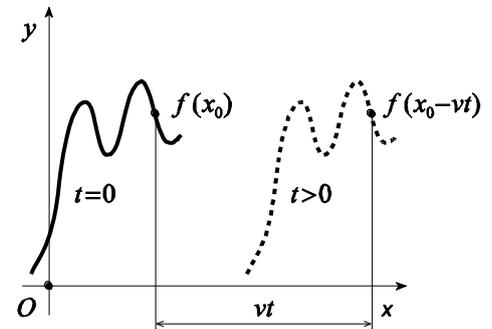


8 ONDE ELETTROMAGNETICHE

8.1 Equazione delle onde

Per onda si intende una perturbazione in moto attraverso lo spazio con una certa velocità; in un caso ideale la propagazione non altera l'ampiezza e la forma della perturbazione. Allo scopo di poter descrivere il meccanismo della propagazione ondosa iniziamo ad analizzare la modalità di rappresentazione di un'onda. Consideriamo una certa funzione $y = f(x)$ di una variabile spaziale x rappresentata per $t = 0$. Supponiamo che ad un tempo successivo, $t > 0$, la funzione sia traslata nel verso positivo delle x mantenendo inalterata la sua forma; se \bar{v} è la velocità con la quale si è spostata, allora al tempo $t > 0$ la funzione $y = f(x)$ sarà rappresentata come $y = f(x - vt)$. Se in luogo di $x - vt$ l'ascissa fosse stata $x + vt$ si sarebbe descritta un'onda in moto nel verso negativo delle x . Pertanto un'onda che procede nel verso positivo delle x , detta *onda progressiva*, o un'onda che procede nel verso negativo delle x , detta *onda regressiva*, vengono descritte attraverso la funzione:



$$y = f(x \pm vt);$$

in generale un moto ondoso è una combinazione di onde progressive e regressive, così la sua descrizione completa si ha attraverso la funzione:

$$y = f_1(x - vt) + f_2(x + vt).$$

Consideriamo un'onda unidimensionale in moto lungo l'asse x ; sia $\psi(x, t)$ una certa proprietà dell'onda in questione, ad esempio l'elongazione trasversale di una corda, nel caso di un'onda che si propaga lungo una corda o una componente del campo elettrico, nel caso di un'onda elettromagnetica. Alla luce di quanto appena visto, si può scrivere:

$$\psi(x, t) = \psi(x \pm vt).$$

La funzione $\psi(x, t)$ così definita è soluzione di una particolare equazione differenziale alle derivate parziali detta *equazione delle onde* (unidimensionale), dedotta da Jean Baptiste Le Rond D'Alembert nel 1747 nella descrizione delle piccole oscillazioni di una corda omogenea:

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (8.1)$$

per verificare questa caratteristica poniamo:

$$\xi(x, t) \equiv x \pm vt,$$

allora la derivata prima di $\psi(x, t)$ rispetto al tempo è:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial \xi}{\partial t} \frac{d\psi}{d\xi} = \pm v \frac{d\psi}{d\xi};$$

per determinare la derivata seconda di $\psi(x, t)$ rispetto al tempo, osserviamo che dalla relazione precedente segue l'identità formale:

$$\frac{\partial}{\partial t} \equiv \pm v \frac{d}{d\xi}, \quad (8.2)$$

così:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \psi}{\partial t} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\pm v \frac{d\psi}{d\xi} \right) = \pm v \frac{d}{d\xi} \left(\pm v \frac{d\psi}{d\xi} \right) = v^2 \frac{d^2 \psi}{d\xi^2}. \quad (8.3)$$

D'altra parte, la derivata prima di $\psi(x, t)$ rispetto a x vale:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{d\psi}{d\xi} = \frac{d\psi}{d\xi},$$

quindi, in questo caso vale l'identità:

$$\frac{\partial}{\partial x} \equiv \frac{d}{d\xi}, \quad (8.4)$$

pertanto la derivata seconda di $\psi(x, t)$ rispetto a x vale:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{d\psi}{d\xi} \right) = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{d\psi}{d\xi} \right) = \frac{d^2 \psi}{d\xi^2}; \quad (8.5)$$

così, confrontando la (8.3) con la (8.5), si ha:

$$\frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial t^2} = v^2 \frac{d^2 \psi}{d\xi^2} = v^2 \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2}.$$

Concludiamo quindi che l'equazione (8.1) descrive una propagazione ondosa e, in virtù della sua linearità, ammette come soluzione generale la funzione:

$$\psi(x, t) = \psi_1(x - vt) + \psi_2(x + vt).$$

Nella maggior parte dei fenomeni fisici la propagazione ondosa è un fenomeno che si esplica in tre dimensioni (o due, come nel caso delle onde su di un liquido o sulla superficie di una membrana);

in tali circostanze ψ dipende da tutte e le tre coordinate spaziali oltre che dal tempo e l'equazione corrispondente è:

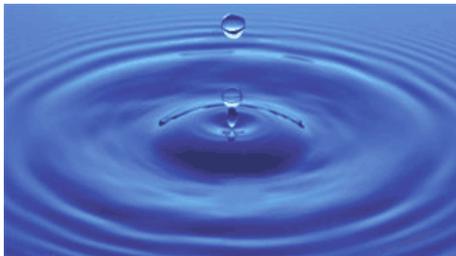
$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0,$$

che, definito un operatore:

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

si esprime nella forma:

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = 0.$$



Formazione di onde circolari sulla superficie dell'acqua.

E' possibile caratterizzare una generica onda attraverso il concetto di *fronte d'onda*. Questo ente rappresenta il luogo dei punti in cui, ad un fissato istante, la variabile ξ precedentemente introdotta assume lo stesso valore. Un'onda bidimensionale si dice, ad esempio, *rettilinea* o *circolare*, se i suoi fronti d'onda sono rettilinei o circolari. Analogamente un'onda tridimensionale si dice *piana* se i suoi fronti d'onda, che per ogni onda tridimensionale sono rappresentati da superfici, sono piani; si dice *sferica* un'onda i cui fronti sono superfici sferiche.

Esempio: Se si considera come onda nello spazio, la funzione ψ appena introdotta, ovvero $\psi(x, y, z, t) = \psi(\xi) = \psi(x \pm vt)$, rappresenta un'onda piana poiché, essendo l'argomento ξ indipendente da y e da z , fissati che siano x e t , ψ assume lo stesso valore su tutto il piano perpendicolare all'asse x passante per il valore di x considerato.

L'espressione $\psi(x \pm vt)$ per la descrizione di un'onda piana che si propaga lungo la direzione dell'asse x può essere generalizzata per una direzione definita attraverso un vettore \hat{k} sostituendo in luogo della variabile x il prodotto $\vec{r} \cdot \hat{k}$, in cui \vec{r} indica il raggio vettore che spicca dall'origine del sistema di riferimento e punta nella posizione in cui si misura ψ . La funzione del tipo $\psi(x \pm vt)$ si generalizza, pertanto, come $\psi(\vec{r} \cdot \hat{k} \pm vt)$.

8.2 Onde armoniche

Quando $\psi(\xi)$ è una funzione periodica del suo argomento, l'onda corrispondente è detta *periodica*. In particolare sono periodiche le onde *armoniche* o sinusoidali così definite:

$$\psi(x, t) = A \cos[k(x - vt)],$$



Jean Baptiste Le Rond D'Alembert

dove, senza perdita di generalità si è considerata un'onda progressiva. Si osservi che l'argomento della funzione coseno è stato espresso come $k(x-vt)$ in modo tale da risultare adimensionale.

Per verificare che tale funzione soddisfa l'equazione delle onde (8.1) eseguiamo prima le derivate di ψ rispetto alla variabile x :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial x} &= -kA \sin[k(x-vt)], \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= -k^2 A \cos[k(x-vt)]\end{aligned}\quad (8.6)$$

e poi le derivate rispetto a t :

$$\begin{aligned}\frac{\partial \psi}{\partial t} &= kvA \sin[k(x-vt)], \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} &= -k^2 v^2 A \cos[k(x-vt)]\end{aligned}\quad (8.7)$$

quindi, confrontando la (8.6) con la (8.7), segue:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = v^2 \{-k^2 A \cos[k(x-vt)]\} = v^2 \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}.$$

Naturalmente anche qualora l'argomento della funzione coseno fosse differente da $k(x-vt)$ per una fase arbitraria, la corrispondente funzione $\psi(x, t)$ risulterebbe soluzione dell'equazione delle onde, così anche funzioni affini al coseno, come il seno, rappresentano moti ondosi. Sviluppando l'argomento di $\psi(x, t)$ è possibile equivalentemente scrivere tale funzione come:

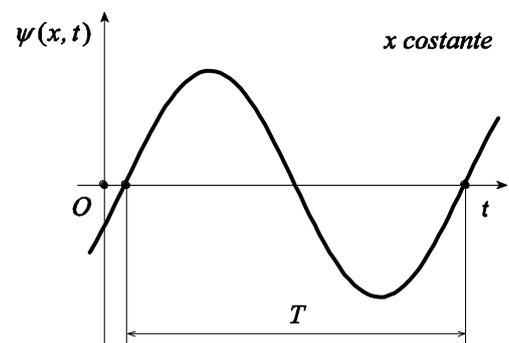
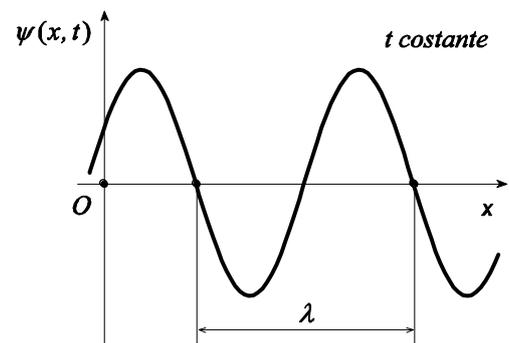
$$\psi(x, t) = A \cos(kx - \omega t),$$

dove ω prende il nome di *pulsazione* dell'onda ed è legata alla velocità v attraverso il *numero d'onda* k :

$$v = \frac{\omega}{k}. \quad (8.8)$$

Un'onda armonica di pulsazione definita è detta *monocromatica*. La velocità v , che rappresenta la velocità di un qualunque fronte d'onda, indica la velocità con cui si sposta la fase dell'onda e pertanto è comunemente detta *velocità di fase*. Dalla definizione del suo argomento $\xi = x - vt$, un'onda periodica, come d'altra parte risulta evidente per un'onda armonica, fissato t è periodica nella variabile x e fissato x è periodica nella variabile t . Il periodo spaziale λ prende il nome di *lunghezza d'onda* e risulta:

$$\lambda \equiv \frac{2\pi}{k} \quad (8.9)$$



mentre il periodo temporale T è:

$$T \equiv \frac{2\pi}{\omega}, \quad (8.10)$$

così, dalla (8.8) segue che tra queste due grandezze vale la relazione:

$$v = \frac{\omega}{k} = \frac{\frac{2\pi}{T}}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{\lambda}{T}. \quad (8.11)$$

Per la descrizione di un'onda armonica che si propaga in una generica direzione indicata dal vettore \hat{k} , al numero d'onda si associa un vettore

$$\vec{k} \equiv k \hat{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \hat{k} \quad (8.12)$$

che prende il nome di *vettore d'onda* e l'onda armonica che si propaga lungo tale direzione \hat{k} si esprime di conseguenza come:

$$\psi(x, t) = A \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} \pm \omega t). \quad (8.13)$$

8.3 Onde elettromagnetiche

Nel 1858 Kirchhoff, a partire dalla teoria sull'elettromagnetismo formulata da Wilhelm Weber tra il 1846 e il 1848, dedusse teoricamente che la velocità di propagazione dell'induzione in un conduttore a resistenza nulla è prossima a quella della luce nel vuoto. Weber nel 1864 verificò sperimentalmente tale risultato ipotizzando l'esistenza di una qualche relazione tra la velocità di propagazione delle onde elettriche e quella della luce. Nello stesso anno, nell'ambito del suo trattato sull'elettromagnetismo, Maxwell formulò una teoria elettromagnetica della luce deducendo dalle sue equazioni che i fenomeni elettrici e magnetici si propagano nel vuoto con la medesima velocità della luce e concludendo che la luce ha natura elettromagnetica.

Consideriamo le espressioni delle equazioni di Maxwell in forma differenziale, nel vuoto ed in assenza di sorgenti:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0, \quad (8.14)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (8.15)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (8.16)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \quad (8.17)$$

in coordinate cartesiane tali equazioni si scrivono:

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0; \quad (8.18)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0; \quad (8.19)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}, \quad (8.20)$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}, \quad (8.21)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}; \quad (8.22)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}, \quad (8.23)$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}, \quad (8.24)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}; \quad (8.25)$$

per semplicità cerchiamo soluzioni di queste equazioni in cui il campo elettrico è diretto lungo l'asse y e il campo magnetico è diretto lungo z :

$$\begin{aligned} \vec{E} &= E_y \hat{y}, \\ \vec{B} &= B_z \hat{z}. \end{aligned} \quad (8.26)$$

Poiché E_x , E_z e B_x , B_y sono nulli, l'equazione (8.18) e l'equazione (8.19), si scrivono:

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = 0, \quad (8.27)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = 0; \quad (8.28)$$

mentre la (8.21) non fornisce alcun contributo, la (8.20) e la (8.22) diventano:

$$\frac{\partial E_y}{\partial z} = 0, \quad (8.29)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}; \quad (8.30)$$

infine, l'equazione (8.25) non fornisce contributo, mentre la (8.23) e la (8.24) si scrivono:

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} = 0, \quad (8.31)$$

$$-\frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}. \quad (8.32)$$

Analizziamo in dettaglio le conseguenze di queste equazioni. Dalle relazioni (8.27), (8.29) e (8.30) concludiamo che il campo elettrico non cambia nel piano yz , mentre varia lungo l'asse x se è presente un campo magnetico dipendente dal tempo. Dalle relazioni (8.28), (8.31) e (8.32) segue che anche il campo magnetico resta inalterato sul piano yz , ma varia lungo l'asse x se è presente un campo elettrico dipendente dal tempo. Deriviamo rispetto alla coordinata x ambo i membri dell'equazione (8.30):

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 B_z}{\partial x \partial t},$$

e, analogamente, deriviamo ambo i membri dell'equazione (8.32) rispetto al tempo:

$$-\frac{\partial^2 B_z}{\partial t \partial x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2};$$

confrontando queste due equazioni, siccome $\partial^2 B_z / \partial x \partial t$ è uguale a $\partial^2 B_z / \partial t \partial x$, si ha:

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = 0.$$

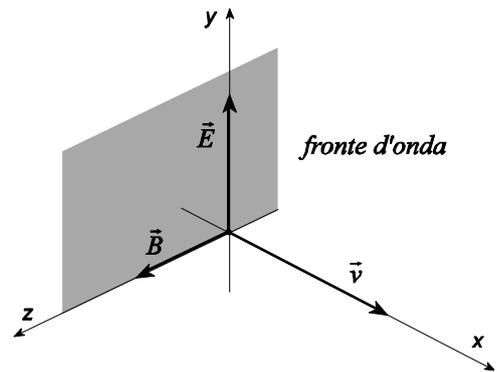
Procedendo analogamente per il campo magnetico si trova:

$$\frac{\partial^2 B_z}{\partial x^2} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 B_z}{\partial t^2} = 0.$$

Dal fatto che entrambi i campi soddisfano l'equazione delle onde (8.1), Maxwell dedusse che il suo insieme di equazioni ammette quali soluzioni delle onde *trasversali*, ossia tali che il campo elettrico e quello magnetico oscillano su piani perpendicolari all'asse x , che rappresenta la direzione di propagazione. Siccome i campi elettrico e magnetico non variano su piani perpendicolari alla direzione di propagazione (equazioni (8.27), (8.29) per il campo elettrico e (8.28), (8.31) per il campo magnetico), l'onda descritta è piana. Si osservi, infine, che la scelta di assumere i campi orientati in direzioni fisse, condizioni per le quali si dice che

l'onda possiede *polarizzazione lineare* (in questo caso \vec{E} è polarizzato lungo la direzione y , si veda il paragrafo 8.11), non deve ritenersi lesiva della generalità dello studio in quanto la più generale delle onde che si propaga lungo l'asse x può essere ottenuta come la sovrapposizione di un'onda polarizzata lungo l'asse y e l'altra polarizzata lungo l'asse z . Pertanto possiamo generalizzare le equazioni soddisfatte dai campi come:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial x^2} - \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0,$$



$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0,$$

dove ciascuna equazione corrisponde a tre equazioni scalari. In figura sono mostrate le soluzioni di tipo armonico delle equazioni d'onda. Per confronto con l'equazione delle onde (8.1), la velocità di propagazione dell'onda elettromagnetica nel vuoto vale:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

Se a μ_0 si sostituisce il suo valore di $1.256 \times 10^{-6} \text{ H/m}$ ed a ε_0 il suo valore di $8.854 \times 10^{-12} \text{ F/m}$, si trova:

$$c \approx 2.998 \times 10^8 \text{ m/s};$$

l'identità tra il valore di questa velocità e quello della luce nel vuoto, confermata da ulteriori verifiche sperimentali, consente di concludere che la luce è un'onda elettromagnetica. Nel caso di propagazione in un mezzo materiale di costante dielettrica relativa ε_r e permeabilità magnetica relativa μ_r , la velocità dell'onda si esprime come:

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \mu_0 \varepsilon_r \varepsilon_0}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}}, \quad (8.33)$$

posto quindi:

$$n \equiv \sqrt{\mu_r \varepsilon_r}, \quad (8.34)$$

la velocità dell'onda nel mezzo materiale si scrive:

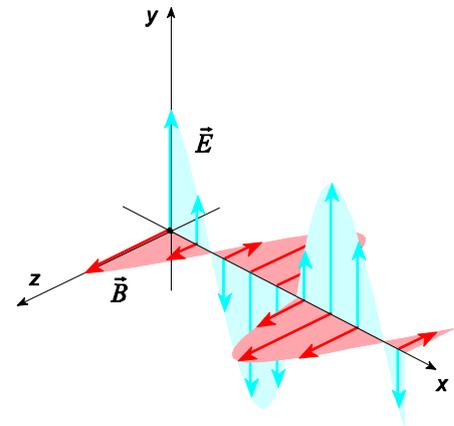
$$v = \frac{c}{n}, \quad (8.35)$$

in cui n prende il nome di *indice di rifrazione* del mezzo considerato. L'ipotesi che la velocità di propagazione della luce fosse correlata alla costante dielettrica del mezzo, fu avanzata nel 1846 da Faraday.

Siccome i campi E_y e B_z descrivono una propagazione ondosa lungo l'asse x , il loro argomento può essere espresso facendo uso della funzione $\xi = x \pm vt$:

$$\begin{aligned} E_y &= E_y(\xi) = E_y(x \pm vt), \\ B_z &= B_z(\xi) = B_z(x \pm vt), \end{aligned}$$

adoperando tale funzione, dalla (8.4) segue che la derivata di E_y rispetto a x vale:



$$\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{dE_y}{d\xi},$$

mentre, dalla (8.2) la derivata rispetto al tempo di B_z vale:

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = \pm v \frac{dB_z}{d\xi},$$

così, dalla (8.30) segue:

$$\frac{dE_y}{d\xi} = \mp v \frac{dB_z}{d\xi},$$

col segno positivo o negativo, rispettivamente, se l'onda è progressiva o regressiva. Questa relazione è una semplice equazione differenziale del primo ordine che, risolta per integrazione diretta, fornisce come risultato $E_y = \mp v B_z + cost$, dove la costante può essere posta uguale a zero; così risulta quindi:

$$\frac{E_y}{B_z} = \mp v.$$

Per le scelte fatte, il rapporto E_y/B_z coincide col rapporto delle intensità dei campi elettrico e magnetico inoltre, tenuto conto delle direzioni relative dei vettori \vec{E} , \vec{B} e \vec{v} , possiamo scrivere:

$$\vec{E} = \vec{B} \times \vec{v}, \quad (8.36)$$

$$\frac{E}{B} = v. \quad (8.37)$$

Solitamente nel rapporto tra le intensità dei campi si fa uso del vettore \vec{H} , pari a \vec{B}/μ :

$$\frac{E}{H} = \mu \frac{E}{B} = \mu v = \mu \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \equiv Z; \quad (8.38)$$

la quantità Z così definita ha le dimensioni di un'impedenza e viene detta, infatti, *impedenza caratteristica* del mezzo materiale in cui si propaga l'onda; in particolare nel vuoto ϵ_r e μ_r sono entrambi unitari e così:

$$Z_0 \equiv \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \approx 377 \Omega. \quad (8.39)$$

L'impedenza caratteristica Z può essere espressa attraverso l'impedenza Z_0 facendo uso dell'indice di rifrazione definito nella relazione (8.34) come:

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\varepsilon_0 \varepsilon_r}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}} = Z_0 \sqrt{\frac{\mu_r^2}{\mu_r \varepsilon_r}} = Z_0 \frac{\mu_r}{\sqrt{\mu_r \varepsilon_r}} = Z_0 \frac{\mu_r}{n}.$$

Infine, nel vuoto v è uguale alla velocità della luce c , così risulta:

$$E = cB;$$

questa relazione suggerisce che, siccome c ha un valore molto grande, gli effetti prodotti da un'onda elettromagnetica nel vuoto (ma anche nell'aria, visto che in tale caso $v \approx c$) sono sostanzialmente di natura elettrica.

Esempio: Un'onda elettromagnetica piana nel vuoto, il cui campo elettrico assume un valore massimo di 6 V/m , sarà caratterizzata da un campo magnetico il cui valore massimo è di circa 20 nT (si confronti col campo magnetico medio prodotto dalla Terra che, alla superficie è di circa $50 \mu\text{T}$, ossia 2500 volte maggiore). Per tale motivo nella descrizione di un'onda elettromagnetica ci si riferisce comunemente al suo campo elettrico; ad esempio, per l'onda elettromagnetica rappresentata nella figura precedente, il piano di polarizzazione, xy , è quello in cui oscilla il campo elettrico.

L'espressione generale dell'equazione delle onde per i campi elettrico e magnetico si ottiene a partire dalle relazioni (8.16) e (8.17). Applicando il rotore ad ambo i membri della (8.16), risulta:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = \vec{\nabla} \times \left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial (\vec{\nabla} \times \vec{B})}{\partial t},$$

siccome si può esprimere il primo membro di tale identità, $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E})$, come $\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}$, sviluppando ambo i membri e facendo uso della relazione (8.17) si ha:

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2};$$

utilizzando infine la (8.14) segue:

$$\nabla^2 \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}. \quad (8.40)$$

Procedendo in maniera analoga con l'espressione (8.17) segue:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{B}) = \vec{\nabla} \times \left(\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial (\vec{\nabla} \times \vec{E})}{\partial t}.$$

Sviluppando ambo i membri e adoperando la (8.16) si ottiene:

$$\vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{B}) - \nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial (\vec{\nabla} \times \vec{E})}{\partial t} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2};$$

infine, facendo uso della relazione (8.15) si ha:

$$\nabla^2 \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}. \quad (8.41)$$

Le espressioni (8.40) e (8.41) rappresentano 6 equazioni delle onde per le corrispondenti componenti del campo elettrico e del campo magnetico.

Esempio: (*Potenziali ritardati*) Nella trasformazione di gauge (6.39):

$$\begin{cases} \vec{A}' \equiv \vec{A} + \vec{\nabla} \phi, \\ V' \equiv V - \frac{\partial \phi}{\partial t}, \end{cases}$$

è possibile scegliere la funzione ϕ in modo che i potenziali \vec{A} e V soddisfino la condizione, detta *gauge di Lorenz*:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} + \epsilon \mu \frac{\partial V}{\partial t} = 0.$$

Consideriamo la coppia di equazioni (6.39):

$$\begin{cases} \nabla^2 V + \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} \cdot \vec{A} = -\frac{\rho}{\epsilon}, \\ \nabla^2 \vec{A} - \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \mu \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \vec{\nabla} V - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J}, \end{cases}$$

utilizzando la condizione precedente, si ottiene:

$$\begin{cases} \nabla^2 V - \mu \epsilon \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon}, \\ \nabla^2 \vec{A} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = -\mu \vec{J}. \end{cases}$$

Si noti che nel caso stazionario, in cui i potenziali sono indipendenti dal tempo, si riottengono, rispettivamente, le relazioni (1.23) e (4.37). Se le sorgenti sono localizzate in una regione limitata dello spazio, si prova che tali relazioni ammettono delle soluzioni che costituiscono la generalizzazione delle soluzioni (1.16) e (4.38) delle equazioni (1.23) e (4.37):

$$\begin{aligned} \vec{A}(\vec{r}, t) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\mathcal{V}'} \frac{\vec{J}\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{v}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv', \\ V(\vec{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}'} \frac{\rho\left(\vec{r}', t - \frac{|\vec{r} - \vec{r}'|}{v}\right)}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dv', \end{aligned} \tag{8.42}$$

in cui i potenziali sono calcolati in corrispondenza della posizione \vec{r} mentre le sorgenti sono situate alle posizioni \vec{r}' all'interno del volume \mathcal{V}' ; v rappresenta la velocità di propagazione dell'onda elettromagnetica (8.33) all'interno del materiale considerato. Si osservi che nel calcolo di tali potenziali le espressioni delle densità di corrente e di carica sono stabilite ad un tempo ritardato rispetto a t del tempo $|\vec{r} - \vec{r}'|/v$ necessario affinché l'onda elettromagnetica percorra la distanza $|\vec{r} - \vec{r}'|$ tra la posizione \vec{r}' delle sorgenti e \vec{r} , in cui viene stabilito il valore del potenziale, per tale motivo le espressioni (8.42) sono dette *potenziali ritardati*.

8.4 Energia di un'onda elettromagnetica

L'esistenza simultanea del campo elettrico e del campo magnetico corrispondenti ad un'onda elettromagnetica comporta che all'onda si associ un'energia. In un mezzo omogeneo di costante dielettrica ε e permeabilità magnetica μ le densità di energia associate a ciascun campo sono rispettivamente:

$$u_e = \frac{1}{2} \varepsilon E^2,$$

$$u_m = \frac{1}{2\mu} B^2;$$

proveremo nel seguito che sia qualora i campi siano statici che variabili, la densità complessiva di energia all'onda elettromagnetica può esprimersi attraverso la somma:

$$u = u_e + u_m = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2\mu} B^2. \quad (8.43)$$

D'altra parte per un'onda piana che si propaga con velocità \vec{v} , di intensità pari a $1/\sqrt{\mu\varepsilon}$, il modulo del campo magnetico può esprimersi attraverso il modulo del campo elettrico tramite la relazione (8.37), per cui:

$$u = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2\mu} B^2 = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2\mu} \frac{E^2}{v^2} = \frac{1}{2} \varepsilon E^2 + \frac{1}{2} \varepsilon E^2 = \varepsilon E^2.$$

Sebbene ricavato per le sole onde piane, questo risultato vale in generale per tutte le onde elettromagnetiche; quindi in un'onda elettromagnetica la densità di energia è equamente ripartita tra campo elettrico e campo magnetico. Consideriamo un elemento di superficie ds il cui versore normale \hat{n} forma un angolo ϑ con la direzione di propagazione di un'onda elettromagnetica, definita attraverso il vettore velocità \vec{v} . Durante il tempo dt la superficie ds è attraversata da tutta l'energia dU contenuta nel volume dV del cilindro di area di base $\cos \vartheta ds$ e altezza $v dt$, cioè:

$$dU = u dV = u ds \cos \vartheta v dt = \varepsilon E^2 v \cos \vartheta ds dt$$

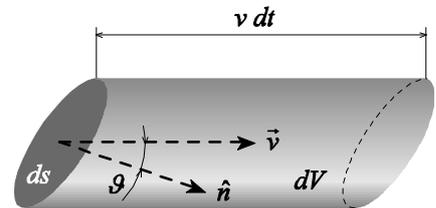
così, la potenza che attraversa ds è:

$$dP = d \left(\frac{dU}{dt} \right) = \varepsilon E^2 v \cos \vartheta ds.$$

Definiamo un vettore \vec{S} come:

$$\vec{S} \equiv \varepsilon E^2 \vec{v},$$

tale che il suo flusso attraverso la superficie ds fornisce la potenza istantanea attraverso ds :



$$dP = \vec{S} \cdot d\vec{s} = \vec{S} \cdot \hat{n} ds = \varepsilon E^2 v \cos \vartheta ds .$$

Questo vettore può essere riscritto come:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B} , \quad (8.44)$$

infatti, per un'onda piana, i campi \vec{E} e \vec{B} oscillano perpendicolarmente tra loro ed alla direzione di propagazione definita dal vettore \vec{v} , inoltre, facendo sempre uso della (8.37), risulta:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu} EB \frac{\vec{v}}{v} = \frac{1}{\mu} E \frac{E \vec{v}}{v} = \frac{1}{\mu} \frac{1}{v^2} E^2 \vec{v} = \frac{1}{\mu} \mu \varepsilon E^2 \vec{v} = \varepsilon E^2 \vec{v} .$$

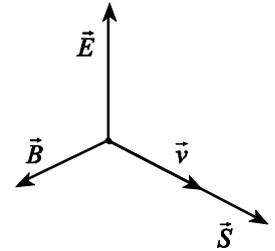
Anche questa identità tra $\varepsilon E^2 \vec{v}$ e $(\vec{E} \times \vec{B})/\mu$ vale, in generale, per tutte le onde elettromagnetiche. Adoperando la relazione (8.44), la potenza istantanea attraverso l'elemento $d\vec{s}$ si scrive:

$$dP = \frac{1}{\mu} (\vec{E} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} ,$$

per cui, integrando su di una superficie finita S , la potenza istantanea che la attraversa corrisponde al flusso di \vec{S} attraverso tale superficie:

$$P = \int_S \vec{S} \cdot d\vec{s} = \int_S \frac{1}{\mu} (\vec{E} \times \vec{B}) \cdot d\vec{s} . \quad (8.45)$$

Il vettore \vec{S} introdotto nel 1883 da John Henry Poynting per rappresentare la propagazione dell'energia elettromagnetica, prende il nome di *vettore di Poynting* ed è caratterizzato dall'aver la direzione ed il verso coincidenti con quelli della velocità di propagazione dell'onda, mentre il suo modulo è pari all'energia elettromagnetica associata all'onda che per unità di tempo attraversa l'unità di superficie ortogonale alla direzione di propagazione. Dimensionalmente \vec{S} si esprime in W/m^2 .



8.5 Intensità di un'onda elettromagnetica

Consideriamo un'onda piana, armonica, polarizzata linearmente; il campo elettrico nel piano di polarizzazione ha intensità:

$$E = E_0 \cos(kx - \omega t)$$

ed il corrispondente vettore di Poynting ha modulo:

$$S = \varepsilon E^2 v = \varepsilon v E_0^2 \cos^2(kx - \omega t) .$$

Considerata una superficie \mathcal{S} , tramite la relazione (8.45) è possibile stabilire la potenza istantanea che attraversa la superficie specificata. Tale grandezza risulta, tuttavia, di scarso valore pratico in quanto gli strumenti di misura non sono generalmente in grado di apprezzare variazioni troppo rapide dell'energia; si tenga conto che, ad esempio la pulsazione della luce visibile è dell'ordine di 10^{15} rad/s . Pertanto è più utile determinare il valor medio del vettore \vec{S} calcolato in un periodo T dato dalla (8.10):

$$\langle S \rangle = \varepsilon v \langle E^2 \rangle = \varepsilon v \frac{1}{T} \int_0^T E_0^2 \cos^2(kx - \omega t) dt = \frac{1}{2} \varepsilon v E_0^2. \quad (8.46)$$

Il valor medio dell'energia che attraversa una sezione ortogonale alla direzione di propagazione, per unità di tempo e per unità di area è detto *intensità* dell'energia; così, siccome per una grandezza variabile sinusoidalmente il valore efficace è pari all'ampiezza della grandezza diviso $\sqrt{2}$, allora:

$$I \equiv \langle S \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon v E_0^2 = \varepsilon v E_{\text{eff}}^2;$$

inoltre, dalla relazione (8.38) segue che $\varepsilon v = \varepsilon / \sqrt{\varepsilon \mu} = \sqrt{\varepsilon / \mu} = 1/Z$, pertanto

$$I = \varepsilon v E_{\text{eff}}^2 = \frac{E_{\text{eff}}^2}{Z}.$$

Infine, siccome è possibile esprimere l'impedenza caratteristica Z del mezzo materiale attraverso l'impedenza caratteristica del vuoto Z_0 introdotta nella (8.39) e l'indice di rifrazione n definito tramite la relazione (8.34), come Z_0/n , allora, sostituendo nella precedente equazione, si ha:

$$I = \frac{1}{\mu_r} \frac{n E_{\text{eff}}^2}{Z_0}.$$

Esempio: Un laser (acronimo di *Light Amplification by Stimulated Emission of Radiation*) è una sorgente di onde elettromagnetiche monocromatiche, in fase tra loro e collimate, cioè che si propagano in un fascio di sezione uniforme. La radiazione generata da un laser usato come puntatore trasporta una potenza media P di 5 mW e produce un fascio di sezione A pari a 1 mm^2 . Il valor medio del vettore di Poynting vale quindi:

$$\langle S \rangle = \frac{P}{A} = \frac{5 \times 10^{-3} \text{ W}}{1 \times 10^{-6} \text{ m}^2} \approx 5 \frac{\text{kW}}{\text{m}^2};$$

dalla relazione (8.46) segue che il valore massimo del campo elettrico trasportato da tali onde nel vuoto vale:

$$E_0 = \sqrt{\frac{2 \langle S \rangle}{\varepsilon_0 c}} \approx \sqrt{\frac{2(5 \times 10^3 \text{ W/m}^2)}{(8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m})(2.998 \times 10^8 \text{ m/s})}} \approx 1.94 \frac{\text{kV}}{\text{m}}.$$

Si osservi che malgrado la bassa potenza, il campo elettrico associato alla radiazione generata da tale dispositivo risulta piuttosto elevato.



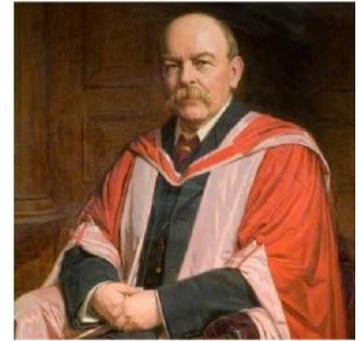
Puntatore laser

8.6 Teorema di Poynting

Consideriamo una regione dello spazio di volume V in cui un campo elettrico \vec{E} determina una densità di corrente \vec{J} , allora la potenza istantanea dissipata nel volume per effetto Joule vale $\int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dv$. D'altra

parte dalla quarta equazione di Maxwell la densità di corrente \vec{J} può esprimersi come:

$$\vec{J} = -\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{\nabla} \times \vec{B}}{\mu},$$



John Henry Poynting

per cui, sostituendo nell'espressione della potenza dissipata, si ha:

$$\int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dv = \int_V \vec{E} \cdot \left(-\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{\nabla} \times \vec{B}}{\mu} \right) dv = -\int_V \varepsilon \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dv + \int_V \left(\vec{E} \cdot \frac{\vec{\nabla} \times \vec{B}}{\mu} \right) dv. \quad (8.47)$$

Dall'identità vettoriale:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B},$$

in cui $\vec{\nabla} \times \vec{E}$ è espresso come $-\partial \vec{B} / \partial t$, segue:

$$\vec{E} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{B} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{E} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = -\vec{B} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B});$$

sostituendo tale relazione nella (8.47), si ottiene:

$$\begin{aligned} \int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dv &= -\int_V \varepsilon \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dv + \int_V \left(\vec{E} \cdot \frac{\vec{\nabla} \times \vec{B}}{\mu} \right) dv = -\int_V \varepsilon \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} dv - \int_V \frac{\vec{B}}{\mu} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dv - \int_V \frac{\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B})}{\mu} dv = \\ &= -\int_V \left(\varepsilon \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\vec{B}}{\mu} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dv - \int_V \frac{\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B})}{\mu} dv = \\ &= -\int_V \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu} \right) \right] dv - \int_V \frac{\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B})}{\mu} dv \end{aligned}$$

dove si è supposto che sia ε che μ non varino nel tempo; assumendo quindi che il volume V non sia in moto, si ha:

$$\int_V \vec{E} \cdot \vec{J} dv = -\frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{\varepsilon E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu} \right) dv - \int_V \frac{\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B})}{\mu} dv.$$

Infine, applicando il teorema della divergenza all'ultimo integrale, dalla relazione (8.44), si ottiene:

$$\int_V \vec{E} \cdot \vec{J} \, dv = -\frac{d}{dt} \int_V \left(\frac{\epsilon E^2}{2} + \frac{B^2}{2\mu} \right) dv - \int_S \vec{S} \cdot d\vec{s}$$

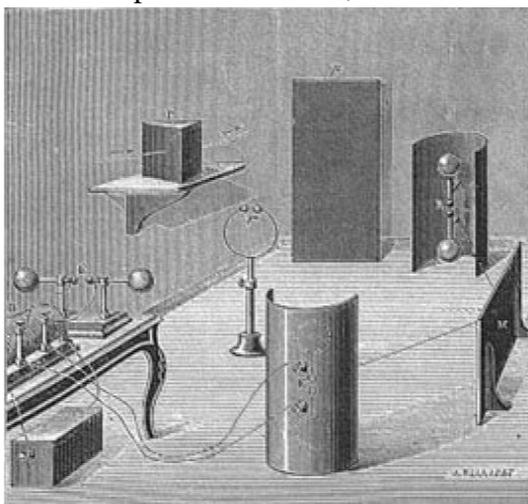
in cui S è la superficie di contorno di V . Siccome il primo membro di questa identità rappresenta la potenza istantanea dissipata nel volume V per effetto Joule, concludiamo che tale quantità si esprime come somma di due termini, il primo dei quali dato dalla (8.43), che si voleva provare, rappresenta la variazione di energia contenuta nel volume e il secondo, pari al flusso di \vec{S} , è la potenza istantanea che attraversa il volume considerato. Questa identità, che prende il nome di *teorema di Poynting*, si può rappresentare in forma differenziale attraverso la relazione:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{S} + \vec{E} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial u}{\partial t},$$

che esprime il bilancio energetico, affermando che la variazione dell'energia contenuta in una superficie chiusa è dovuta sia al flusso di energia prodotta dalle onde elettromagnetiche che attraversano tale superficie che all'energia spesa per determinare il moto delle cariche elettriche contenute nel volume interno alla superficie.

8.7 Sorgenti di onde elettromagnetiche

Dalle relazioni (8.30) e (8.32) emerge che le onde elettromagnetiche sono originate dal campo elettrico ottenuto attraverso la variazione di un campo magnetico e dal campo magnetico prodotto dalla variazione di un campo elettrico. Pertanto, poiché una configurazione stazionaria di carica o una corrente continua non possono determinare la generazione di onde elettromagnetiche, ne segue che a tale scopo è necessario che la corrente sia di intensità variabile nel tempo, cioè non stazionaria. Ciò porta a concludere che le onde elettromagnetiche sono prodotte dall'accelerazione delle cariche; cioè una particella carica, una volta accelerata, perde energia per effetto dell'irradiazione di onde elettromagnetiche.

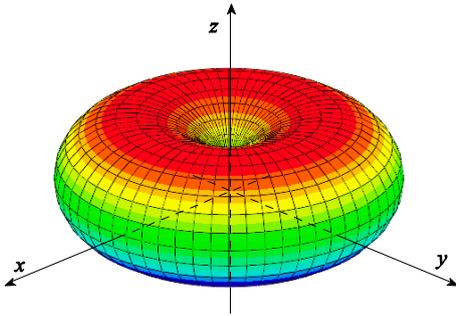


Esperienze di Hertz, si noti a sinistra l'oscillatore collegato al rocchetto di Ruhmkorff e al centro il rivelatore. Sul fondo è disposto il pannello riflettente. Nel disegno sono mostrati inoltre dei radiatori parabolici ed un prisma per esperienze di ottica delle onde elettromagnetiche (E. Desbeaux, *Fisica moderna*, Milano 1902)



Heinrich Hertz

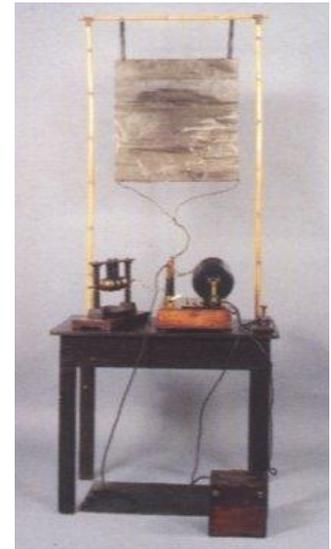
La rivelazione delle onde elettromagnetiche previste dalla teoria di Maxwell costituì il maggiore oggetto degli studi di Hertz. Dopo aver rielaborato matematicamente le equazioni di Maxwell, Hertz comprese che le onde elettromagnetiche potevano essere prodotte da oscillazioni elettriche; d'altra parte era ormai noto che la scarica di un condensatore su una bobina produceva delle oscillazioni elettriche, così nel 1888 Hertz connesse un rocchetto di Ruhmkorff ad un condensatore realizzato da due sfere metalliche collegate da un'asta metallica dotata di una piccola interruzione alla sua metà. Sugli estremi affacciati dell'interruzione erano poste due piccole sfere metalliche. In corrispondenza della scarica elettrica tra la due sferette, prodotta dal rocchetto di Ruhmkorff, Hertz generò delle onde elettromagnetiche di circa 40 MHz. Nel dispositivo così composto il campo



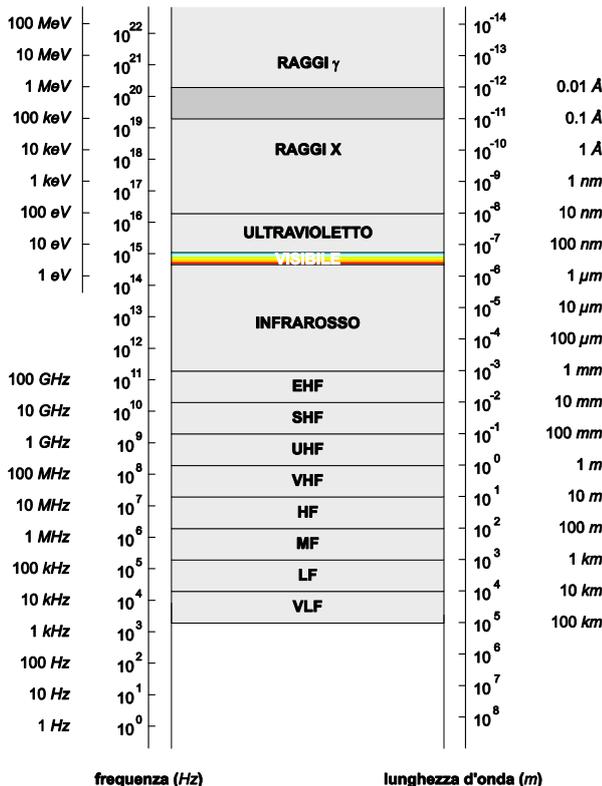
Dipendenza angolare dell'intensità del campo elettrico prodotto da un dipolo elettrico oscillante.

elettrico variabile prodotto dalle sfere più grandi e il campo magnetico variabile generato dalle aste metalliche erano sostanzialmente ortogonali tra loro in corrispondenza del centro del sistema, per cui le condizioni indicate dalla teoria di Maxwell per ottenere l'irraggiamento erano soddisfatte. Per la rivelazione delle onde elettromagnetiche Hertz costruì una spira metallica con una piccola

interruzione in corrispondenza della quale erano disposte due sferette metalliche; una variazione di flusso attraverso tale spira avrebbe determinato l'induzione di una forza elettromotrice e, di conseguenza, tra le sferette sarebbe scoccata una scintilla. Hertz sperimentò spire con differenti dimensioni, constatando che in alcuni casi, corrispondenti ad una situazione di risonanza tra la frequenza del campo elettromagnetico e quella propria di tale circuito, la scintilla risultava più intensa. Per eliminare il dubbio che l'effetto osservato non fosse dovuto ad un semplice fenomeno di induzione, Hertz fece riflettere le onde su un pannello metallico, ottenendo nella regione



Riproduzione dell'apparato trasmettente dei primi esperimenti di Marconi. Si noti, in alto, l'antenna a pannello e in basso, a sinistra, l'oscillatore e, a destra, il rocchetto di Ruhmkorff (Fondazione Guglielmo Marconi, Collezione Bigazzi)



Spettro della radiazione elettromagnetica; le sigle VLF (*Very Low Frequency*), LF (*Low Frequency*), MF (*Medium Frequency*), HF (*High Frequency*), VHF (*Very High Frequency*), UHF (*Ultra High Frequency*), SHF (*Super High Frequency*), EHF (*Extremely High Frequency*), distinguono gli intervalli di frequenze della radiazione adoperata nelle radiotrasmissioni. La corrispondenza tra frequenza f ed energia E deriva dalla formula relativa al modello quantistico della radiazione, $E = hf$, in cui h è la costante di Planck.

compresa tra il generatore e tale pannello l'interferenza tra le onde provenienti dall'oscillatore e quelle riflesse dal pannello. Questa interferenza determinava in tale regione una configurazione di onde stazionarie in cui i massimi erano situati nei punti in cui le onde dirette e riflesse si sommavano in fase e i minimi nei punti in cui le onde si sommavano in opposizione di fase. Dalla misura della distanza tra tali massimi e minimi Hertz risalì alla velocità di propagazione delle onde, constatando che il suo valore era dello stesso ordine di grandezza di quello della luce nel vuoto, confermando, quindi, la teoria di Maxwell.

A partire da questa scoperta, gli sperimentatori migliorarono l'apparato di Hertz, soprattutto nella parte del rivelatore. Sebbene Hertz attribuisse solo una valenza teorica alla sua scoperta, nel 1894 Guglielmo Marconi ebbe l'idea di impiegare le onde rivelate da Hertz per la trasmissione a distanza di informazioni. Marconi collegò un'antenna, realizzata inizialmente con un pannello metallico sospeso ad un palo, ad una delle due sfere dell'oscillatore e collegò a terra l'altra sfera; analoga disposizione fu adottata per il ricevitore. Con tale sistema Marconi nel 1895 riuscì ad inviare dei segnali tra due punti distanti circa un chilometro e mezzo a Pontecchio, presso Bologna.

Una comune sorgente di onde elettromagnetiche è rappresentata da un dipolo elettrico oscillante.

L'applicazione di una forza elettromotrice variabile, ad esempio con legge sinusoidale, ad un'antenna metallica, determina un moto oscillatorio degli elettroni del conduttore e, di conseguenza, provoca l'irradiazione di un'onda elettromagnetica della stessa frequenza di oscillazione; gli elettroni di una seconda antenna, che agisce da ricevitore, sono poi indotti a oscillare alla stessa maniera per effetto della componente elettrica dell'onda incidente: tale oscillazione, opportunamente rilevata ed amplificata, consente la ricezione dell'informazione trasmessa dall'emittente attraverso l'onda elettromagnetica. Nella figura è rappresentata la dipendenza angolare, ($\sin^2 \vartheta$), dell'intensità del campo elettrico a grande distanza da un dipolo oscillante.

Naturalmente i meccanismi di generazione di onde elettromagnetiche cambiano in funzione della lunghezza d'onda della radiazione emessa; così, mentre attraverso delle antenne è possibile irradiare onde di lunghezza sino al centimetro, per lunghezze d'onda inferiori, tali dispositivi si rivelano inadeguati. Ad esempio, la generazione di luce visibile avviene stimolando atomi o molecole con campi elettrici variabili; ciò provoca l'oscillazione sincrona dei baricentri delle cariche negativa e positiva e la conseguente emissione di radiazione. Solitamente si classificano le onde elettromagnetiche attraverso la loro lunghezza d'onda o la loro frequenza, pari a $\omega/(2\pi)$; lo spettro della radiazione elettromagnetica viene così ad essere schematizzato nella tabella qui riportata.

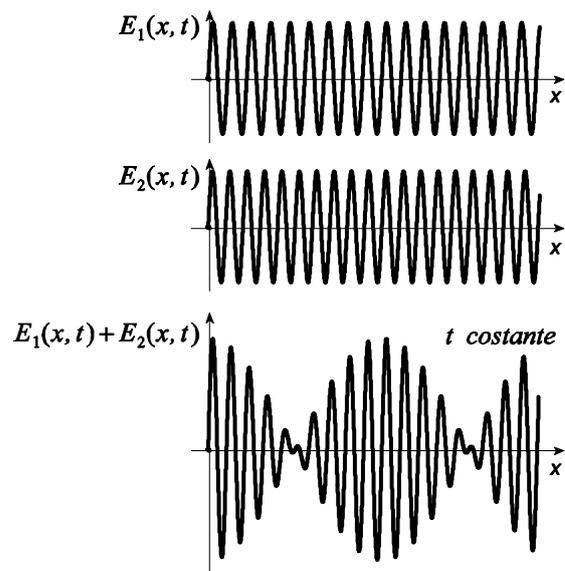
8.8 Trasmissione di segnali

Consideriamo un'onda elettromagnetica piana di tipo armonico, in moto lungo la direzione x con velocità di fase v . Il campo elettrico nel piano di polarizzazione è:

$$E = E_0 \cos(kx - \omega t),$$

dove k e ω sono legati alla velocità attraverso la relazione (8.8). Questa funzione è caratterizzata dall'essere illimitata sia lungo l'asse x che lungo l'asse temporale; inoltre, essendo periodica sia spazialmente che temporalmente, non è soggetta ad alcuna variazione della forma nel corso del tempo o lungo la direzione di propagazione. Tali caratteristiche pregiudicano la possibilità di associare un'informazione all'onda e fare si che

possa essere considerata un *segnale*; nella pratica, infatti, si producono o si osservano onde sinusoidali di durata finita, oppure segnali periodici non armonici o segnali aperiodici. Tuttavia, alla luce dell'analisi di Fourier, un segnale spazialmente e temporalmente limitato può essere ottenuto attraverso la somma di infinite onde di tipo armonico, ciascuna con opportuni valori di ampiezza e frequenza. Sebbene tale studio trascenda dalle finalità di questa analisi, stabiliamo le caratteristiche di propagazione di un impulso nella semplice circostanza che tale impulso sia generato dalla sovrapposizione di due sole onde armoniche in moto nella stessa direzione, aventi la stessa ampiezza E_0 e caratterizzate da due pulsazioni ω e ω' vicine tra loro e da numeri d'onda k e k' pure vicini tra loro. L'onda risultante dalla sovrapposizione sarà data da:



$$\begin{aligned}
E &= E_0 \cos(kx - \omega t) + E_0 \cos(k'x - \omega' t) = \\
&= 2E_0 \cos\left(\frac{k - k'}{2}x - \frac{\omega - \omega'}{2}t\right) \cos\left(\frac{k + k'}{2}x - \frac{\omega + \omega'}{2}t\right) \approx \\
&= 2E_0 \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \omega}{2}t\right) \cos(kx - \omega t);
\end{aligned}$$

dove¹ si è posto $\Delta k \equiv k - k'$ e $\Delta \omega \equiv \omega - \omega'$, in cui $|\Delta k| \ll k$ e $|\Delta \omega| \ll \omega$ essendo per ipotesi k molto prossimo a k' e pure ω molto prossimo a ω' . La presenza del termine $\cos(kx - \omega t)$, detto *onda portante*, suggerisce che l'onda risultante dalla composizione si propaghi con caratteristiche simili a quelle delle onde componenti, ma con ampiezza modulata dal termine $2E_0 \cos\left[\frac{\Delta k}{2}x - \frac{\Delta \omega}{2}t\right]$. L'onda portante si propaga con la velocità v pari a:

$$v = \frac{\omega}{k},$$

cioè con la stessa velocità di fase delle componenti; il termine di modulazione, invece, si propaga con la velocità v_g data da:

$$v_g \equiv \frac{\Delta \omega}{\Delta k},$$

che, in generale, risulterà differente da v . Con l'ausilio dell'analisi di Fourier questo esempio può essere esteso ad una sovrapposizione di infinite componenti armoniche di pulsazioni e numeri d'onda compresi in intervalli definiti; in analogia al semplice caso testé esaminato, il fenomeno propagatorio può essere caratterizzato oltre che dalla velocità di fase, anche da un'altra velocità, detta *velocità di gruppo*, che rappresenta la velocità con cui si propaga la risultante della composizione delle infinite onde armoniche. Tale risultante prende il nome di *pacchetto d'onde*. La velocità di gruppo è definita come:

$$v_g \equiv \frac{d\omega}{dk},$$

siccome v_g è la velocità con la quale si propaga il pacchetto d'onde, allora v_g rappresenta anche la velocità di trasmissione del corrispondente segnale e quindi dell'informazione ad esso associata. Dalla relazione (8.8) e dalla definizione di velocità di gruppo segue:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk} vk = v + k \frac{dv}{dk},$$

quindi, solo nei mezzi materiali in cui la velocità di fase è indipendente dal numero d'onda (o, dalla lunghezza d'onda), circostanza per cui il mezzo è detto *non dispersivo*, le due velocità coincidono. Risulta inoltre:

¹ Si è fatto uso dell'identità trigonometrica $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left[\frac{(\alpha - \beta)}{2}\right] \cos\left[\frac{(\alpha + \beta)}{2}\right]$.

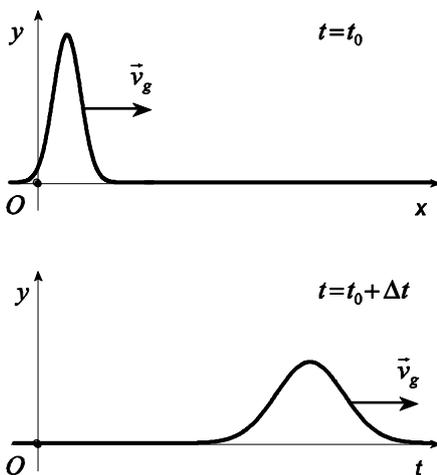
$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{\frac{dk}{d\omega}} = \frac{1}{\frac{d}{d\omega} \frac{n\omega}{c}} = \frac{1}{\frac{n}{c} + \frac{\omega}{c} \frac{dn}{d\omega}} = \frac{v}{1 + \frac{\omega}{n} \frac{dn}{d\omega}}, \quad (8.48)$$

dove si è fatto uso delle espressioni (8.8) e (8.35); questa relazione consente di confrontare la velocità di gruppo con la velocità di fase attraverso lo studio del segno della derivata $dn/d\omega$, infatti, siccome:

$$\frac{dn}{d\omega} = \frac{n}{\omega} \left(\frac{v}{v_g} - 1 \right),$$

poiché il fattore n/ω è positivo, si ha:

$$\begin{aligned} \frac{dn}{d\omega} < 0 &\Rightarrow v_g > v, \\ \frac{dn}{d\omega} > 0 &\Rightarrow v_g < v. \end{aligned}$$



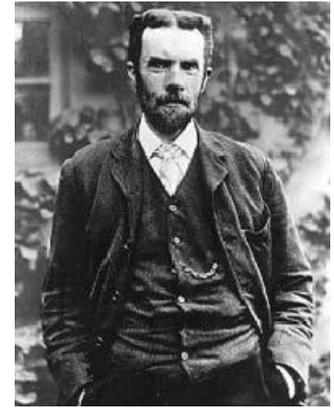
Essendo, nel vuoto, la velocità di fase per un'onda elettromagnetica uguale a c , allora v_g può essere maggiore o minore di c . In effetti, negli intervalli di valori di ω in cui $dn/d\omega > 0$, detti regioni di *dispersione anomala*, le approssimazioni fatte per giungere alla relazione (8.48) non sono più valide, così in pratica la velocità di gruppo risulta sempre essere minore di c , coerentemente coi principi su cui si basa la teoria della relatività. Il fenomeno della dispersione riveste una particolare importanza nella trasmissione dei segnali. Consideriamo inizialmente un segnale ottenuto attraverso la composizione di infinite componenti che si propaga nel vuoto; poiché in tale circostanza la velocità di gruppo del segnale coincide con la velocità di fase di ciascuna delle componenti, il

segnale si sposterà attraverso lo spazio senza subire alterazioni. Se lo stesso segnale si propaga in un mezzo dispersivo, siccome la velocità di ciascuna componente risulta diversa dalle altre, si determinerà un allargamento ed un appiattimento della forma del segnale stesso. L'entità di questa deformazione aumenterà col procedere dell'impulso attraverso il mezzo dispersivo, così, un segnale, ad esempio, basato su di una successione di impulsi, può venire alterato sino a diventare indecifrabile da parte di colui che lo riceve, dopo che esso ha attraversato tale mezzo. Per tale motivo, nella trasmissione di segnali in mezzi materiali (come nelle fibre ottiche, ad esempio) è attribuita molta importanza alla scelta di bande di frequenza di lavoro in corrispondenza delle quali la dispersione del mezzo risulti minima.

8.9 Linee di trasmissione

Sebbene la trasmissione di segnali lungo *linee di trasmissione* fosse stata sviluppata praticamente subito dopo l'esperimento di Ørsted, la prima teoria descrittiva di tali dispositivi si ebbe nel 1880 ad opera di Heaviside, il quale sintetizzò le originarie 20 equazioni di Maxwell nelle quattro ora note e introdusse i metodi matematici di studio usati tuttora.

Una linea di trasmissione è un mezzo per trasferire energia da un generatore ad un utilizzatore. Con riferimento a generatori che erogano forze elettromotrici sinusoidali, per basse frequenze, come in corrispondenza della frequenza della rete di distribuzione domestica dell'energia elettrica, si adoperano normali conduttori ed il loro studio può essere svolto con la teoria dei circuiti. Alle alte frequenze, quando la rapidità di variazione delle grandezze elettriche è comparabile coi tempi che impiegano i campi a propagarsi attraverso i conduttori, si adoperano tipicamente cavi coassiali ed il loro studio deve essere fatto con la teoria delle onde elettromagnetiche. Consideriamo un cavo coassiale in cui il conduttore interno sia percorso dalla corrente I e quello esterno sia percorso dalla stessa corrente ma nella direzione opposta; sia \mathcal{C} una circonferenza coassiale al cavo e contenuta nell'intercapedine tra i due conduttori e sia S la superficie circolare che ha come contorno \mathcal{C} ; applichiamo le leggi di Faraday-Henry e di Ampere su tali domini:

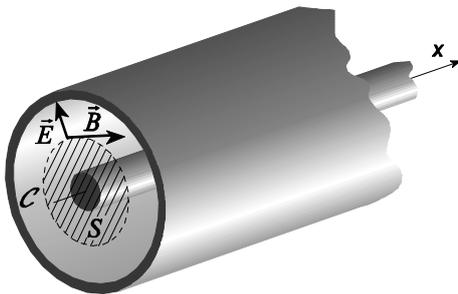


Oliver Heaviside

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_S \vec{B} \cdot d\vec{s},$$

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I + \varepsilon \frac{d}{dt} \int_S \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

Se i campi \vec{E} e \vec{B} (e quindi \vec{H} , se nel mezzo è valida la relazione $\vec{H} = \vec{B}/\mu$) sono perpendicolari tra loro e perpendicolari all'asse del cavo, risulta:



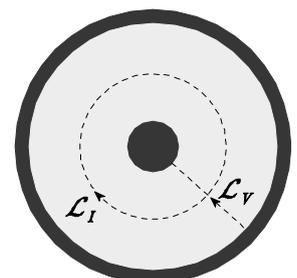
$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0,$$

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{H} \cdot d\vec{l} = I;$$

ovvero, in questo caso il campo elettrico in un qualsiasi piano perpendicolare all'asse del cavo risulta conservativo ed analogo a quello prodotto da una distribuzione elettrostatica di carica; inoltre anche il campo magnetico in qualsiasi piano perpendicolare all'asse è analogo al campo magnetostatico prodotto da una corrente stazionaria. Da queste considerazioni segue che è possibile applicare le tradizionali regole per la descrizione dei circuiti elettrici in regime stazionario; così si può definire in maniera univoca la differenza di potenziale tra i conduttori per ogni punto x situato lungo il cavo, come l'integrale del campo elettrico lungo un generico percorso \mathcal{L}_V situato nel piano perpendicolare all'asse:

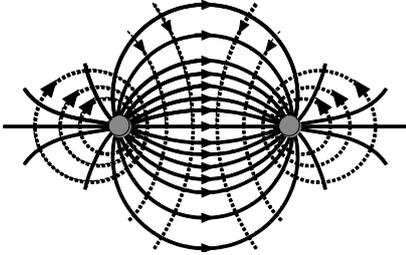
$$v(x, t) = -\int_{\mathcal{L}_V} \vec{E} \cdot d\vec{l};$$

analogamente, si può definire la corrente attraverso, ad esempio, il conduttore centrale, come l'integrale del campo \vec{H} lungo un generico percorso chiuso \mathcal{L}_I nel piano perpendicolare all'asse e che racchiude tale conduttore:



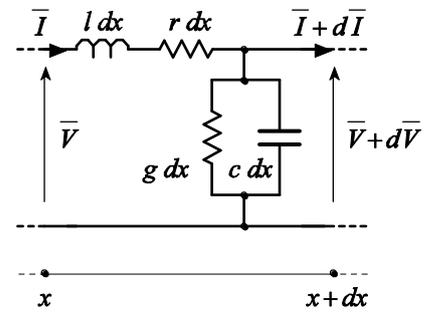
$$i(x, t) = \oint_{\mathcal{L}_1} \vec{H} \cdot d\vec{l}.$$

In particolare, qualora il cavo sia sollecitato sinusoidalmente, per la sua descrizione è possibile far ricorso al metodo simbolico.



Esempio: (*Linea bifilare*) La condizione di perpendicolarità tra i campi elettrico e magnetico è soddisfatta anche nel caso in cui i conduttori sono costituiti da due fili metallici di sezione uniforme posti a distanza fissa; una linea fatta in questa maniera è detta *bifilare*. In figura è mostrata la configurazione delle linee di forza del campo elettrico (linea continua) e del campo magnetico (linea tratteggiata) per una sezione di linea bifilare i cui conduttori sono percorsi da correnti di uguale intensità ma di versi opposti. Generalmente i due fili conduttori che costituiscono la linea sono intrecciati tra loro per minimizzare l'area da essi circoscritta, migliorando in questo modo l'immunità della linea ai disturbi. Le linee bifilari intrecciate sono attualmente adoperate nelle reti per la trasmissione di dati.

Consideriamo un generico tratto di linea di lunghezza infinitesima dx compreso tra due sezioni trasversali poste, rispettivamente, alle distanze x e $x+dx$ da un punto di riferimento quale, ad esempio, l'inizio dove è connesso un generatore sinusoidale di pulsazione ω . Questo tratto infinitesimo di linea può essere schematizzato, come mostrato in figura, dove l , r , g e c , rappresentano, rispettivamente, l'induttanza per unità di lunghezza, la resistenza per unità di lunghezza, la conduttanza per unità di lunghezza e la capacità per unità di lunghezza. Siano $\bar{V}(x)$ e $\bar{I}(x)$ rispettivamente le estensioni complesse della differenza di potenziale tra i due conduttori della linea e della corrente nella linea, entrambi calcolati alla distanza x dall'origine scelta; alla distanza $x+dx$, queste grandezze varranno rispettivamente $\bar{V}(x)+d\bar{V}(x)$ e $\bar{I}(x)+d\bar{I}(x)$. La differenza $d\bar{V}(x)$ tra la differenza di potenziale in x e in $x+dx$ è prodotta dalla caduta di tensione sull'impedenza $r dx + j\omega l dx$:



$$\bar{V}(x) - [\bar{V}(x) + d\bar{V}(x)] = (r dx + j\omega l dx) \bar{I}(x);$$

la differenza $d\bar{I}(x)$ fra la corrente in x e la corrente in $x+dx$ attraverso i conduttori è dovuta alla corrente che scorre nell'ammettanza $g dx + j\omega c dx$:

$$\bar{I}(x) - [\bar{I}(x) + d\bar{I}(x)] = (g dx + j\omega c dx) \bar{V}(x);$$

d'altra parte, siccome $d\bar{V}(x) = [d\bar{V}(x)/dx] dx$ e $d\bar{I}(x) = [d\bar{I}(x)/dx] dx$, si ha:

$$\frac{d\bar{V}(x)}{dx} = -(r + j\omega l) \bar{I}(x), \quad (8.49)$$

$$\frac{d\bar{I}(x)}{dx} = -(g + j\omega c) \bar{V}(x). \quad (8.50)$$

Derivando la (8.49) rispetto a x e sostituendo alla derivata di $\bar{I}(x)$ la sua espressione dalla (8.50), si trova:

$$\frac{d^2\bar{V}(x)}{dx^2} = \gamma^2 \bar{V}(x), \quad (8.51)$$

dove si è indicato con γ la quantità complessa:

$$\gamma \equiv \sqrt{(r + j\omega l)(g + j\omega c)}, \quad (8.52)$$



Cavi coassiali per la trasmissione di segnali ad alta frequenza (GEPCO).

detta *costante di propagazione*. La soluzione generale dell'equazione differenziale (8.51) è data da:

$$\bar{V}(x) = \bar{V}_1 e^{-\gamma x} + \bar{V}_2 e^{\gamma x}, \quad (8.53)$$

dove \bar{V}_1 e \bar{V}_2 sono costanti complesse, determinate in base alle condizioni al contorno. Derivando rispetto a x questa soluzione e sostituendola nella (8.49), si trova:

$$\begin{aligned} \bar{I}(x) &= -\frac{1}{r + j\omega l} \frac{d\bar{V}(x)}{dx} = -\frac{1}{r + j\omega l} (-\gamma \bar{V}_1 e^{-\gamma x} + \gamma \bar{V}_2 e^{\gamma x}) = \frac{\gamma}{r + j\omega l} (\bar{V}_1 e^{-\gamma x} - \bar{V}_2 e^{\gamma x}) = \\ &= \frac{\sqrt{(r + j\omega l)(g + j\omega c)}}{r + j\omega l} (\bar{V}_1 e^{-\gamma x} - \bar{V}_2 e^{\gamma x}) = \frac{1}{\sqrt{\frac{r + j\omega l}{g + j\omega c}}} (\bar{V}_1 e^{-\gamma x} - \bar{V}_2 e^{\gamma x}) = \\ &= \frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_0} e^{-\gamma x} - \frac{\bar{V}_2}{\bar{Z}_0} e^{\gamma x}, \end{aligned} \quad (8.54)$$

dove si è posto:

$$\bar{Z}_0 \equiv \sqrt{\frac{r + j\omega l}{g + j\omega c}}; \quad (8.55)$$

questa quantità ha le dimensioni di un'impedenza e prende il nome di *impedenza caratteristica* della linea. Poiché γ è una quantità complessa, può essere espressa nella forma:

$$\gamma \equiv \alpha + j\beta, \quad (8.56)$$

dove α è detta *costante di attenuazione* e β *costante di fase*; sostituendo questa espressione di γ nelle relazioni (8.53) e (8.54), si ottiene:

$$\bar{V}(x) = \bar{V}_1 e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} + \bar{V}_2 e^{\alpha x} e^{j\beta x}, \quad (8.57)$$

$$\bar{I}(x) = \frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_0} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x} - \frac{\bar{V}_2}{\bar{Z}_0} e^{\alpha x} e^{j\beta x}. \quad (8.58)$$

Esempio: (*Linea infinita*) Per verificare che tali equazioni determinano soluzioni di tipo propagativo, consideriamo il caso in cui \bar{V}_2 è nullo, condizione corrispondente alla descrizione di una linea infinita, per la quale deve valere $\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{V}(x) = 0$. Le equazioni (8.57) e (8.58) in questo caso diventano:

$$\bar{V}(x) = \bar{V}_1 e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}, \quad (8.59)$$

$$\bar{I}(x) = \frac{\bar{V}_1}{Z_0} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}; \quad (8.60)$$

assumendo inoltre che il generatore sinusoidale sia posto in corrispondenza dell'origine del sistema di riferimento, ossia:

$$v(0, t) = V_0 \cos(\omega t),$$

la cui estensione complessa è:

$$\bar{V}(0) = V_0 e^{j\omega t}, \quad (8.61)$$

segue che il coefficiente \bar{V}_1 deve valere $V_0 e^{j\omega t}$, così, sostituendo nelle equazioni (8.59) e (8.60), si ottiene:

$$\bar{V}(x) = V_0 e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta x)}, \quad (8.62)$$

$$\bar{I}(x) = \frac{V_0}{Z_0} e^{-\alpha x} e^{j(\omega t - \beta x)}. \quad (8.63)$$

Prendendo la parte reale di ciascuna di queste espressioni, si ottengono, rispettivamente, la tensione istantanea $v(x, t)$ e la corrente istantanea $i(x, t)$ alla distanza x dal generatore:

$$v(x, t) = V_0 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x) = V_0 e^{-\alpha x} \cos(\beta x - \omega t),$$

$$i(x, t) = \frac{V_0}{Z_0} e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x - \phi) = \frac{V_0}{Z_0} e^{-\alpha x} \cos(\beta x - \omega t + \phi).$$

dove Z_0 e ϕ sono rispettivamente, il modulo e l'argomento dell'impedenza caratteristica. Le espressioni precedenti descrivono onde di tensione e corrente che si propagano lungo la linea con numero d'onda pari alla costante di fase β , la cui ampiezza, per effetto del termine di attenuazione $e^{-\alpha x}$ diminuisce con la distanza. Poiché la direzione di propagazione dell'onda, x , è perpendicolare sia al vettore \vec{E} che al vettore \vec{H} , il modo di propagazione testé descritto è detto *TEM* (*transverse electromagnetic mode*). Nel caso ideale di una linea senza perdite, per cui r e g sono nulli, la costante di attenuazione è nulla, mentre la costante di fase vale:

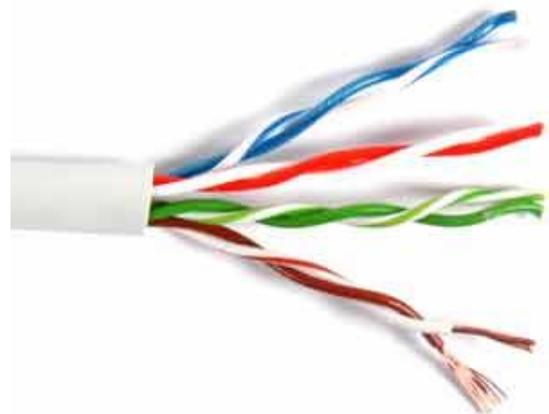
$$\beta = \omega \sqrt{lc}, \quad (8.64)$$

d'altra parte, per un cavo coassiale, l'induttanza per unità di lunghezza e la capacità per unità di lunghezza valgono, rispettivamente:

$$l = \frac{\mu}{2\pi} \ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right),$$

$$c = \frac{2\pi\epsilon}{\ln \left(\frac{R_2}{R_1} \right)},$$

in cui R_1 e R_2 rappresentano, rispettivamente, i raggi del conduttore interno ed esterno del cavo, così, sostituendo nella (8.64) si ha:



Linee bifilari per la trasmissione del segnale sulla rete ethernet.

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu}{2\pi} \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) \frac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)}} = \omega \sqrt{\mu\epsilon}, \tag{8.65}$$

e quindi, le espressioni della differenza di potenziale e della corrente lungo la linea, sono:

$$v(x, t) = V_0 \cos(\beta x - \omega t),$$

$$i(x, t) = \frac{V_0}{Z_0} \cos(\beta x - \omega t + \phi),$$

e la velocità di propagazione, dalla (8.8) e dalla (8.65) vale:

$$v = \frac{\omega}{\beta} = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}},$$

che coincide con l'espressione (8.33). Dividendo membro a membro le relazioni (8.59) e (8.60) si ottiene l'espressione dell'impedenza $\bar{Z}(x)$ in corrispondenza di un generico punto lungo la linea, situato a distanza x dal generatore:

$$\bar{Z}(x) = \frac{\bar{V}(x)}{\bar{I}(x)} = \frac{\bar{V}_1 e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}}{\frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_0} e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}} = \bar{Z}_0;$$

pertanto, tale rapporto coincide con l'impedenza caratteristica della linea stessa quando la linea è infinita. In particolare tale proprietà è soddisfatta anche per $x=0$ così, se il generatore sinusoidale di forza elettromotrice $v_g(t)$ applicato all'ingresso della linea presenta una impedenza interna \bar{Z}_g , poiché il rapporto $\bar{V}(0)/\bar{I}(0)$ vale \bar{Z}_0 , la condizione al contorno già espressa dalla (8.61) diventa in tale caso:

$$\bar{V}(0) = V_g e^{j\omega t} \frac{\bar{Z}_0}{\bar{Z}_0 + \bar{Z}_g}.$$

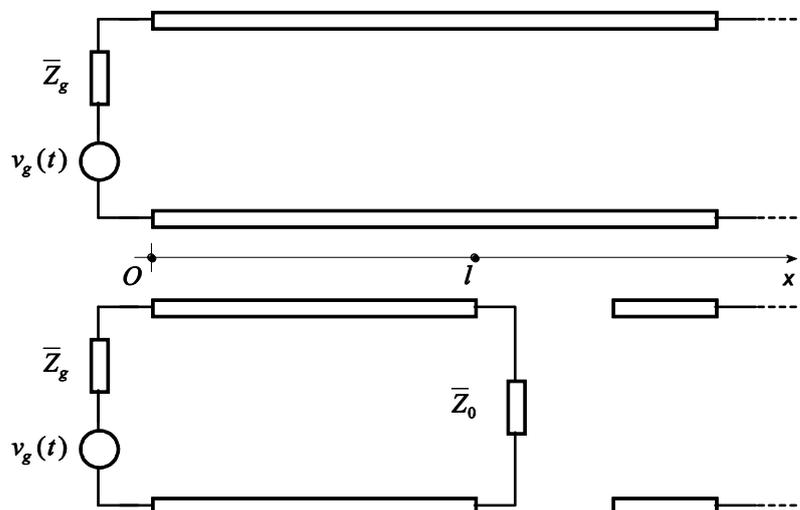
in cui

$$\bar{V}_g = V_g e^{j\omega t}$$

è l'estensione complessa della forza elettromotrice:

$$v_g = V_g \cos(\omega t).$$

Esempio: (Linea adattata) Consideriamo una linea infinita e supponiamo di tagliarla in corrispondenza di un generico punto posto a distanza l dal generatore (si veda la figura). La parte di linea a destra della sezione, essendo ancora infinita, per quanto visto presenta un'impedenza in ogni suo punto pari all'impedenza caratteristica \bar{Z}_0 , compreso al suo ingresso. Ne segue che per quanto riguarda la parte di linea di lunghezza l situata a monte della sezione, la linea di lunghezza infinita posta a valle può essere sostituita con una impedenza concentrata pari a \bar{Z}_0 e gli andamenti della tensione e della corrente lungo il tratto di linea chiusa su tale carico sono gli stessi che si avrebbero qualora la linea fosse di



lunghezza infinita. Una linea chiusa su un carico pari alla propria impedenza caratteristica è detta *adattata*. Pertanto, in una linea adattata, analogamente al caso delle linea infinita, l'impedenza in un qualsiasi punto vale \bar{Z}_0 ed, in particolare, nel caso di una linea senza perdite, siccome r e g sono nulli, dalla (8.55) segue che tale impedenza è reale e vale:

$$\bar{Z}_0 = \sqrt{\frac{l}{c}}.$$

Pertanto in una linea adattata e senza perdite in qualunque punto lungo la linea la tensione e la corrente sono in fase tra loro ed inoltre, essendo nulla l'onda riflessa, l'energia associata all'onda fluisce dal generatore al carico dove viene completamente assorbita.

Esempio: (*Espressioni delle costanti di attenuazione e di fase*) Confrontando la definizione (8.56) con la relazione (8.52), si ha:

$$\alpha + j\beta = \sqrt{(r + j\omega l)(g + j\omega c)},$$

ed elevando al quadrato ambo i membri segue:

$$\alpha^2 - \beta^2 + 2j\alpha\beta = rg - \omega^2 lg + j\omega(lg + rc),$$

da questa espressione, eguagliando separatamente fra loro le parti reali e le parti immaginarie, si ottiene il seguente sistema di equazioni:

$$\begin{cases} \alpha^2 - \beta^2 = rg - \omega^2 lc, \\ \alpha\beta = \frac{1}{2}\omega(lg + rc), \end{cases}$$

risolvendo il quale si ricavano le espressioni delle due costanti α e β :

$$\alpha = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{(r^2 + \omega^2 l^2)(g^2 + \omega^2 c^2)} + rg - \omega^2 lc \right]},$$

$$\beta = \sqrt{\frac{1}{2} \left[\sqrt{(r^2 + \omega^2 l^2)(g^2 + \omega^2 c^2)} - rg + \omega^2 lc \right]}.$$

In particolare, per linee con basse perdite, attraverso uno sviluppo in serie delle precedenti espressioni, si possono dedurre le relazioni approssimate:

$$\alpha \approx \frac{r}{2Z_0} + \frac{gZ_0}{2},$$

$$\beta \approx \omega\sqrt{lc} \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{r}{2\omega l} + \frac{g}{2\omega c} \right) \right].$$

Consideriamo una linea di trasmissione di lunghezza l chiusa su un carico di impedenza generica \bar{Z}_L ; in tale caso i termini \bar{V}_1 e \bar{V}_2 nelle relazioni (8.53) e (8.54) saranno entrambi diversi da zero e pertanto la linea sarà sede oltre che di un'onda diretta, rappresentata attraverso i termini, rispettivamente di tensione e di corrente $\bar{V}_1 e^{-\gamma x}$ e $(\bar{V}_1/\bar{Z}_0)e^{-\gamma x}$, anche di un'onda riflessa, rappresentata dai termini, rispettivamente di tensione e di corrente $\bar{V}_2 e^{\gamma x}$ e $-(\bar{V}_2/\bar{Z}_0)e^{\gamma x}$. Nella pratica è spesso utile caratterizzare la linea a partire dal carico, pertanto, posto:

$$d \equiv l - x, \tag{8.66}$$

esprimendo le (8.53) e (8.54) in termini di questa nuova variabile, si ottiene:

$$\bar{V}(d) = \bar{V}_1 e^{-\gamma(l-d)} + \bar{V}_2 e^{\gamma(l-d)} = \bar{V}_1 e^{-\gamma l} e^{\gamma d} + \bar{V}_2 e^{\gamma l} e^{-\gamma d}, \quad (8.67)$$

$$\bar{I}(d) = \frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_0} e^{-\gamma(l-d)} - \frac{\bar{V}_2}{\bar{Z}_0} e^{\gamma(l-d)} = \frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_0} e^{-\gamma l} e^{\gamma d} - \frac{\bar{V}_2}{\bar{Z}_0} e^{\gamma l} e^{-\gamma d}. \quad (8.68)$$

In particolare, in corrispondenza del carico $d = 0$ e relazioni precedenti diventano:

$$\bar{V}(0) = \bar{V}_1 e^{-\gamma l} + \bar{V}_2 e^{\gamma l},$$

$$\bar{I}(0) = \frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_0} e^{-\gamma l} - \frac{\bar{V}_2}{\bar{Z}_0} e^{\gamma l}.$$

Da tali espressioni si deduce che il termine $\bar{V}_1 e^{-\gamma l}$ rappresenta l'estensione complessa della tensione presente sul carico dovuta alla sola onda diretta e il termine $\bar{V}_2 e^{\gamma l}$ rappresenta l'estensione complessa della tensione presente sul carico dovuta alla sola onda riflessa; inoltre il termine $(\bar{V}_1/\bar{Z}_0) e^{-\gamma l}$ rappresenta l'estensione complessa della corrente attraverso il carico dovuta alla sola onda diretta e il termine $-(\bar{V}_2/\bar{Z}_0) e^{\gamma l}$ rappresenta l'estensione complessa della corrente attraverso il carico dovuta alla sola onda riflessa; posto quindi:

$$\bar{V}_{dL} \equiv \bar{V}_1 e^{-\gamma l}, \quad (8.69)$$

$$\bar{V}_{rL} \equiv \bar{V}_2 e^{\gamma l},$$

$$\bar{I}_{dL} \equiv \frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_0} e^{-\gamma l} = \frac{\bar{V}_{dL}}{\bar{Z}_0} \quad (8.70)$$

$$\bar{I}_{rL} \equiv -\frac{\bar{V}_2}{\bar{Z}_0} e^{\gamma l} = -\frac{\bar{V}_{rL}}{\bar{Z}_0} \quad (8.71)$$

le relazioni (8.67) e (8.68) diventano:

$$\bar{V}(d) = \bar{V}_{dL} e^{\gamma d} + \bar{V}_{rL} e^{-\gamma d}, \quad (8.72)$$

$$\bar{I}(d) = \bar{I}_{dL} e^{\gamma d} + \bar{I}_{rL} e^{-\gamma d}. \quad (8.73)$$

Si definisce *coefficiente di riflessione* di tensione sul carico il rapporto:

$$\bar{\Gamma}_L \equiv \frac{\bar{V}_{rL}}{\bar{V}_{dL}} = -\frac{\bar{I}_{rL}}{\bar{I}_{dL}}, \quad (8.74)$$

dove si è fatto uso delle (8.70) e (8.71). Adoperando tale grandezza, le relazioni (8.72) e (8.73) si esprimono come:

$$\bar{V}(d) = \bar{V}_{dL} \left(e^{\gamma d} + \frac{\bar{V}_{rL}}{\bar{V}_{dL}} e^{-\gamma d} \right) = \bar{V}_{dL} \left(e^{\gamma d} + \bar{\Gamma}_L e^{-\gamma d} \right), \quad (8.75)$$

$$\bar{I}(d) = \bar{I}_{dL} \left(e^{\gamma d} + \frac{\bar{I}_{rL}}{\bar{I}_{dL}} e^{-\gamma d} \right) = \bar{I}_{dL} \left(e^{\gamma d} - \bar{\Gamma}_L e^{-\gamma d} \right) = \frac{\bar{V}_{dL}}{\bar{Z}_0} \left(e^{\gamma d} - \bar{\Gamma}_L e^{-\gamma d} \right). \quad (8.76)$$

Esempio: (Coefficiente di riflessione sul carico) In corrispondenza del carico risulta $d=0$, pertanto, valutando le espressioni (8.75) e (8.76) per tale ascissa, risulta:

$$\begin{aligned} \bar{V}(0) &= \bar{V}_{dL} (1 + \bar{\Gamma}_L), \\ \bar{I}(0) &= \frac{\bar{V}_{dL}}{\bar{Z}_0} (1 - \bar{\Gamma}_L). \end{aligned}$$

Facendo il rapporto membro a membro di queste espressioni, poiché $\bar{V}(0)/\bar{I}(0)$ è pari all'impedenza del carico \bar{Z}_L , risulta:

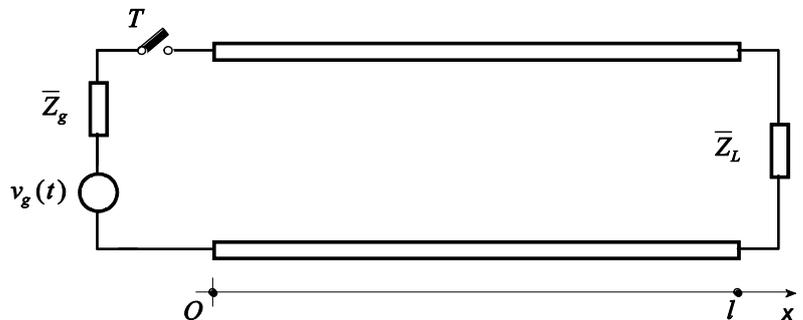
$$\frac{\bar{V}(0)}{\bar{I}(0)} = \bar{Z}_L = \frac{\bar{V}_{dL} (1 + \bar{\Gamma}_L)}{\frac{\bar{V}_{dL}}{\bar{Z}_0} (1 - \bar{\Gamma}_L)} = \bar{Z}_0 \frac{1 + \bar{\Gamma}_L}{1 - \bar{\Gamma}_L},$$

da cui segue:

$$\bar{\Gamma}_L = \frac{\bar{Z}_L - \bar{Z}_0}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_0}. \quad (8.77)$$

Se $\bar{Z}_L \rightarrow \infty$, cioè se l'estremità della linea opposta al generatore è aperta, $\bar{\Gamma}_L = 1$ e dalla (8.74) segue che $\bar{V}_{rL} = \bar{V}_{dL}$ e $\bar{I}_{rL} = -\bar{I}_{dL}$, cioè l'onda di tensione riflessa assume lo stesso valore e la stessa polarità di quella incidente e l'onda di corrente riflessa assume lo stesso valore ma verso opposto di quella incidente; se $\bar{Z}_L = k\bar{Z}_0$, con $1 < k < \infty$, allora $0 < \bar{\Gamma}_L < 1$ e l'onda di tensione riflessa ha ampiezza inferiore di quella incidente ma la medesima polarità, l'onda di corrente riflessa ha ampiezza inferiore di quella incidente ma polarità opposta; se $\bar{Z}_L = \bar{Z}_0$, cioè nel caso di linea adattata, $\bar{\Gamma}_L = 0$, e non si hanno onde riflesse, come d'altra parte già visto; quando $\bar{Z}_L = k\bar{Z}_0$, con $0 < k < 1$, allora $-1 < \bar{\Gamma}_L < 0$, e l'onda di tensione riflessa ha ampiezza inferiore di quella incidente ma polarità opposta e l'onda di corrente ha ampiezza inferiore di quella incidente e la medesima polarità; se $\bar{Z}_L = 0$, cioè se i due terminali dell'estremità della linea opposta al generatore sono collegati tra loro, $\bar{\Gamma}_L = -1$ e dalla (8.74) segue $\bar{V}_{rL} = -\bar{V}_{dL}$ e $\bar{I}_{rL} = \bar{I}_{dL}$, cioè l'onda di tensione riflessa assume lo stesso valore ma polarità opposta di quella incidente e l'onda di corrente riflessa assume lo stesso valore e lo stesso verso di quella incidente.

Per stabilire le costanti complesse \bar{V}_1 e \bar{V}_2 della (8.53) consideriamo il transitorio che ha luogo nella linea chiusa su un carico generico, all'istante della connessione del generatore all'estremo opposto. Con riferimento alla figura, a partire dalla chiusura del tasto T e fino a che l'ingresso non è raggiunto dall'onda riflessa dal carico, la linea appare al suo ingresso come se fosse di lunghezza infinita essendo sede della sola onda diretta, per cui la sua impedenza di ingresso è pari all'impedenza caratteristica \bar{Z}_0 . Pertanto la tensione presente all'ingresso della linea in tale intervallo è pari a $\bar{V}_g \bar{Z}_0 / (\bar{Z}_g + \bar{Z}_0)$. Questa tensione si propaga lungo la linea ed in particolare, a distanza x dal generatore vale:



$$\bar{V}_g \frac{\bar{Z}_0}{\bar{Z}_g + \bar{Z}_0} e^{-\gamma x}.$$

Al tempo l/v tale onda raggiunge il carico all'ascissa $x=l$, dove si produce un'onda riflessa con coefficiente di riflessione dato dalla (8.77), che si propaga dal carico verso il generatore. Alla distanza x dal generatore, cioè alla distanza d dal carico data dalla (8.66), la tensione riflessa vale:

$$\bar{V}_g \frac{\bar{Z}_0}{\bar{Z}_g + \bar{Z}_0} e^{-\gamma l} \bar{\Gamma}_L e^{-\gamma d} = \bar{V}_g \frac{\bar{Z}_0}{\bar{Z}_g + \bar{Z}_0} e^{-\gamma l} \bar{\Gamma}_L e^{-\gamma(l-x)} = \bar{V}_g \frac{\bar{Z}_0}{\bar{Z}_g + \bar{Z}_0} \bar{\Gamma}_L e^{-2\gamma l} e^{\gamma x}.$$

Questa onda al tempo $2l/v$ si presenta al generatore in $x=0$ e, se l'impedenza \bar{Z}_g è diversa da \bar{Z}_0 , si produce una riflessione, ovvero una seconda onda diretta che procede dal generatore verso il carico. Alla distanza x dal generatore la tensione dovuta alla seconda onda diretta è:

$$\bar{V}_g \frac{\bar{Z}_0}{\bar{Z}_g + \bar{Z}_0} e^{-\gamma l} \bar{\Gamma}_L e^{-\gamma l} \bar{\Gamma}_G e^{-\gamma x} = \bar{V}_g \frac{\bar{Z}_0}{\bar{Z}_g + \bar{Z}_0} \bar{\Gamma}_L \bar{\Gamma}_G e^{-2\gamma l} e^{-\gamma x},$$

dove $\bar{\Gamma}_G$ rappresenta il coefficiente di riflessione sul generatore. Procedendo in questa maniera si ottiene una serie infinita di riflessioni successive che determinano, in corrispondenza dell'ascissa x lungo la linea, la tensione:

$$\begin{aligned} \bar{V}(x) &= \bar{V}_g \frac{\bar{Z}_0}{\bar{Z}_g + \bar{Z}_0} \left(e^{-\gamma x} + \bar{\Gamma}_L e^{-\gamma l} e^{\gamma x} + \bar{\Gamma}_L \bar{\Gamma}_G e^{-2\gamma l} e^{-\gamma x} + \dots \right) = \\ &= \bar{V}_g \frac{\bar{Z}_0}{\bar{Z}_g + \bar{Z}_0} \left\{ \left(e^{-\gamma x} + \bar{\Gamma}_L e^{-\gamma l} e^{\gamma x} \right) \left[1 + \bar{\Gamma}_L \bar{\Gamma}_G e^{-2\gamma l} + \left(\bar{\Gamma}_L \bar{\Gamma}_G e^{-2\gamma l} \right)^2 + \dots \right] \right\} = \\ &= \bar{V}_g \frac{\bar{Z}_0}{\bar{Z}_g + \bar{Z}_0} \left(e^{-\gamma x} + \bar{\Gamma}_L e^{-\gamma l} e^{\gamma x} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\bar{\Gamma}_L \bar{\Gamma}_G e^{-2\gamma l} \right)^k; \end{aligned}$$

la serie che compare in questa espressione è convergente essendo $|\bar{\Gamma}_L \bar{\Gamma}_G e^{-2\gamma l}| < 1$ e risulta:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\bar{\Gamma}_L \bar{\Gamma}_G e^{-2\gamma l} \right)^k = \frac{1}{1 - \bar{\Gamma}_L \bar{\Gamma}_G e^{-2\gamma l}}$$

per cui, sostituendo nell'espressione precedente, si trova:

$$\bar{V}(x) = \bar{V}_g \frac{\bar{Z}_0}{\bar{Z}_g + \bar{Z}_0} \frac{e^{-\gamma x} + \bar{\Gamma}_L e^{-\gamma l} e^{\gamma x}}{1 - \bar{\Gamma}_L \bar{\Gamma}_G e^{-2\gamma l}}.$$

Confrontando tale relazione con la (8.53) si deduce che in generale:

$$\bar{V}_1 = \bar{V}_g \frac{\bar{Z}_0}{\bar{Z}_g + \bar{Z}_0} \frac{1}{1 - \bar{\Gamma}_L \bar{\Gamma}_G e^{-2\gamma l}}, \quad (8.78)$$

$$\bar{V}_2 = \bar{V}_g \frac{\bar{Z}_0}{\bar{Z}_g + \bar{Z}_0} \frac{\bar{\Gamma}_L e^{-\gamma l}}{1 - \bar{\Gamma}_L \bar{\Gamma}_G e^{-2\gamma l}}.$$

Esempio: (*Coefficiente di riflessione sul generatore*) A partire dall'istante $2l/v$ dalla chiusura dell'interruttore T , in corrispondenza dell'ingresso della linea si osservano la tensione iniziale, $\bar{V}_g \bar{Z}_0 / (\bar{Z}_g + \bar{Z}_0)$, la tensione \bar{V}_1 prodotta in corrispondenza del generatore e la tensione \bar{V}_2 riflessa dal carico, dove \bar{V}_1 vale in generale $\bar{V}_2 \bar{\Gamma}_G$:

$$\bar{V}(0) = \bar{V}_g \frac{\bar{Z}_0}{\bar{Z}_g + \bar{Z}_0} + \bar{V}_1 + \bar{V}_2 = \bar{V}_g \frac{\bar{Z}_0}{\bar{Z}_g + \bar{Z}_0} + \bar{V}_2 (1 + \bar{\Gamma}_G); \quad (8.79)$$

analogamente, per la corrente in corrispondenza dell'ingresso della linea risulta:

$$\bar{I}(0) = \frac{\bar{V}_g}{\bar{Z}_g + \bar{Z}_0} + \frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_0} - \frac{\bar{V}_2}{\bar{Z}_0} = \frac{\bar{V}_g}{\bar{Z}_g + \bar{Z}_0} - \frac{\bar{V}_2}{\bar{Z}_0} (1 - \bar{\Gamma}_G). \quad (8.80)$$

D'altra parte, all'ingresso della linea si ha:

$$\bar{V}(0) = \bar{V}_g - \bar{Z}_g \bar{I}(0),$$

per cui, sostituendo $\bar{V}(0)$ e $\bar{I}(0)$ rispettivamente dalle (8.79) e (8.80), si ottiene:

$$\bar{V}_g \frac{\bar{Z}_0}{\bar{Z}_g + \bar{Z}_0} + \bar{V}_2 (1 + \bar{\Gamma}_G) = \bar{V}_g - \bar{V}_g \frac{\bar{Z}_g}{\bar{Z}_g + \bar{Z}_0} + \bar{V}_2 \frac{\bar{Z}_g}{\bar{Z}_0} (1 - \bar{\Gamma}_G),$$

da cui segue:

$$\bar{\Gamma}_G = \frac{\bar{Z}_g - \bar{Z}_0}{\bar{Z}_g + \bar{Z}_0}.$$

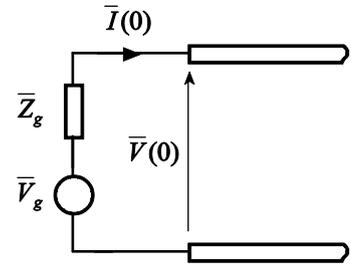
Pertanto la formazione di un'onda riflessa in corrispondenza dell'ingresso della linea è determinata dal valore dell'impedenza interna del generatore \bar{Z}_g e, in particolare, se tale impedenza è uguale all'impedenza caratteristica della linea \bar{Z}_0 , non si originano riflessioni per $x=0$.

Mentre in una linea adattata le ampiezze della tensione e della corrente diminuiscono esponenzialmente con l'allontanarsi dal generatore per effetto del termine $e^{-\alpha x}$ o, nel caso di linea con perdite trascurabili, restano praticamente costanti lungo tutta la linea, in presenza di disadattamento il carico riflette una parte dell'energia incidente, determinando un'onda riflessa. In questo caso, per effetto dell'interferenza tra l'onda diretta e quella riflessa, le ampiezze della tensione e della corrente variano con periodicità lungo la linea; tale combinazione è detta *onda stazionaria*.

Esempio: Consideriamo per semplicità il caso in cui la linea sia senza perdite. Facendo uso delle relazioni (8.77) e (8.69) nell'espressione (8.75), si ottiene:

$$\begin{aligned} \bar{V}(d) &= \bar{V}_{dl} (e^{\gamma d} + \bar{\Gamma}_L e^{-\gamma d}) = \bar{V}_1 e^{-j\beta l} \left(e^{j\beta d} + \frac{\bar{Z}_L - \bar{Z}_0}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_0} e^{-j\beta d} \right) = \frac{\bar{V}_1 e^{-j\beta l}}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_0} (\bar{Z}_L e^{j\beta d} + \bar{Z}_0 e^{j\beta d} + \bar{Z}_L e^{-j\beta d} - \bar{Z}_0 e^{-j\beta d}) = \\ &= \frac{2\bar{V}_1 e^{-j\beta l}}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_0} \left(\bar{Z}_L \frac{e^{j\beta d} + e^{-j\beta d}}{2} + j\bar{Z}_0 \frac{e^{j\beta d} - e^{-j\beta d}}{2j} \right) = \frac{2\bar{V}_1 e^{-j\beta l}}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_0} [\bar{Z}_L \cos(\beta d) + j\bar{Z}_0 \sin(\beta d)]. \end{aligned}$$

Assumiamo che la linea sia adattata all'ingresso, cioè $\bar{Z}_g = \bar{Z}_0$; allora $\bar{\Gamma}_G = 0$ e, dalla (8.78) segue:



$$\bar{V}_1 = \bar{V}_g \frac{\bar{Z}_0}{\bar{Z}_g + \bar{Z}_0} \frac{1}{1 - \bar{\Gamma}_L \bar{\Gamma}_G e^{-2\gamma l}} = \frac{\bar{V}_g}{2} = \frac{V_g}{2} e^{j\omega t}. \quad (8.81)$$

Sostituendo tale identità nell'espressione precedente, nell'ipotesi che sia l'impedenza caratteristica \bar{Z}_0 che quella di carico \bar{Z}_L siano entrambe resistive, si ottiene:

$$\bar{V}(d) = \frac{V_g e^{j(\omega t - \beta l)}}{Z_L + Z_0} [Z_L \cos(\beta d) + jZ_0 \sin(\beta d)] = \frac{V_g e^{j(\omega t - \beta l + \phi)}}{Z_L + Z_0} \sqrt{Z_L^2 \cos^2(\beta d) + Z_0^2 \sin^2(\beta d)},$$

dove ϕ è la fase del numero complesso $Z_L \cos(\beta d) + jZ_0 \sin(\beta d)$. Prendendone la parte reale si ha:

$$v(d, t) = \frac{V_g \sqrt{Z_L^2 \cos^2(\beta d) + Z_0^2 \sin^2(\beta d)}}{Z_L + Z_0} \cos(\omega t - \beta l + \phi). \quad (8.82)$$

Procedendo in maniera analoga per la corrente, dalla (8.76) e dalla (8.81) segue:

$$\begin{aligned} \bar{I}(d) &= \frac{\bar{V}_{dl}}{\bar{Z}_0} (e^{\gamma d} - \bar{\Gamma}_L e^{-\gamma d}) = \frac{\bar{V}_1}{\bar{Z}_0} e^{-j\beta l} \left(e^{j\beta d} - \frac{\bar{Z}_L - \bar{Z}_0}{\bar{Z}_L + \bar{Z}_0} e^{-j\beta d} \right) = \\ &= \frac{\bar{V}_1 e^{-j\beta l}}{\bar{Z}_0 (\bar{Z}_L + \bar{Z}_0)} (\bar{Z}_L e^{j\beta d} + \bar{Z}_0 e^{j\beta d} - \bar{Z}_L e^{-j\beta d} + \bar{Z}_0 e^{-j\beta d}) = \frac{2\bar{V}_1 e^{-j\beta l}}{\bar{Z}_0 (\bar{Z}_L + \bar{Z}_0)} \left(\frac{\bar{Z}_0 e^{j\beta d} + e^{-j\beta d}}{2} + j\bar{Z}_L \frac{e^{j\beta d} - e^{-j\beta d}}{2j} \right) = \\ &= \frac{2\bar{V}_1 e^{-j\beta l}}{\bar{Z}_0 (\bar{Z}_L + \bar{Z}_0)} [\bar{Z}_0 \cos(\beta d) + j\bar{Z}_L \sin(\beta d)] = \frac{V_g e^{j(\omega t - \beta l + \phi')}}{Z_0 (Z_L + Z_0)} \sqrt{Z_L^2 \sin^2(\beta d) + Z_0^2 \cos^2(\beta d)}. \end{aligned}$$

dove ϕ' è la fase del numero complesso $Z_L \sin(\beta d) + jZ_0 \cos(\beta d)$. Infine, prendendone la parte reale si ha:

$$i(d, t) = \frac{V_g \sqrt{Z_L^2 \sin^2(\beta d) + Z_0^2 \cos^2(\beta d)}}{Z_0 (Z_L + Z_0)} \cos(\omega t - \beta l + \phi'). \quad (8.83)$$

Nella figura seguente sono mostrati gli andamenti dei valori massimi:

$$v_M(d) \equiv \frac{V_g \sqrt{Z_L^2 \cos^2(\beta d) + Z_0^2 \sin^2(\beta d)}}{Z_L + Z_0}, \quad (8.84)$$

$$i_M(d) \equiv \frac{V_g \sqrt{Z_L^2 \sin^2(\beta d) + Z_0^2 \cos^2(\beta d)}}{Z_0 (Z_L + Z_0)}, \quad (8.85)$$

rispettivamente, di corrente e tensione lungo la linea in corrispondenza di valori notevoli dell'impedenza caratteristica.

Le relazioni (8.82) e (8.83) sono espresse attraverso il prodotto di due funzioni reali, una della sola distanza d e l'altra del solo tempo t e pertanto non sono rappresentative di un fenomeno propagatorio per cui sono dette onde stazionarie. I punti della linea in cui l'ampiezza della tensione è massima si chiamano *ventri* della tensione, quelli in cui è nulla sono detti *nod*i; analogamente per la corrente.

Esempio: (*Linea aperta*) Consideriamo la circostanza in cui per una linea, nelle stesse condizioni dell'esempio precedente, risulti $Z_L \rightarrow \infty$, ovvero i due terminali dell'estremità opposta al generatore sono aperti. In questo caso, dalle relazioni (8.84) e (8.85) si ha:

$$\begin{aligned} v_M(d) &\equiv V_g \cos(\beta d), \\ i_M(d) &\equiv \frac{V_g}{Z_0} \sin(\beta d), \end{aligned}$$

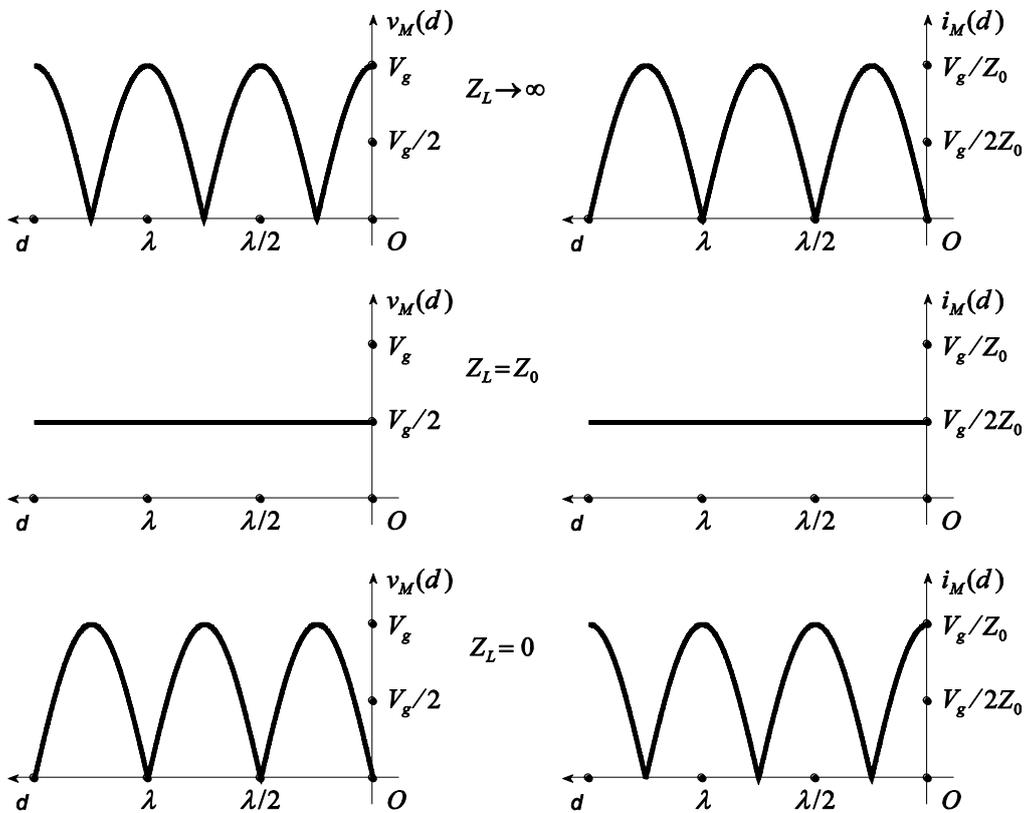
per cui i nodi della tensione si hanno per $d = n\pi/\beta + \pi/(2\beta)$ cioè, dalla (8.9), quando $d = (\lambda/2)(n+1/2)$, con $n = 0, 1, 2, \dots$; i nodi della corrente si hanno per $d = n\pi/\beta$, cioè, dalla (8.9), quando $d = n\lambda/2$, con $n = 0, 1, 2, \dots$.

Esempio: (*Linea cortocircuitata*) Consideriamo la circostanza in cui per una linea, nelle stesse condizioni dell'esempio precedente, risulti $Z_L = 0$, ovvero i due terminali dell'estremità opposta al generatore sono collegati tra loro. In questo caso, dalle relazioni (8.84) e (8.85) si ha:

$$v_M(d) \equiv V_g \sin(\beta d),$$

$$i_M(d) \equiv \frac{V_g}{Z_0} \cos(\beta d),$$

per cui i nodi della tensione si hanno per $d = n\pi/\beta$ cioè, dalla (8.9), quando $d = n\lambda/2$, con $n = 0, 1, 2, \dots$; i nodi della corrente si hanno per $d = n\pi/\beta + \pi/(2\beta)$, cioè, dalla (8.9), quando $d = (\lambda/2)(n+1/2)$, con $n = 0, 1, 2, \dots$.



8.10 Riflessione e rifrazione di onde elettromagnetiche

Consideriamo un'onda armonica piana caratterizzata da un vettore d'onda \vec{k}_i incidente in un punto P situato sulla superficie di separazione tra due mezzi di diversi indici di rifrazione, che, senza perdita di generalità, assumiamo piana e coincidente col piano $z=0$ del sistema di riferimento cartesiano mostrato in figura. Indichiamo con n_1 l'indice di rifrazione del mezzo per $z > 0$ e n_2 l'indice di rifrazione per $z < 0$.

Sia \vec{E}_i il campo elettrico associato a tale onda:

$$\vec{E}_i = \vec{E}_0 \cos(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)$$

dove, dalle relazioni (8.11) e (8.35), il numero d'onda k_i vale:

$$k_i = \frac{\omega}{v_1} = \frac{n_1 \omega}{c}; \quad (8.86)$$

l'onda incidente origina un'onda *riflessa* nella regione $z > 0$ il cui campo elettrico è:

$$\vec{E}_r = \vec{E}_{0r} \cos(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t),$$

in cui:

$$k_r = \frac{\omega}{v_1} = \frac{n_1 \omega}{c} \quad (8.87)$$

e un'onda trasmessa o *rifratta* nella regione $z < 0$ il cui campo elettrico è:

$$\vec{E}_t = \vec{E}_{0t} \cos(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t),$$

con:

$$k_t = \frac{\omega}{v_2} = \frac{n_2 \omega}{c}. \quad (8.88)$$

Affinché sia soddisfatta la condizione di continuità del campo elettrico sulla superficie di separazione tra i due mezzi, deve risultare:

$$\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t \equiv \vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t \equiv \vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t;$$

si noti che le pulsazioni associate ai campi nelle due regioni non differiscono tra loro in quanto sono determinate dalla sorgente che ha prodotto l'onda. Dovendo valere per ogni istante di tempo, da tale relazione segue:

$$\vec{k}_i \cdot \vec{r} = \vec{k}_r \cdot \vec{r} = \vec{k}_t \cdot \vec{r}. \quad (8.89)$$

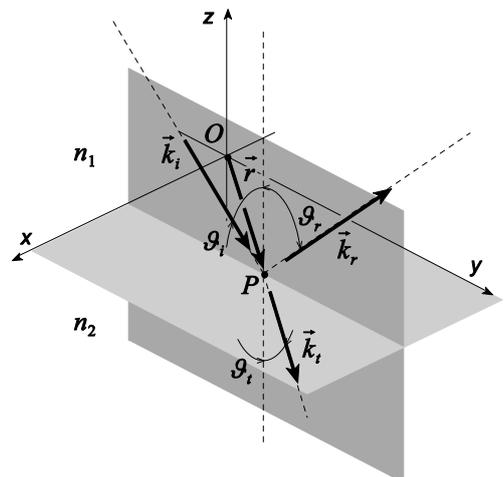
Assumiamo che il vettore \vec{k}_i giaccia nel piano yz , per cui:

$$\vec{k}_i = k_{iy} \hat{y} + k_{iz} \hat{z}$$

e sia, inoltre:

$$\vec{k}_r = k_{rx} \hat{x} + k_{ry} \hat{y} + k_{rz} \hat{z},$$

$$\vec{k}_t = k_{tx} \hat{x} + k_{ty} \hat{y} + k_{tz} \hat{z}.$$



Poiché per la scelta fatta circa la disposizione della superficie su cui incide l'onda il vettore posizione \vec{r} del punto P di incidenza dell'onda è situato sul piano xy :

$$\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y},$$

la relazione (8.89) si esprime come:

$$k_{iy}y = k_{rx}x + k_{ry}y = k_{ix}x + k_{iy}y.$$

Tale identità è assicurata per qualsiasi valore delle variabili x e y se:

$$\begin{aligned} k_{rx} &= k_{ix} = 0, \\ k_{iy} &= k_{ry} = k_{iy}. \end{aligned} \quad (8.90)$$

Queste relazioni mostrano che i vettori \vec{k}_i , \vec{k}_r e \vec{k}_t sono complanari e situati sul *piano di incidenza*, definito dalla direzione di incidenza dell'onda e normale al piano di separazione tra i due mezzi. Esplicitando la relazione (8.90) e facendo uso delle espressioni dei numeri d'onda (8.86), (8.87) e (8.88) si ottiene:

$$\frac{n_1\omega}{c} \sin \vartheta_i = \frac{n_1\omega}{c} \sin \vartheta_r = \frac{n_2\omega}{c} \sin \vartheta_t;$$

dalla prima di queste identità segue:

$$\vartheta_i = \vartheta_r \quad (8.91)$$

e, dalla seconda:

$$n_1 \sin \vartheta_i = n_2 \sin \vartheta_t. \quad (8.92)$$



Willebrord Snel van Royen

Posto

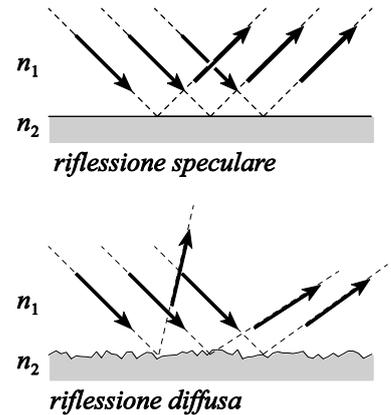
$$\begin{aligned} \vartheta_1 &\equiv \vartheta_i, \\ \vartheta_2 &\equiv \vartheta_t, \end{aligned}$$

l'espressione (8.92) può porsi nella forma:

$$\frac{\sin \vartheta_1}{\sin \vartheta_2} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (8.93)$$

L'identità (8.91) afferma che l'angolo di incidenza e l'angolo di riflessione sono uguali. La relazione (8.93), scoperta dal matematico persiano Ibn Sahl nel 984 e riscoperta dall'astronomo olandese Willebrord Snel van Royen nel 1691, indica che il rapporto tra il seno dell'angolo di incidenza e il seno dell'angolo di rifrazione è costante e pari al rapporto n_2/n_1 tra gli indici di rifrazione dei due mezzi. Sebbene ricavate per le onde piane, queste leggi sono valide per tutti i tipi di onde, inoltre, qualora la superficie di separazione tra i due mezzi è curva, la dimostrazione

procede nella stessa maniera assumendo, quale piano xy , il piano tangente alla superficie curva nel punto di incidenza. Occorre infine notare che la relazione (8.91) ha valore solo nel caso di riflessione speculare, come accade nel caso di luce incidente su di uno specchio. Nel caso di una superficie scabra si verifica una *riflessione diffusa* cioè, in corrispondenza di onde incidenti sulla superficie con angoli uguali le onde riflesse non hanno direzioni tra loro parallele.



Pierre de Fermat

Le leggi della riflessione e della rifrazione possono essere dedotte in maniera alternativa attraverso il *principio di Fermat* il quale afferma che tra tutti i possibili cammini che può percorrere per andare da un punto ad un altro, la luce segue il cammino che richiede il tempo più breve. Tale principio, stabilito da Pierre de Fermat nel 1662, è alla base dell'*ottica geometrica* che studia la propagazione della radiazione elettromagnetica prescindendo dai trasferimenti energetici dovuti all'interazione con la materia. Attraverso tale approccio, che è tanto più corretto quanto più è possibile trascurare l'influenza della materia attraversata dalla radiazione sulla quantità di energia trasportata dalla radiazione stessa, si ottiene un'ottima approssimazione della realtà fisica. La semplicità del metodo dell'ottica geometrica deriva dall'introduzione del concetto di *raggio luminoso* che assume un ruolo fondamentale, analogo a quello di fronte d'onda; tali concetti risultano opportunamente legati consentendo un naturale passaggio da una trattazione all'altra. Senza entrare ulteriormente nel merito, è possibile identificare col termine raggio

luminoso la direzione di propagazione della radiazione, ovvero la direzione del vettore d'onda \vec{k} definito attraverso la relazione (8.12). Dimostriamo le relazioni (8.91) e (8.92) facendo uso del principio di Fermat. Con riferimento alla figura, consideriamo due punti A e B situati nello stesso mezzo ed esprimiamo il cammino tra questi due punti attraverso il punto P posto sulla superficie di separazione tra i due mezzi facendo uso dell'ascissa x di tale punto rispetto all'origine O . Il tempo impiegato per spostarsi da A a B è pari a:

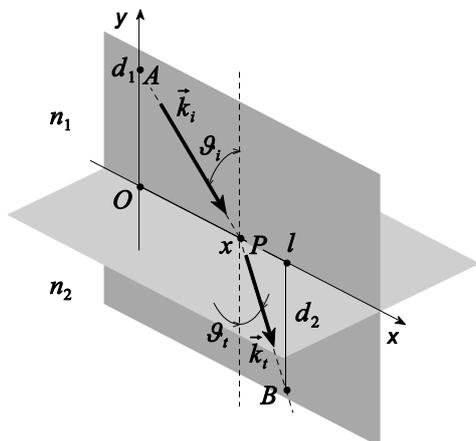
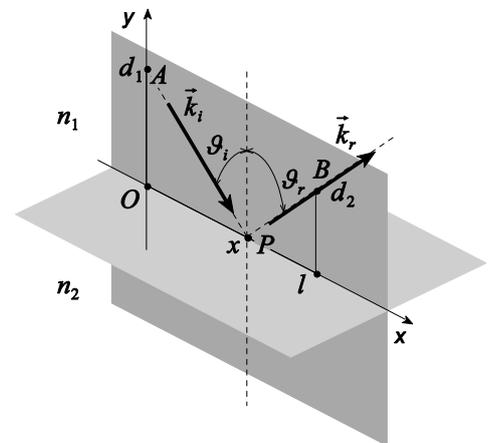
$$t = \frac{\overline{AP}}{v_1} + \frac{\overline{PB}}{v_1} = \frac{1}{v_1} \left[\sqrt{x^2 + d_1^2} + \sqrt{(l-x)^2 + d_2^2} \right];$$

derivando rispetto ad x ed uguagliando a zero si ha:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v_1} \left[\frac{2x}{\sqrt{x^2 + d_1^2}} - \frac{2(l-x)}{\sqrt{(l-x)^2 + d_2^2}} \right] = 0,$$

ovvero:

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + d_1^2}} = \frac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2 + d_2^2}}.$$



Poiché $x/\sqrt{x^2 + d_1^2}$ è il seno di ϑ_i e $(l-x)/\sqrt{(l-x)^2 + d_2^2}$ è il seno di ϑ_r , a tale identità corrisponde:

$$\sin \vartheta_i = \sin \vartheta_r,$$

da cui segue

$$\vartheta_i = \vartheta_r,$$

che coincide con la (8.91). Assumiamo ora che i punti A e B siano situati in mezzi differenti e, analogamente al caso precedente, esprimiamo il cammino attraverso il punto P disposto sulla superficie di separazione tra i due mezzi facendo uso dell'ascissa x . Il tempo impiegato per spostarsi

da A a B vale:

$$t = \frac{\overline{AP}}{v_1} + \frac{\overline{PB}}{v_2} = \frac{\sqrt{x^2 + d_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(l-x)^2 + d_2^2}}{v_2};$$

derivando rispetto ad x ed uguagliando a zero si ha:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{v_1} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + d_1^2}} - \frac{1}{v_2} \frac{2(l-x)}{\sqrt{(l-x)^2 + d_2^2}} = 0,$$

da cui segue:

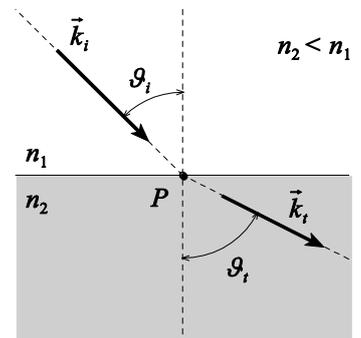
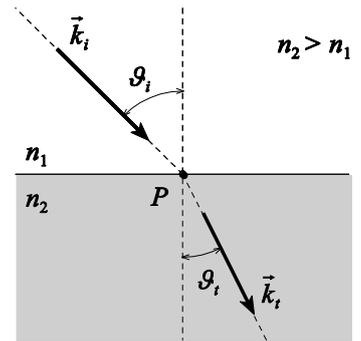
$$\frac{1}{v_1} \frac{x}{\sqrt{x^2 + d_1^2}} = \frac{1}{v_2} \frac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2 + d_2^2}}.$$

Osservando che $x/\sqrt{x^2 + d_1^2}$ è il seno di ϑ_i e $(l-x)/\sqrt{(l-x)^2 + d_2^2}$ è il seno di ϑ_r , a tale identità corrisponde:

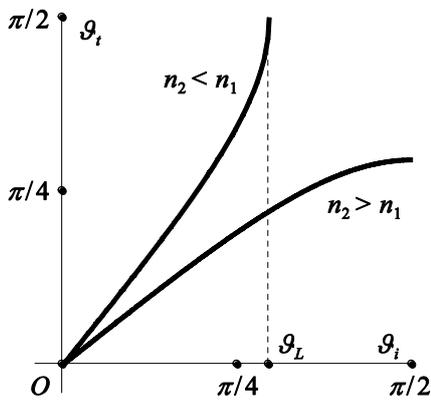
$$\frac{1}{v_1} \sin \vartheta_i = \frac{1}{v_2} \sin \vartheta_r,$$

infine, facendo uso della relazione (8.35) si ottiene la legge di Snel (8.92):

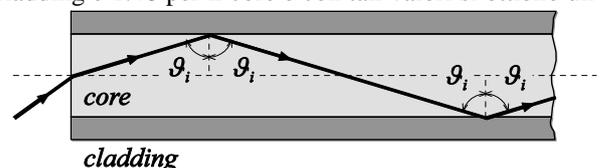
$$n_1 \sin \vartheta_i = n_2 \sin \vartheta_r.$$



Quando $n_2 > n_1$, dalla relazione (8.93) segue che $\sin \vartheta_r < \sin \vartheta_i$ e $\vartheta_r < \vartheta_i$, cioè la direzione dell'onda rifratta è prossima alla normale al piano di incidenza. In questo caso ad angoli di incidenza compresi tra 0 e $\pi/2$ corrisponde un qualsiasi angolo di rifrazione compreso nel medesimo intervallo. Viceversa, se $n_2 < n_1$, la direzione dell'onda rifratta si allontana dalla normale all'interfaccia tra i due mezzi e, in particolare, quando $\sin \vartheta_i = n_2/n_1$ segue $\sin \vartheta_r = 1$, cioè $\vartheta_r = \pi/2$; quando l'angolo di incidenza è tale che $\sin \vartheta_i > n_2/n_1$ non si ha alcuna radiazione rifratta in quanto, dalla (8.93) seguirebbe $\sin \vartheta_r > 1$. Pertanto, in corrispondenza di questi valori dell'angolo di incidenza l'onda incidente viene soltanto riflessa. L'angolo di incidenza tale che $\sin \vartheta_i = n_2/n_1$ è detto *angolo limite* ϑ_L .



Esempio: Nelle *fibre ottiche* la luce viene adoperata per la trasmissione di informazioni. Le fibre ottiche sono costituite da materiali con un'elevata trasparenza alle lunghezze d'onda della luce visibile e dell'infrarosso e sono strutturate in due parti coassiali tra loro, una più interna detta *core*, con indice di rifrazione più elevato di quella esterna, detta *cladding*. Valori tipici degli indici di rifrazione sono 1.46 per il cladding e 1.48 per il core e con tali valori si ottiene un angolo limite di circa 81°. Un raggio di luce si propaga lungo il core della fibra attraverso riflessioni multiple sull'interfaccia col cladding. La trasmissione dell'energia associata alla radiazione avviene senza le perdite prodotte dall'eventuale rifrazione verso l'esterno del core.



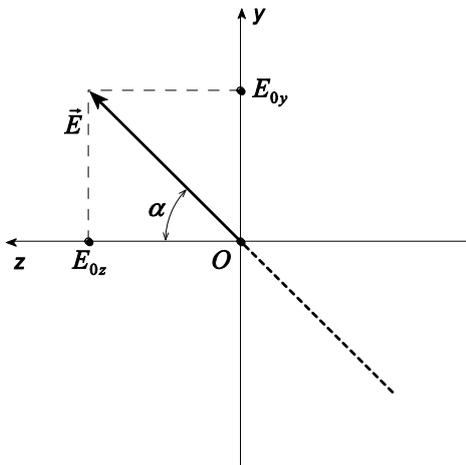
8.11 Polarizzazione

La relazione (8.36) mostra che i campi associati ad un'onda elettromagnetica risultano perpendicolari tra loro e perpendicolari alla direzione di propagazione dell'onda definita attraverso il versore \hat{k} . Possiamo pertanto decomporre il vettore campo elettrico \vec{E} nel piano perpendicolare alla direzione della propagazione; ad esempio, considerando un sistema di riferimento ortogonale con un asse coincidente con la direzione del versore \hat{k} , possiamo decomporre \vec{E} lungo le direzioni degli altri due assi coordinati. Se la differenza di fase tra le due componenti varia in modo casuale nel tempo e nello spazio, il vettore campo elettrico cambia orientazione istante per istante e lo stesso vale per il vettore campo magnetico, essendo perpendicolare ad esso; in tale caso l'onda elettromagnetica è detta *non polarizzata*. Se invece tale differenza di fase si mantiene costante, l'onda è detta *polarizzata*, come, ad esempio, nel caso descritto dalla relazione (8.26).

Assumendo che la direzione di propagazione dell'onda coincida con quella dell'asse x, possiamo esprimere le componenti del campo elettrico nel piano yz, come:

$$E_y = E_{0y} \cos(kx - \omega t), \tag{8.94}$$

$$E_z = E_{0z} \cos(kx - \omega t + \delta) \tag{8.95}$$



dove δ rappresenta la differenza di fase tra le componenti E_z e E_y

Se δ è uguale a zero o a π , la polarizzazione è detta *lineare*. In figura è mostrata la proiezione del vettore \vec{E} perpendicolare alla direzione di propagazione dell'onda. L'estremo libero del vettore campo elettrico oscilla lungo un segmento che forma con l'asse z, un angolo α tale che:

$$\tan \alpha = \frac{E_{0y}}{E_{0z}}$$

Se δ è uguale a $\pi/2$, la relazione (8.95) si esprime come:

$$E_z = E_{0z} \cos\left(kx - \omega t + \frac{\pi}{2}\right) = E_{0z} \sin(kx - \omega t);$$

in questo caso l'estremo libero del vettore campo elettrico descrive un'ellisse intorno alla direzione di propagazione e la polarizzazione è detta *ellittica*. In particolare, quando E_{0y} e E_{0z} sono uguali, la polarizzazione si dice *circolare*.

