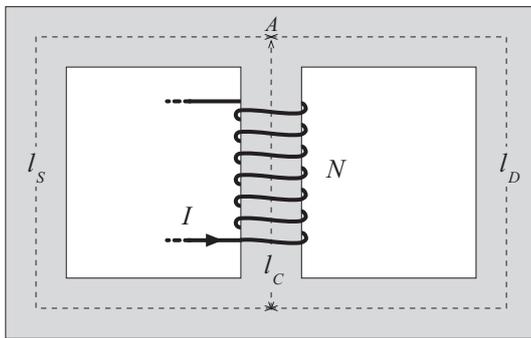
$$\mathcal{F} = (\mathcal{R} + \mathcal{R}_0) \phi,$$

dove la forza magnetomotrice  $\mathcal{F}$  vale  $NI$ . Sostituendo alle riluttanze le corrispondenti espressioni è possibile, ad esempio, determinare il valore del campo magnetico nel traferro. Risulta infatti:

$$\phi = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R} + \mathcal{R}_0} = \frac{NI}{\frac{l-l_0}{\mu_0\mu_r S} + \frac{l_0}{\mu_0 S}},$$

così, dalla (5.17) segue:

$$B = \frac{\phi}{S} = \frac{NI}{\frac{l-l_0}{\mu_0\mu_r} + \frac{l_0}{\mu_0}}.$$



**Esempio:** Il circuito magnetico mostrato in figura è realizzato da due bracci uguali di materiale ferromagnetico, di lunghezza media  $l_S = l_D$  pari a  $102\text{ cm}$  e da una parte centrale di lunghezza  $l_C$  di  $36\text{ cm}$ , sulla quale sono avvolte 100 spire conduttrici. La sezione di ogni parte del circuito è uniforme. Nota la curva di magnetizzazione<sup>4</sup> del materiale che costituisce il circuito, stabiliamo l'intensità della corrente  $I$  che deve percorrere l'avvolgimento affinché il campo magnetico attraverso i due bracci sia pari a  $1.0\text{ T}$ . In corrispondenza del punto A il flusso del campo magnetico attraverso il tronco centrale del circuito si riparte equamente fra i due bracci, poiché questi sono identici; pertanto, l'intensità del campo in tali tronchi,  $B_S = B_D$ , deve essere metà di quella nel tronco centrale  $B_C$ :

$$B_D = 2B_C = 1.0\text{ T}.$$

Dalla curva di magnetizzazione si deduce che a queste intensità del campo magnetico corrispondono le intensità del vettore  $\vec{H}$ :

$$H_D \approx 414\text{ Asp/m};$$

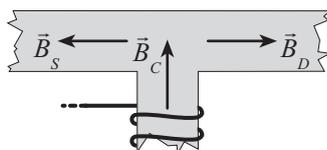
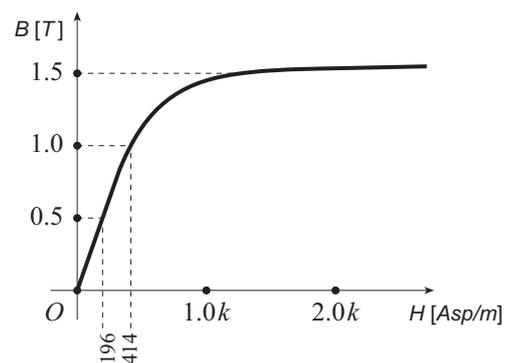
$$H_C \approx 196\text{ Asp/m}.$$

Calcolando la circuitazione del vettore  $\vec{H}$  lungo una delle due maglie che costituiscono il circuito si ha:

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_D l_D + H_C l_C = NI,$$

da cui segue:

$$I = \frac{H_D l_D + H_C l_C}{N} \approx 4.9\text{ A}.$$



**Esempio:** Se nel circuito magnetico dell'esempio precedente viene praticato un taglio di  $1\text{ mm}$  in corrispondenza del braccio di destra, valutiamo la corrente necessaria affinché il campo magnetico attraverso tale traferro abbia un'intensità pari a  $0.4\text{ T}$ . Quando viene praticato il taglio, nel punto A il flusso del campo magnetico cessa di dividersi equamente tra i due bracci laterali, siccome per effetto del taglio presentano

<sup>4</sup> Si osservi che la curva di magnetizzazione per un materiale ferromagnetico può essere indifferentemente rappresentata sia attraverso la relazione funzionale tra  $\vec{M}$  e  $\vec{H}$ , come mostrato nel par. 5.6, che tra  $\vec{B}$  e  $\vec{H}$ , come in questo esempio. Le due rappresentazioni sono collegate tra loro dalla relazione (5.6).

una riluttanza differente; dalla relazione (5.22) segue:

$$\phi_C = \phi_D + \phi_S,$$

dove  $\phi_C$ ,  $\phi_D$  e  $\phi_S$  rappresentano, rispettivamente, il flusso del campo magnetico attraverso i bracci centrale, destro e sinistro,  $\vec{B}_C$ ,  $\vec{B}_D$  e  $\vec{B}_S$ . Siccome la sezione di ciascun tronco del circuito è uniforme, si ha:

$$B_C = B_D + B_S. \quad (5.30)$$

Indicando con  $\vec{B}_i$  il campo magnetico nel traferro, il corrispondente vettore  $\vec{H}_i$  ha intensità:

$$H_i = \frac{B_i}{\mu_0} \approx 3.2 \times 10^5 \text{ Asp/m};$$

trascurando il flusso disperso, i campi  $\vec{B}_D$  e  $\vec{B}_i$ , rispettivamente nel tronco destro del circuito e nel traferro, possono essere assunti uguali, pertanto:

$$B_D = B_i = 0.4 \text{ T}$$

e, dalla curva di magnetizzazione segue che:

$$H_D \approx 157 \text{ Asp/m}.$$

Valutando la circuitazione del vettore  $\vec{H}$  lungo la maglia costituita dai due bracci esterni del circuito ed osservando che  $l_i \ll l_D$ , risulta:

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_i l_i + H_D (l_D - l_i) - H_S l_S \approx H_i l_i + H_D l_D - H_S l_S = 0,$$

essendo nulla la forza magnetomotrice in questa maglia; da tale relazione segue quindi che l'intensità del vettore  $\vec{H}$  nel tronco di sinistra vale:

$$H_S = \frac{H_i l_i + H_D l_D}{l_S} \approx 469 \text{ Asp/m};$$

a cui corrisponde un campo magnetico:

$$B_S = 1.1 \text{ T}.$$

Nota quindi l'intensità del campo magnetico nei due bracci laterali, attraverso la relazione (5.30) è possibile stabilire l'intensità del campo magnetico nel tronco centrale:

$$B_C = B_D + B_S \approx 1.5 \text{ T},$$

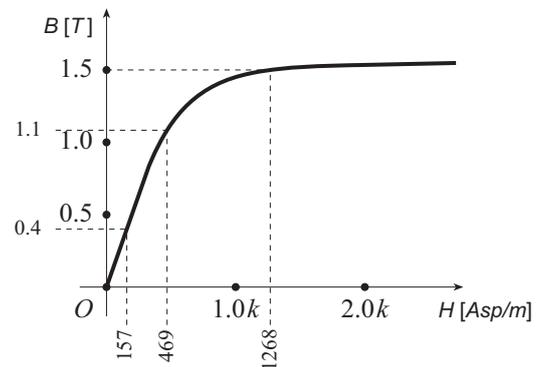
a cui corrisponde:

$$H_C \approx 1268 \text{ Asp/m}.$$

Infine, calcolando la circuitazione del vettore  $\vec{H}$  lungo la maglia di destra del circuito si ha:

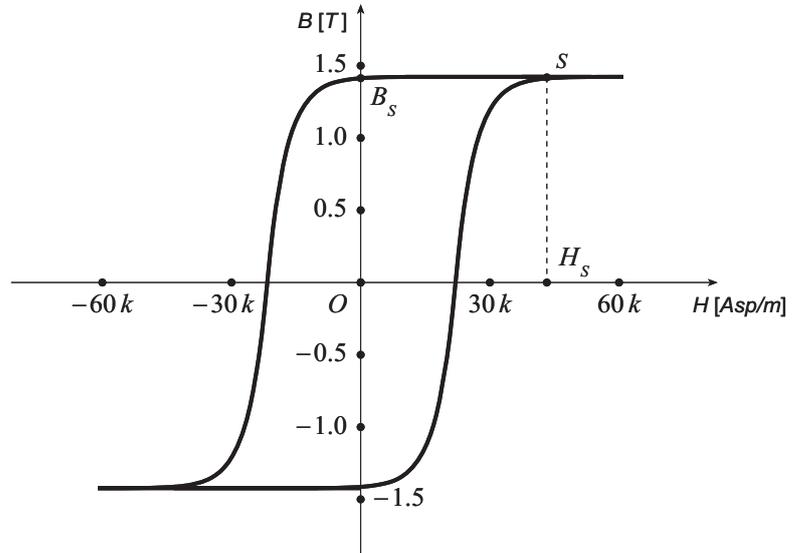
$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_i l_i + H_D l_D + H_C l_C = NI,$$

da cui segue:



$$I = \frac{H_i l_i + H_D l_D + H_C l_C}{N} \approx 9.3 \text{ A.}$$

**Esempio:** Un elettromagnete è costruito avvolgendo 100 spire conduttrici attorno ad un nucleo ferromagnetico la cui curva di isteresi è mostrata in figura. La lunghezza media del circuito magnetico che costituisce l'elettromagnete è di 140 cm e lo spessore del traferro è di 10 cm. Stabiliamo l'intensità  $I_S$  della corrente attraverso l'avvolgimento, necessaria a portare il materiale alla saturazione, in corrispondenza del punto S del ciclo di isteresi. In tale punto, i corrispondenti valori dell'intensità del vettore  $\vec{H}$  e del campo magnetico  $\vec{B}$  sono:

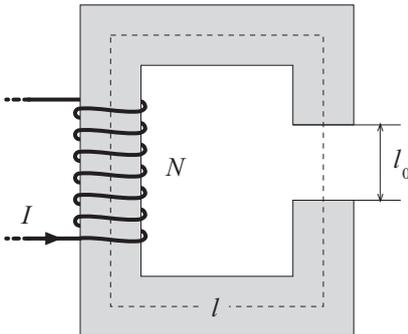


$$H_S \approx 43 \times 10^3 \text{ Asp/m},$$

$$B_S \approx 1.4 \text{ T};$$

Valutando la circuitazione del vettore  $\vec{H}$  lungo il circuito magnetico considerato, nella condizione di saturazione si ha:

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_{0s} l_0 + H_S (l - l_0) = NI_S,$$



dove  $H_{0s}$  rappresenta l'intensità del vettore  $\vec{H}$  nel traferro alla saturazione, cioè:

$$H_{0s} = \frac{B_S}{\mu_0}.$$

Sostituendo nella precedente espressione segue:

$$I_S = \frac{B_S l_0}{\mu_0 N} + \frac{l - l_0}{N} H_S \approx 1.7 \text{ kA.}$$

**Esempio:** Consideriamo il circuito magnetico dell'esempio precedente, supponiamo che una volta raggiunta la condizione di saturazione del materiale ferromagnetico, la corrente attraverso l'avvolgimento venga progressivamente ridotta fino al valore di 500 A. Stabiliamo le intensità del vettore  $\vec{H}$  e del campo magnetico  $\vec{B}$  nel traferro nelle due circostanze in cui la curva di isteresi venga percorsa facendo scorrere la corrente attraverso l'avvolgimento in un verso oppure nell'altro. Valutando la circuitazione del vettore  $\vec{H}$  lungo il circuito magnetico si ha:

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_0 l_0 + H (l - l_0) = NI,$$

dove  $H_0$  rappresenta l'intensità del vettore  $\vec{H}$  nel traferro,  $B/\mu_0$ ; sostituendo nella precedente espressione è possibile ricavare l'intensità del campo magnetico:

$$B = -\mu_0 \frac{l - l_0}{l_0} H + \mu_0 \frac{NI}{l_0}, \tag{5.31}$$

facendo l'intersezione di questa retta di carico con la curva di isteresi si trovano i due stati:

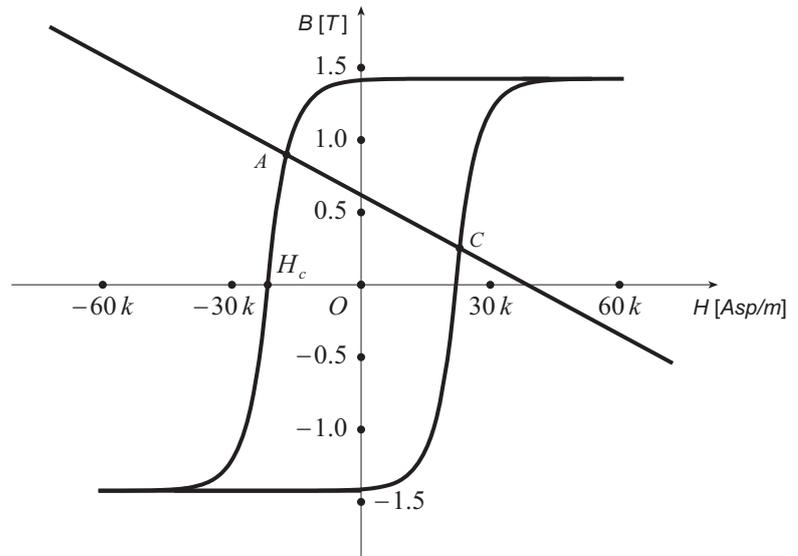
$$H_A \approx -17 \times 10^3 \text{ Asp/m},$$

$$B_A \approx 9.1 \text{ T};$$

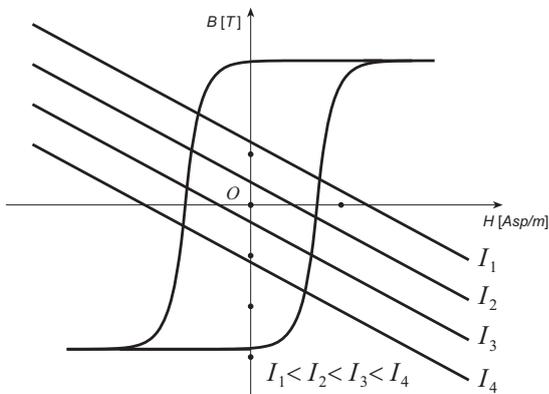
$$H_c \approx 23 \times 10^3 \text{ Asp/m},$$

$$B_c \approx 0.3 \text{ T}.$$

Il primo dei due è ottenuto portando prima l'intensità del vettore  $\vec{H}$  ad un elevato valore positivo fino a raggiungere la saturazione, per il secondo stato, invece, tale vettore è stato portato ad un elevato valore negativo. Si osservi che nel primo stato i vettori  $\vec{H}$  e  $\vec{B}$  nel materiale sono discordi, nel secondo invece sono concordi; in particolare se a partire dallo stato A l'intensità di  $\vec{H}$  fosse ulteriormente aumentata fino a portarla al valore coercitivo  $H_c$  (in questo caso di  $-22 \times 10^3 \text{ Asp/m}$ ), il campo magnetico risulterebbe nullo; ovviamente nel traferro, i vettori  $\vec{H}$  e  $\vec{B}$  sono sempre concordi.

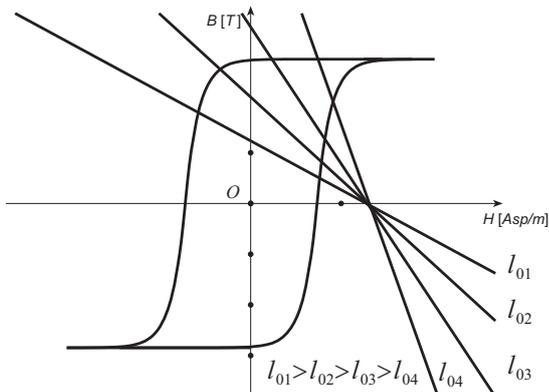


Qualora venga fatta cambiare l'intensità della corrente attraverso l'avvolgimento, la retta di carico (5.31) si sposta mantenendosi sempre parallela a se stessa, poiché il relativo coefficiente angolare dipende solo dalla geometria del circuito magnetico. Se viene diminuito lo spessore del traferro la retta di carico ruota in senso orario attorno all'intercetta orizzontale; nel limite in cui lo spessore del traferro viene annullato la retta di carico si dispone parallelamente all'asse verticale, il relativo valore di del campo magnetico rappresenta il massimo valore ottenibile per la corrispondente corrente nell'avvolgimento, naturalmente in questo caso tale campo non è accessibile all'esterno del materiale. Una particolare circostanza si ha qualora la corrente attraverso l'avvolgimento si annulla, la retta di carico diventa:

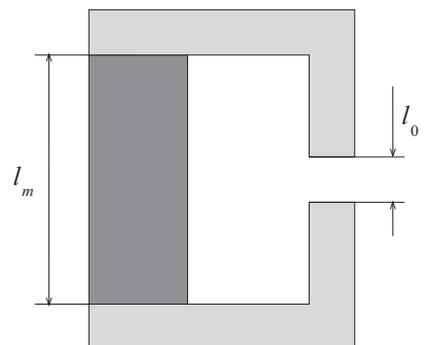


$$B = -\mu_0 \frac{l-l_0}{l_0} H,$$

e passa per l'origine. La presenza del campo magnetico in assenza della corrente indica che il materiale è diventato un magnete permanente, in questo caso i vettori  $\vec{H}$  e  $\vec{B}$  nel materiale si mantengono sempre discordi. Se in queste condizioni lo spessore del traferro viene annullato, si annullerebbe di conseguenza anche il corrispondente vettore  $\vec{H}$ ; quando  $\vec{H}$  è nullo, dalla relazione (5.6) segue che il campo magnetico  $\vec{B}$  vale  $\mu_0 \vec{M}$  e il suo modulo, dato dall'intersezione della curva di isteresi con l'asse verticale, è detto *campo magnetico residuo*.



**Esempio:** Il magnete di figura è costituito da una sbarra magnetizzata di sezione  $S$  pari a  $40 \text{ cm}^2$  e lunghezza  $l_m$  di  $30 \text{ cm}$  e da due àncore di ferro dolce di sezione  $S_0$  pari a  $20 \text{ cm}^2$  che delimitano un traferro di spessore  $l_0$  pari a  $4 \text{ cm}$ . In figura è mostrata la curva di isteresi del materiale che costituisce la sbarra magnetizzata. Stabiliamo il campo magnetico nel traferro assumendo trascurabile il flusso disperso e supponendo molto elevata la permeabilità magnetica relativa del materiale che costituisce le àncore. Valutando la circuitazione del vettore  $\vec{H}$  lungo il circuito magnetico che costituisce il magnete, si ottiene:



$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = H_m l_m + 2H_a l_a + H_0 l_0 = 0,$$

dove  $H_m$ ,  $H_a$  e  $H_0$  indicano rispettivamente le intensità del vettore  $\vec{H}$  nella sbarra magnetizzata, nell'ancora e nel traferro;  $l_a$  è la lunghezza delle ancore. Poiché la permeabilità magnetica relativa del materiale che costituisce le ancore è molto elevata, il termine  $H_a$ , pari a  $B_a/\mu_0\mu_r$ , in cui  $B_a$  è il modulo del campo magnetico nelle ancore, può essere considerato trascurabile nella somma precedente. Trascurando inoltre il flusso disperso, dalla relazione (5.22) segue:

$$B_m S = B_0 S_0, \quad (5.32)$$

dove  $B_m$  e  $B_0$  rappresentano rispettivamente le intensità del campo magnetico nella sbarra magnetizzata e nel traferro; siccome  $B_0$  vale  $\mu_0 H_0$ , da tale relazione e dalla precedente, si ha:

$$H_m l_m + \frac{B_0 S_m}{\mu_0 S_0} l_0 = 0,$$

da cui segue:

$$B_0 = -\mu_0 \frac{l_m S_0}{l_0 S_m} H_m,$$

sostituendo quindi questa quantità nella (5.6) si ottiene l'espressione della retta di carico del circuito magnetico in termini di relazione funzionale tra i vettori  $\vec{M}$  e  $\vec{H}$ :

$$M = -\left(1 + \frac{l_m S_0}{l_0 S_m}\right) H_m.$$

Dall'intersezione della retta di carico con la curva di isteresi si ricava:

$$\begin{aligned} H_{mA} &\approx -38 \times 10^3 \text{ Asp/m}, \\ M_A &\approx 183 \times 10^3 \text{ A/m}. \end{aligned}$$

Infine, dalle relazioni (5.32) e (5.6) segue:

$$B_0 = B_m \frac{S}{S_0} = \mu_0 (H_{mA} + M_A) \frac{S}{S_0} \approx 0.36 T.$$

