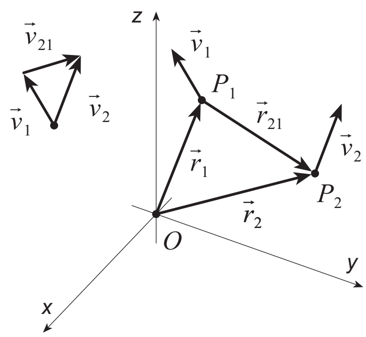
3 MOTI RELATIVI

La descrizione del moto richiede la specificazione di un sistema di riferimento; generalmente viene scelto quel riferimento il cui uso semplifica i calcoli e le osservazioni. Tuttavia, poiché osservatori differenti possono adoperare diversi sistemi di riferimento, è opportuno stabilire le relazioni che intercorrono tra le osservazioni eseguite dagli osservatori differenti. Ad esempio, la maggior parte delle determinazioni svolte nell'ambito della meccanica sono relative ad un sistema di riferimento solidale alla Terra e quindi in moto con essa; la descrizione del moto della Terra nel sistema solare adopera un sistema di riferimento generalmente solidale col Sole, come il moto degli elettroni atomici è stabilito relativamente al nucleo.

3.1 Velocità relativa e accelerazione relativa

Consideriamo due punti materiali P_1 e P_2 in moto rispetto ad un sistema di riferimento con origine in O. Se $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ sono i relativi vettori posizione, le velocità dei due corpi sono rispettivamente:



$$\vec{v}_1 = \frac{d\vec{r}_1}{dt}, \qquad \vec{v}_2 = \frac{d\vec{r}_2}{dt}. \tag{3.1}$$

Se consideriamo un sistema di riferimento solidale con la particella P_1, il vettore posizione di P_2 sarà:

$$\vec{r}_{21} \equiv \vec{r}_2 - \vec{r}_1 , \tag{3.2}$$

per cui, dalle relazioni (3.1), la derivata rispetto al tempo di tale vettore rappresenterà la velocità di P_2 relativamente ad un osservatore solidale a P_1:

$$\vec{v}_{21} = \frac{d\vec{r}_{21}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) = \frac{d\vec{r}_2}{dt} - \frac{d\vec{r}_1}{dt} = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 . \tag{3.3}$$

Analogamente è possibile riferire il moto di P_1 ad un sistema di riferimento solidale con la particella P_2, in tal caso il vettore posizione di P_1, sarà:

$$\vec{r}_{12} \equiv \vec{r}_1 - \vec{r}_2 , \tag{3.4}$$

e, dalle relazioni (3.1), la velocità relativa:

$$\vec{v}_{12} = \frac{d\vec{r}_{12}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) = \frac{d\vec{r}_1}{dt} - \frac{d\vec{r}_2}{dt} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2 . \tag{3.5}$$

Quindi, confrontando le relazioni (3.2) e (3.4) segue:

$$\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21} ,$$

e confrontando le relazioni (3.3) e (3.5) segue:

$$\vec{v}_{12} = -\vec{v}_{21} ,$$

cioè la velocità di P_2 rispetto a P_1 è uguale ed opposta alla velocità di P_1 rispetto a P_2; inoltre, dalle relazioni (3.3) e (3.5) segue che per ottenere le velocità relative delle due particelle occorre sottrarre le velocità relative all'osservatore. L'accelerazione di P_2 rispetto a P_1 vale:

$$\vec{a}_{21} = \frac{d^2\vec{r}_{21}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right) = \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} - \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \vec{a}_2 - \vec{a}_1 , \tag{3.6}$$

mentre l'accelerazione di P_1 rispetto a P_1 è:

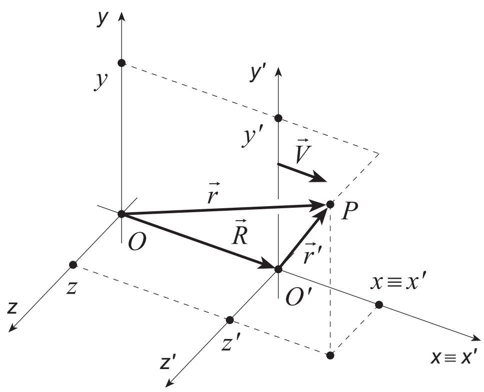
$$\vec{a}_{12} = \frac{d^2\vec{r}_{12}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) = \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} - \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \vec{a}_1 - \vec{a}_2 , \tag{3.7}$$

così, confrontando la (3.6) e la (3.7), si ha:

$$\vec{a}_{12} = -\vec{a}_{21} .$$

3.2 Moto relativo traslatorio uniforme

Consideriamo due osservatori O e O' in moto traslatorio uniforme l'uno rispetto all'altro e stabiliamo le relative descrizioni del moto di un punto materiale *P*. Supponiamo, per semplicità, che gli assi *x* e *x'* lungo la direzione del moto relativo coincidano e che i piani *yz* e *y'z'* siano reciprocamente paralleli; supponiamo inoltre che all'istante di tempo iniziale $t = 0$, le due origini O e O' coincidano. Sia:



$$\vec{R} \equiv \overrightarrow{OO'}$$

il vettore posizione dell'origine O' rispetto al sistema di riferimento con origine *O*, allora, se $\vec{V}$ è la velocità relativa, costante, di O' rispetto a *O*, risulterà:

$$\vec{R} = \vec{V}\, t , \tag{3.8}$$

per cui fra i vettori posizione $\vec{r}$ e $\vec{r}\,'$ di *P* rispetto a *O* e O' sussiste la relazione:

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{R}\,; \tag{3.9}$$

sostituendo la (3.8) nella (3.9) si ottiene:

$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{V}t \tag{3.10}$$

a tale espressione corrispondono le relazioni scalari:

$$\begin{cases} x' = x - Vt, \\ y' = y, \\ z' = z, \\ t' = t. \end{cases} \tag{3.11}$$

Si osservi che è stata aggiunta la relazione $t' = t$ per esplicitare l'ipotesi che i tempi misurati dai due osservatori siano i medesimi. In altri termini si ipotizza che le misure di tempo siano indipendenti dal moto dell'osservatore. Tale supposizione deve, naturalmente, essere eventualmente suffragata dagli esperimenti. Le relazioni (3.11) che legano le osservazioni tra due sistemi di riferimento in moto traslatorio uniforme, sono dette *trasformazioni di Galilei*.

Derivando ambo i membri della relazione (3.10), si ha:

$$\vec{v}\,' = \frac{d\vec{r}\,'}{dt'} = \frac{d\vec{r}\,'}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} - \vec{V}\,t\right) = \frac{d\vec{r}}{dt} - \frac{d}{dt}\left(\vec{V}\,t\right) = \frac{d\vec{r}}{dt} - \vec{V} = \vec{v} - \vec{V}\,,$$

in cui $d\vec{r}/dt$ rappresenta la velocità $\vec{v}$ di P rispetto a O e $d\vec{r}\,'/dt = d\vec{r}\,'/dt'$, essendo $t' = t$, rappresenta la velocità $\vec{v}\,'$ di P rispetto a O', così risulta:

$$\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{V}\,, \tag{3.12}$$

che corrisponde alle relazioni scalari:

$$\begin{cases} v'_x = v_x - V, \\ v'_y = v_y, \\ v'_z = v_z. \end{cases}$$

Calcolando la derivata seconda della relazione (3.10), si ha:

$$\vec{a}\,' = \frac{d^2\vec{r}\,'}{dt'^2} = \frac{d^2\vec{r}\,'}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}\left(\vec{r} - \vec{V}\,t\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} - \frac{d^2}{dt^2}\left(\vec{V}\,t\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{a}$$

dove $d^2\vec{r}/dt^2$ è accelerazione $\vec{a}$ di P rispetto a O e inoltre $d^2\vec{r}\,'/dt^2 = d^2\vec{r}\,'/dt'^2$ è l'accelerazione $\vec{a}\,'$ di P rispetto a O', così da tale relazione segue:

$$\vec{a}\,' = \vec{a}\,,$$

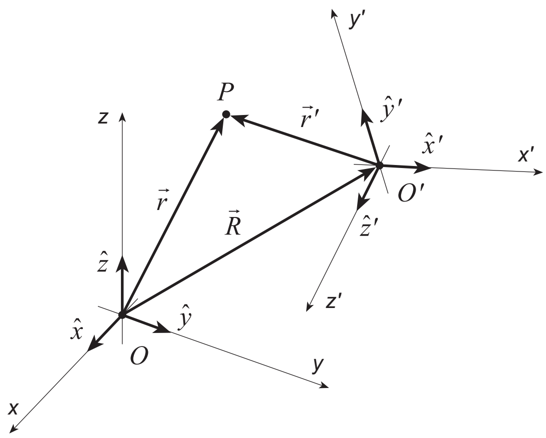
che corrisponde alle relazioni scalari:

$$\begin{cases} a'_x = a_x, \\ a'_y = a_y, \\ a'_z = a_z. \end{cases}$$

Cioè osservatori in moto relativo traslatorio uniforme misurano la stessa accelerazione di uno stesso punto materiale, e quindi l'accelerazione è indipendente dal moto rettilineo uniforme dell'osservatore. Concludiamo che l'accelerazione è una grandezza invariante per il passaggio da un sistema di riferimento a qualsiasi altro in moto rettilineo uniforme rispetto ad esso.

3.3 Moto relativo generale

Consideriamo due osservatori O e O' in moto l'uno rispetto all'altro e stabiliamo, nel caso generale, le relative descrizioni del moto di un punto materiale P. Supponiamo che il punto O' si muova con velocità $\vec{V}$ e che, inoltre, l'insieme dei tre assi del sistema di riferimento con origine O' ruoti rigidamente con velocità angolare $\vec{\omega}$ rispetto al sistema con origine O. Esprimendo la relazione (3.9) tra le posizioni del punto materiale P misurate rispetto ai due sistemi di riferimento, attraverso i versori dei corrispondenti sistemi, si ha:



$$x'\hat{x}' + y'\hat{y}' + z'\hat{z}' = \left(x - X\right)\hat{x} + \left(y - Y\right)\hat{y} + \left(z - Z\right)\hat{z}\,; \tag{3.13}$$

A differenza del caso precedente in cui i due sistemi si muovono di moto rettilineo uniforme uno rispetto all'altro, le coordinate di O' rispetto a O non valgono $V_x t$, $V_y t$ e $V_z t$, inoltre i versori $\hat{x}'$, $\hat{y}'$ e $\hat{z}'$, in generale, variano in direzione e verso e, di conseguenza, la loro derivata non è nulla, pertanto, derivando ambo i membri della (3.13), si ha:

$$\begin{aligned} &\frac{dx'}{dt}\hat{x}' + \frac{dy'}{dt}\hat{y}' + \frac{dz'}{dt}\hat{z}' + x'\frac{d\hat{x}'}{dt} + y'\frac{d\hat{y}'}{dt} + z'\frac{d\hat{z}'}{dt} = \\ &\qquad = \left(\frac{dx}{dt} - \frac{dX}{dt}\right)\hat{x} + \left(\frac{dy}{dt} - \frac{dY}{dt}\right)\hat{y} + \left(\frac{dz}{dt} - \frac{dZ}{dt}\right)\hat{z}; \end{aligned} \tag{3.14}$$

le derivate dei versori $\hat{x}'$, $\hat{y}'$ e $\hat{z}'$ possono esprimersi attraverso la (2.28) come:

$$\frac{d\hat{x}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{x}',$$
$$\frac{d\hat{y}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{y}',$$
$$\frac{d\hat{z}'}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{z}',$$

così, sostituendo nella (3.14) si ha:

$$v_x{}'\hat{x}' + v_y{}'\hat{y}' + v_z{}'\hat{z}' + \vec{\omega}\times\left(x'\hat{x}' + y'\hat{y}' + z'\hat{z}'\right) = \left(v_x - V_x\right)\hat{x} + \left(v_y - V_y\right)\hat{y} + \left(v_z - V_z\right)\hat{z}; \qquad (3.15)$$

che, sinteticamente può esprimersi come:

$$\vec{v}' = \vec{v} - \left(\vec{V} + \vec{\omega}\times\vec{r}'\right), \qquad (3.16)$$

dove $\vec{v}'$ è la velocità di P rispetto al sistema di riferimento con origine in O', $\vec{v}$ è la velocità di P rispetto al sistema con origine in O e:

$$\vec{v}_t \equiv \vec{V} + \vec{\omega}\times\vec{r}',$$

detta *velocità di trascinamento*, è la velocità con cui si muove rispetto al sistema con origine O il punto solidale col sistema di origine O' che, nell'istante considerato è situato nella posizione occupata da P. Tale interpretazione della velocità di trascinamento deriva dalla sua espressione, infatti alla velocità $\vec{V}$ di O' rispetto a O è sommata la velocità $\vec{\omega}\times\overrightarrow{O'P}$ con cui si muove l'estremo libero del vettore ruotante $\overrightarrow{O'P}$; inoltre, se P è solidale col sistema di origine in O', cioè $\vec{v}' = \vec{0}$, allora la velocità di P rispetto al sistema di origine in O è pari a $\vec{V} + \vec{\omega}\times\vec{r}'$.

Due particolari espressioni della (3.16) si hanno se $\vec{\omega} = \vec{0}$ o se $\vec{V} = \vec{0}$. Nel primo caso si ha il semplice moto traslatorio di un sistema rispetto all'altro e la relazione (3.16) si riduce alla (3.12). Nel secondo caso il sistema con origine in O' ruota rispetto al sistema con origine in O mentre il punto O' si mantiene a riposo rispetto a O, per cui la (3.16) si esprime come $\vec{v}' = \vec{v} - \vec{\omega}\times\vec{r}'$ e la velocità di trascinamento vale $\vec{\omega}\times\vec{r}'$; questo caso è detto *moto di trascinamento rotatorio*.

Per valutare la relazione tra le accelerazioni del punto materiale P misurate rispetto ai due diversi sistemi di riferimento deriviamo ambo i membri della relazione (3.15):

$$\begin{aligned}
&\frac{dv_x{}'}{dt}\hat{x}' + \frac{dv_y{}'}{dt}\hat{y}' + \frac{dv_z{}'}{dt}\hat{z}' + v_x{}'\frac{d\hat{x}'}{dt} + v_y{}'\frac{d\hat{y}'}{dt} + v_z{}'\frac{d\hat{z}'}{dt} + \frac{d\vec{\omega}}{dt}\times\left(x'\hat{x}' + y'\hat{y}' + z'\hat{z}'\right) + \\
&\qquad + \vec{\omega}\times\left(\frac{dx'}{dt}\hat{x}' + \frac{dy'}{dt}\hat{y}' + \frac{dz'}{dt}\hat{z}'\right) + \vec{\omega}\times\left(x'\frac{d\hat{x}'}{dt} + y'\frac{d\hat{y}'}{dt} + z'\frac{d\hat{z}'}{dt}\right) = \\
&\qquad = \left(\frac{dv_x}{dt} - \frac{dV_x}{dt}\right)\hat{x} + \left(\frac{dv_y}{dt} - \frac{dV_y}{dt}\right)\hat{y} + \left(\frac{dv_z}{dt} - \frac{dV_z}{dt}\right)\hat{z},
\end{aligned}$$

sfruttando quindi la (2.28) per valutare la derivata dei versori del sistema con origine in O', si ha:

$$\begin{aligned}
&a_x{}'\hat{x}' + a_y{}'\hat{y}' + a_z{}'\hat{z}' + \vec{\omega}\times\left(v_x{}'\hat{x}' + v_y{}'\hat{y}' + v_z{}'\hat{z}'\right) + \vec{\alpha}\times\left(x'\hat{x}' + y'\hat{y}' + z'\hat{z}'\right) + \\
&\qquad + \vec{\omega}\times\left(v_x{}'\hat{x}' + v_y{}'\hat{y}' + v_z{}'\hat{z}'\right) + \vec{\omega}\times\left[\vec{\omega}\times\left(x'\hat{x}' + y'\hat{y}' + z'\hat{z}'\right)\right] = \\
&\qquad = \left(a_x - A_x\right)\hat{x} + \left(a_y - A_y\right)\hat{y} + \left(a_z - A_z\right)\hat{z},
\end{aligned}$$

relazione che può sintetizzarsi come:

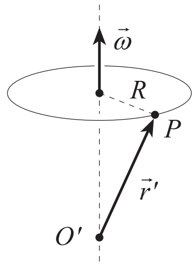
$$\vec{a}' + \vec{\omega}\times\vec{v}' + \vec{\alpha}\times\vec{r}' + \vec{\omega}\times\vec{v}' + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'\right) = \vec{a} - \vec{A},$$

da cui segue:

$$\vec{a}' = \vec{a} - \left[\vec{A} + \vec{\alpha}\times\vec{r}' + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'\right)\right] - 2\vec{\omega}\times\vec{v}', \tag{3.17}$$

dove $\vec{a}'$ è l'accelerazione del punto *P* rispetto al sistema con origine in O', $\vec{a}$ l'accelerazione di *P* rispetto al sistema con origine in *O* e

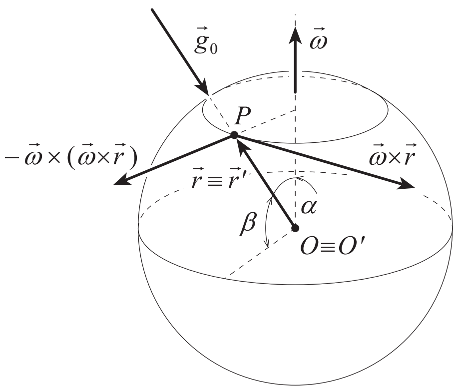
$$\vec{a}_t \equiv \vec{A} + \vec{\alpha}\times\vec{r}' + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'\right),$$



detta *accelerazione di trascinamento*, è l'accelerazione con cui si muove rispetto al sistema con origine in *O* il punto solidale col sistema mobile che, nell'istante considerato è situato nella posizione occupata da *P*; l'accelerazione di trascinamento è costituita da tre termini: l'accelerazione $\vec{A}$ dell'origine O' rispetto a *O*; l'accelerazione tangenziale $\vec{\alpha}\times\vec{r}'$ del moto circolare descritto dall'estremo libero del vettore $\vec{r}'$; l'accelerazione radiale o centripeta $\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}'\right)$ sempre del moto circolare descritto dall'estremo libero del vettore $\vec{r}'$. Infine

$$\vec{a}_c \equiv 2\vec{\omega}\times\vec{v}' \tag{3.18}$$

è detta *accelerazione di Coriolis* o *accelerazione complementare* e dipende dal moto di *P* nel sistema con origine in O' annullandosi, in particolare, se $\vec{v}' = \vec{0}$, cioè se il punto *P* è a riposo rispetto a O', o se i vettori $\vec{v}'$ e $\vec{\omega}$ sono tra loro paralleli.



Esempio: (*Accelerazione efficace di gravità*) La velocità angolare della Terra vale[1] $7.27\times10^{-5}\,rad/s$ e la sua direzione coincide con l'asse terrestre. Sia $\vec{g}_0$ l'accelerazione di gravità che si misurerebbe in corrispondenza di un punto *P* della superficie terrestre qualora la Terra non fosse in rotazione; dalla (3.17) l'accelerazione misurata da un osservatore solidale con la Terra è:

$$\vec{a}' = \vec{g}_0 - \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right) - 2\vec{\omega}\times\vec{v}',$$

in quanto le origini dei due sistemi, *O* e O', coincidono e $\vec{r}' \equiv \vec{r}$ e inoltre il moto rotatorio è uniforme. Supponiamo che il moto del punto rispetto alla superficie terrestre avvenga molto lentamente o affatto, in moto da poter trascurare l'accelerazione di Coriolis. In questo caso, l'accelerazione misurata nel sistema solidale alla Terra è detta *accelerazione efficace* di gravità $\vec{g}$, così:

$$\vec{g} = \vec{g}_0 - \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right).$$

Il termine $-\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)$ è detto *accelerazione centrifuga*, essendo diretta verso l'esterno. Supponendo che $\vec{g}_0$ sia diretta verticalmente[2], per effetto dell'accelerazione centrifuga la direzione di $\vec{g}$ devia lievemente dalla direzione radiale. L'accelerazione centrifuga è massima all'equatore e diminuisce spostandosi verso i poli, essendo il suo modulo pari a:

$$\left|\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)\right| = \omega^2 R\sin\alpha = \omega^2 R\cos\beta,$$

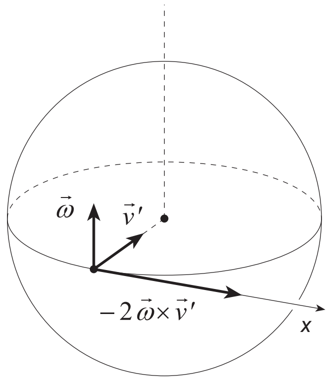
[1] La Terra descrive una rotazione completa in media in 24 ore, cioè in $86400\,s$, pertanto dalla relazione (2.33) la frequenza di rotazione vale $1.16\times10^{-5}\,Hz$ che, dalla (2.34) corrisponde alla velocità angolare indicata.

[2] La direzione del vettore $\vec{g}_0$ può localmente differire da quella verticale per effetto di disomogenie della distribuzione delle masse all'interno della Terra

dove R è il raggio terrestre pari a $6.37\times10^6\, m$ circa, α è l'angolo compreso tra $\vec{r}$ e $\vec{\omega}$ e $\beta\equiv 90°-\alpha$ è la latitudine; in particolare, all'equatore $\beta\equiv 0°$ e:

$$\left|\vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times\vec{r}\right)\right| = \omega^2 R \approx 3.30\times10^{-2}\, m/s^2 \,.$$

Pertanto l'accelerazione efficace di gravità aumenta spostandosi dall'equatore verso i poli.



Esempio: (*Deviazione di un corpo in caduta libera dovuta all'accelerazione di Coriolis, all'equatore*) All'equatore il vettore velocità $\vec{v}'$ di un corpo che cade forma un angolo di $90°$ con la direzione di $\vec{\omega}$, per cui dalla (3.18) il modulo dell'accelerazione di Coriolis vale:

$$a_c = \left|-2\vec{\omega}\times\vec{v}'\right| = 2\omega v'.$$

Considerando un sistema di riferimento in cui l'asse x è orientato come il vettore $\vec{a}_c$ $\left(\hat{x}\equiv\vec{a}_c/a_c\right)$, l'accelerazione del corpo in caduta lungo questo asse vale:

$$a_x = 2\omega v',$$

dove la velocità v' vale $g\,t$; pertanto sostituendo si trova:

$$a_x = 2\omega g t.$$

Integrando questa equazione nell'ipotesi che la velocità iniziale v_{x0} lungo la direzione di $\vec{a}_c$ sia nulla, si trova:

$$v_x = v_{x0} + \int_0^t a_x\, d\zeta = \int_0^t 2g\omega\zeta\, d\zeta = g\omega t^2,$$

e integrando questa equazione considerando che all'istante iniziale il corpo si trovi sulla perpendicolare al punto di caduta e quindi x_0 è nullo, si ha:

$$x = x_0 + \int_0^t v_x\, d\zeta = \int_0^t g\omega\zeta^2\, d\zeta = \frac{1}{3} g\omega t^3$$

Siccome l'altezza di caduta h può esprimersi come

$$h = \frac{1}{2} g t^2,$$

eliminando il tempo tra queste due ultime espressioni si trova:

$$x = \frac{1}{3}\omega\sqrt{\frac{8h^3}{g}} \approx \frac{1.53\times10^{-2}}{\sqrt{m}} h^{3/2}.$$

Così, ad esempio, per un corpo che cade da un'altezza di $100\, m$ si ha una deviazione x rispetto alla verticale di $1.53\, cm$.