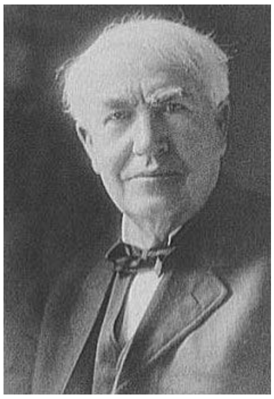
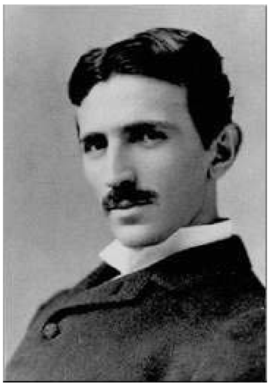
7 CIRCUITI ELETTRICI IN REGIME SINUSOIDALE

Il primo generatore di corrente continua fu realizzato nel 1831 da Faraday; questo dispositivo era costituito da un disco di rame posto in rotazione tra le espansioni polari di una calamita. Collegando un galvanometro tra l'asse del disco ed il bordo, Faraday osservò la generazione di una corrente costante di intensità proporzionale alla velocità di rotazione del disco. Nel 1832 il costruttore di strumenti scientifici francese Hippolyte Pixii ponendo in rotazione un magnete permanente a forma di ferro di cavallo in prossimità di un'elettrocalamita realizzò il primo generatore di corrente alternata; questo rudimentale dispositivo venne migliorato nel 1844 da Luigi Palmieri che sviluppò il primo generatore moderno di corrente alternata.



Thomas Alva Edison

Intorno al 1880 l'energia ottenuta attraverso i generatori di corrente continua aveva acquistato un costo di molte volte inferiore a quella ottenuta attraverso le pile elettriche, tuttavia l'industria elettrotecnica incontrava notevoli difficoltà nel trasporto a distanza della corrente prodotta. Nondimeno, con l'invenzione di Thomas Alva Edison della lampadina ad incandescenza nel 1879, l'illuminazione elettrica cominciò progressivamente a sostituire quella a gas nei centri urbani delle grandi città. Tuttavia, a causa della caduta di tensione lungo i cavi il sistema di elettrificazione di Edison, basato sulla corrente continua, richiedeva l'istallazione di generatori di corrente a distanze di circa un chilometro l'uno dall'altro. Consapevole dei vantaggi della corrente alternata, dovuti essenzialmente alla possibilità di variarne l'ampiezza con elevati rendimenti per mezzo di trasformatori, nel 1888 il fisico di origine croata Nikola Tesla propose all'imprenditore George Westinghouse una rete elettrica basata su questo tipo di corrente. Contemporaneamente, per garantire il funzionamento degli impianti industriali con la corrente alternata, Tesla perfezionò il motore a corrente alternata sviluppato da Galileo Ferraris nel 1885 che utilizzava un campo magnetico rotante ottenuto da due bobine ortogonali, comandate da correnti opportunamente sfasate per trascinare un indotto costituito da un elettromagnete. La competizione tra i due sistemi di elettrificazione si concluse col favore della corrente alternata nel 1895 quando fu inaugurata la prima centrale idroelettrica della potenza di poco più di 300 kW presso le cascate del Niagara, collegata ad una rete in grado di trasportare energia con basse perdite sino alla città di Buffalo distante circa 35 km dall'impianto.



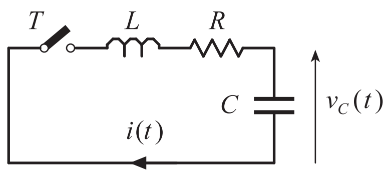
Nikola Tesla

Interno della centrale elettrica delle cascate del Niagara, in basso a destra sono visibili i generatori di corrente alternata (*alternatori*) progettati da Tesla.

Lo studio dei circuiti sollecitati attraverso generatori che erogano forze elettromotrici variabili sinusoidalmente nel tempo oltre ad essere importante dal punto di vista pratico riveste particolare interesse anche dal punto di vista teorico; come si vedrà nel seguito un qualsiasi segnale reale periodico può essere rappresentato come la composizione di infiniti segnali sinusoidali, per cui lo studio delle eccitazioni sinusoidali rappresenta il punto di partenza per uno studio più generale dei circuiti. Infine, il metodo generalmente adoperato per l'analisi dei circuiti eccitati sinusoidalmente si presta ad essere facilmente applicato ad altri sistemi stimolati nella stessa maniera.

Per affrontare tale studio occorre fare delle ipotesi relative alle grandezze in gioco in questo contesto; tali ipotesi tuttavia non risultano limitanti per un ampio intervallo di frequenze e per la maggior parte dei componenti in uso in tali circuiti. Si assume che in ogni istante le correnti sono le stesse che vi sarebbero nel caso stazionario, ossia il vettore densità di corrente dovrà essere considerato sinusoidale, quindi varranno la legge di Ohm e le leggi di Kirchhoff. Si riterrà inoltre che la corrente cambi nel tempo in modo sufficientemente lento perché tutte le sue variazioni si propaghino istantaneamente attraverso il circuito. Infine si assume che le caratteristiche capacitive, induttive e resistive della rete in esame siano localizzate in regioni di estensione limitata del circuito in esame.

7.1 Circuito *RLC*



La rete costituita dalla serie di una resistenza *R*, un induttanza *L* ed una capacità *C* prende il nome di *circuito RLC*. Sia V_{C0} la differenza di potenziale presente tra le armature del condensatore nell'istante iniziale in cui viene chiuso l'interruttore *T*. Indicando con $v_C(t)$ la differenza di potenziale ai capi del condensatore al tempo generico, si ha:

$$L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)+v_C(t)=0, \tag{7.1}$$

dove, se $q(t)$ indica la carica sul condensatore, $v_C(t)$ vale:

$$v_C(t)=\frac{q(t)}{C}=V_{C0}+\frac{1}{C}\int_0^t i(\xi)\,d\xi, \tag{7.2}$$

per cui, sostituendo nell'espressione precedente, si ha:

$$L\frac{di(t)}{dt}+Ri(t)+V_{C0}+\frac{1}{C}\int_0^t i(\xi)\,d\xi=0,$$

e derivando ambo i membri segue:

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{di(t)}{dt}+\frac{1}{LC}i(t)=0. \tag{7.3}$$

Per integrare questa equazione differenziale poniamo $i(t)=\lambda e^{\alpha t}$ dove, in generale, il coefficiente α è un numero complesso; sostituendo tale espressione della corrente nella (7.3) si ottiene:

$$\alpha^2\lambda e^{\alpha t}+\frac{R}{L}\alpha\lambda e^{\alpha t}+\frac{1}{LC}\lambda e^{\alpha t}=0$$

e, dividendo ambo i membri per $\lambda e^{\alpha t}$ si perviene all'equazione caratteristica:

$$\alpha^2 + \frac{R}{L}\alpha + \frac{1}{LC} = 0,$$

che ha soluzioni:

$$\alpha_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}} = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\Delta},$$

dove si è posto:

$$\Delta \equiv \frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC};$$

le corrispondenti soluzioni dell'equazione differenziale, $e^{\alpha_1 t}$ e $e^{\alpha_2 t}$, sono due soluzioni indipendenti e di conseguenza è soluzione anche una loro combinazione lineare:

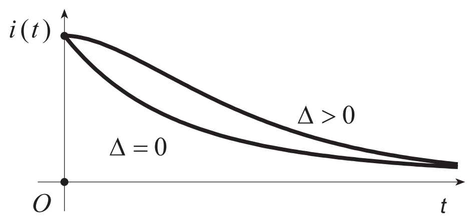
$$i(t) = a\,e^{\alpha_1 t} + b\,e^{\alpha_2 t}.$$

Si noti che, siccome α_1 e α_2 sono complessi, anche $e^{\alpha_1 t}$ e $e^{\alpha_2 t}$ lo sono, così, poiché $i(t)$ deve essere una quantità reale in quanto suscettibile di misura, necessariamente *a* e *b* devono essere complessi. In relazione al segno di Δ si hanno tre differenti soluzioni dell'equazione differenziale. Se $\Delta > 0$, ovvero se $R > 2\sqrt{L/C}$, allora α_1 e α_2 sono dei numeri reali negativi, così la soluzione è la somma di due esponenziali decrescenti:

$$i(t) = a\,e^{-|\alpha_1|t} + b\,e^{-|\alpha_2|t}.$$

Se $\Delta = 0$, ovvero se $R = 2\sqrt{L/C}$, allora α_1 e α_2 sono reali e coincidenti e valgono, in particolare, $-R/(2L)$, così si prova che:

$$i(t) = (c + kt)\,e^{-\frac{R}{2L}t}.$$



Infine, se $\Delta < 0$, ovvero se $R < 2\sqrt{L/C}$, allora α_1 e α_2 sono complessi, pertanto, se si pone:

$$\omega_0^{\,2} \equiv -\Delta = \frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2},$$

è possibile scrivere:

$$\alpha_{1,2} = -\frac{R}{2L} \pm j\omega_0$$

così, sostituendo nell'espressione di $i(t)$ si ha[1]:

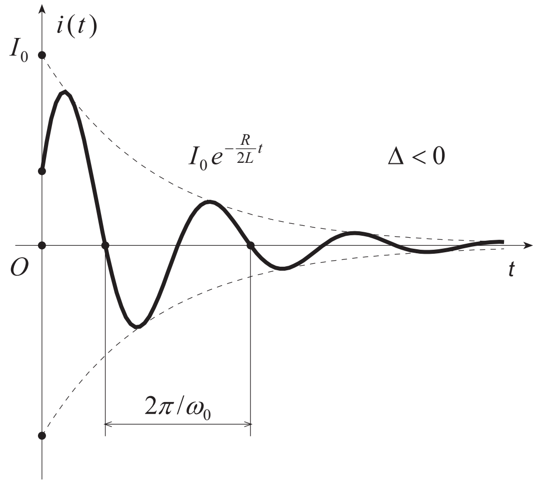
$$\begin{aligned} i(t) &= a\,e^{-\frac{R}{2L}t}e^{j\omega_0 t} + b\,e^{-\frac{R}{2L}t}e^{-j\omega_0 t} = \\ &= e^{-\frac{R}{2L}t}\left[a\cos(\omega_0 t) + ja\sin(\omega_0 t) + b\cos(\omega_0 t) - jb\sin(\omega_0 t)\right] = \\ &= e^{-\frac{R}{2L}t}\left[(a+b)\cos(\omega_0 t) + j(a-b)\sin(\omega_0 t)\right], \end{aligned}$$

posto quindi:

$$\begin{aligned} a+b &\equiv I_0 \sin\phi, \\ j(a-b) &\equiv I_0 \cos\phi, \end{aligned}$$

segue:

$$\begin{aligned} i(t) &= I_0 e^{-\frac{R}{2L}t}\left[\cos(\omega_0 t)\sin\phi + \sin(\omega_0 t)\cos\phi\right] = \\ &= I_0 e^{-\frac{R}{2L}t}\sin(\omega_0 t + \phi). \end{aligned}$$



Si osservi che, indipendentemente dal segno del discriminante Δ, la corrente $i(t)$ si annulla sempre nel limite $t \to \infty$.

7.2 Bilanci energetici nel circuito *LC*

Il circuito *RLC* nel limite ideale in cui *R* è nulla è detto *circuito LC*, in tale caso l'equazione differenziale che lo descrive si ricava da quella del circuito *RLC* (7.3) ponendo *R* uguale a zero:

$$\frac{d^2 i(t)}{dt^2} + \frac{1}{LC}i(t) = 0,$$

la cui soluzione è:

$$i(t) = I_0 \sin(\omega_0 t + \phi), \tag{7.4}$$

con:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}; \tag{7.5}$$

[1] Si fa uso della formula di Eulero:

$$e^{j\varphi} = \cos\varphi + j\sin\varphi.$$

dove ω_0 prende il nome di *pulsazione di oscillazione libera* del circuito *RLC*. Le due costanti, ϕ e I_0, sono ricavate a partire dalle condizioni iniziali. Assumendo che all'istante iniziale la bobina non sia percorsa da corrente, si ha:

$$\phi = 0 .$$

Poiché questo circuito è privo di elementi dissipativi, il valore massimo dell'energia immagazzinata nella bobina, $I_0^2 L/2$, deve essere uguale al valore massimo dell'energia immagazzinata nel condensatore, $V_{C0}^2 C/2$, essendo V_{C0} la differenza di potenziale presente all'istante iniziale tra le armature del condensatore; pertanto:

$$I_0 = V_{C0}\omega_0 C . \tag{7.6}$$

La differenza di potenziale ai capi del condensatore per $\phi = 0$ si ottiene dalla (7.1) per $R = 0$, sostituendo a $i(t)$ la sua espressione dalla (7.4) con la posizione (7.6):

$$v_C(t) = -L\frac{di(t)}{dt} = -LI_0\omega_0 \cos(\omega_0 t) = -V_{C0}LC\omega_0^2 \cos(\omega_0 t) = -V_{C0}\cos(\omega_0 t) ,$$

così l'energia immagazzinata istantaneamente nel condensatore è:

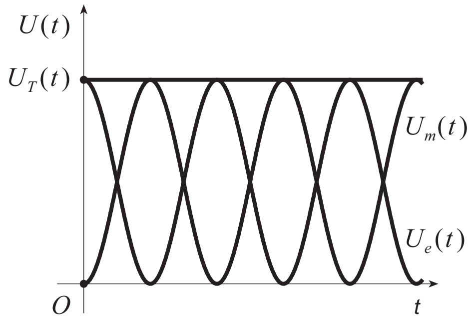
$$U_e(t) = \frac{1}{2}Cv_C^2(t) = \frac{1}{2}CV_{C0}^2 \cos^2(\omega_0 t) ,$$

mentre l'energia immagazzinata istantaneamente nella bobina è:

$$U_m(t) = \frac{1}{2}Li^2(t) = \frac{1}{2}LI_0^2 \sin^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2}CV_{C0}^2 \sin^2(\omega_0 t),$$

e l'energia totale immagazzinata istantaneamente nel circuito *LC* è:

$$U_T(t) = U_e(t) + U_m(t) = \frac{1}{2}CV_{C0}^2 \cos^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2}CV_{C0}^2 \sin^2(\omega_0 t) = \frac{1}{2}CV_{C0}^2 ,$$

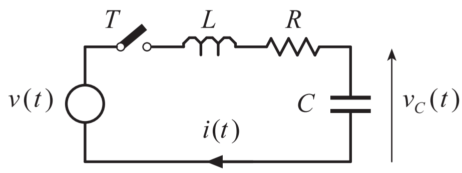


cioè pari all'energia immagazzinata nel condensatore all'istante iniziale. In figura sono mostrati i grafici delle funzioni $U_e(t)$, $U_m(t)$ e della loro somma $U_T(t)$.

L'osservazione che la scarica di una bottiglia di Leyda non consiste nel solo passaggio di elettricità da un'armatura all'altra ma da una serie di oscillazioni smorzate fu fatta da Henry nel 1842. Sebbene non conoscesse tale studio, Hermann von Helmoholtz adottò questa ipotesi nella formulazione del principio di conservazione dell'energia. Il processo di scarica fu studiato analiticamente da Thomson nel 1855 che, utilizzando la teoria del potenziale, identificò le circostanze in cui si manifestava la scarica oscillatoria e trovò l'espressione (7.5) della pulsazione di oscillazione. Infine nel 1869 Helmoholtz provò che si potevano ottenere delle oscillazioni elettriche in una bobina collegata alle armature di un condensatore.

7.3 Circuito RLC forzato

Supponiamo di aggiungere un generatore di forza elettromotrice sinusoidale $v(t)$, di pulsazione ω, alla serie dei componenti che costituiscono il circuito *RLC*. Se:



$$v(t) = V_0 \cos(\omega t), \tag{7.7}$$

allora l'equazione che descrive il nuovo circuito è:

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + v_C(t) = v(t).$$

Sostituendo a $v_C(t)$ e a $v(t)$ le loro espressioni, rispettivamente dalle (7.2) e (7.7), e riordinando, si ha:

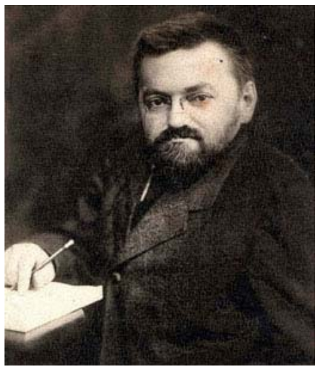
$$\frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) + \frac{1}{LC}\int_0^t i(\xi)\,d\xi = \frac{V_0}{L}\cos(\omega t) - \frac{V_{C0}}{L}. \tag{7.8}$$

L'equazione che esprime la legge di variazione della differenza di potenziale ai capi del condensatore si ricava derivando ambo i membri dell'equazione integrale (7.2) che lega $v_C(t)$ a $i(t)$:

$$\frac{dv_C(t)}{dt} = \frac{i(t)}{C},$$

sostituendo $i(t)$ da tale equazione nella (7.8) si ha:

$$\frac{d^2 v_C(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dv_C(t)}{dt} + \frac{1}{LC}v_C(t) = \frac{V_0}{LC}\cos(\omega t) - \frac{V_{C0}}{LC}. \tag{7.9}$$


Charles Proteus Steinmetz

L'equazione integro-differenziale (7.8) che stabilisce la legge di variazione della corrente attraverso il circuito e l'equazione differenziale (7.9) che stabilisce la legge di variazione della differenza di potenziale ai capi del condensatore, definite le opportune condizioni iniziali, possono essere risolte facendo uso dei tradizionali metodi, così come si è fatto per il circuito privo di sollecitazione. Tuttavia nel caso di stimoli sinusoidali conviene far uso di un metodo particolare, introdotto dall'ingegnere tedesco Charles Proteus Steinmetz nel 1893, la cui applicazione si rivela particolarmente efficace in tale ambito.

7.4 Metodo simbolico

A partire dall'equazione differenziale:

$$a\frac{d^2y(t)}{dt^2}+b\frac{dy(t)}{dt}+cy(t)=f(t) \tag{7.10}$$

consideriamo la nuova equazione che si ottiene aggiungendo al secondo membro della (7.10) la funzione $jg(t)$

$$a\frac{d^2\omega(t)}{dt^2}+b\frac{d\omega(t)}{dt}+c\omega(t)=f(t)+jg(t). \tag{7.11}$$

Si noti che si è fatto uso di un simbolo diverso, $\omega(t)$, per rappresentare la soluzione di questa equazione che, in generale, è diversa dalla soluzione $y(t)$ della (7.10). La funzione $\omega(t)$ è, in generale, complessa e pertanto può essere espressa come:

$$\omega(t)=u(t)+jv(t),$$

dove $u(t)$ e $v(t)$ sono due funzioni reali. La funzione $\omega(t)$ prende il nome di *estensione complessa* di $u(t)$. Sostituendo nella (7.11), si ha:

$$a\left[\frac{d^2u(t)}{dt^2}+j\frac{d^2v(t)}{dt^2}\right]+b\left[\frac{du(t)}{dt}+j\frac{dv(t)}{dt}\right]+c\left[u(t)+jv(t)\right]=f(t)+jg(t)$$

ed uguagliando, quindi, le parti reali e quelle immaginarie, si ha:

$$a\frac{d^2u(t)}{dt^2}+b\frac{du(t)}{dt}+cu(t)=f(t),$$
$$a\frac{d^2v(t)}{dt^2}+b\frac{dv(t)}{dt}+cv(t)=g(t),$$

ovvero la funzione $u(t)$ è soluzione dell'equazione originaria (7.10). Queste considerazioni sono la base della regola di soluzione di equazioni differenziali detta *metodo simbolico*. A partire da una certa equazione, (7.10), scritta in forma normale, si costruisce una seconda equazione (7.11) sommando una funzione $jg(t)$ al secondo membro. L'equazione (7.11) è più semplice da risolvere della (7.10) ed è caratterizzata dal fatto che la parte reale $u(t)$ della sua soluzione, $\omega(t)$, è soluzione dell'equazione (7.10). L'individuazione della forma funzionale di $g(t)$ dipende dalla espressione di $f(t)$; se, ad esempio, risulta:

$$f(t)=K\cos(\omega t),$$

allora è opportuno che sia

$$g(t) = K\sin(\omega t),$$

così:

$$f(t) + jg(t) = K\cos(\omega t) + jK\sin(\omega t) = Ke^{j\omega t}.$$

Pertanto, in questo caso, per ottenere l'equazione (7.11) a partire dalla (7.10), l'applicazione del metodo corrisponde alla sostituzione formale, nella (7.10) del termine $\cos(\omega t)$ con $e^{j\omega t}$.

7.5 Soluzione del circuito *RLC* forzato a regime

Applichiamo il metodo simbolico all'equazione (7.8); pertanto sostituiamo formalmente $\cos(\omega t)$ con $e^{j\omega t}$:

$$\frac{d\overline{I}(t)}{dt} + \frac{R}{L}\overline{I}(t) + \frac{1}{LC}\int_0^t \overline{I}(\xi)\,d\xi = \frac{V_0}{L}e^{j\omega t} - \frac{V_{C0}}{L},$$

e deriviamo rispetto al tempo:

$$\frac{d^2\overline{I}(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{d\overline{I}(t)}{dt} + \frac{1}{LC}\overline{I}(t) = j\omega\frac{V_0}{L}e^{j\omega t}. \qquad (7.12)$$

La soluzione generale di questa equazione può essere posta nella forma $\overline{I}(t) + \overline{I}_O(t)$ dove $\overline{I}_O(t)$ indica la soluzione dell'equazione omogenea associata alla (7.12):

$$\frac{d^2\overline{I}_O(t)}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{d\overline{I}_O(t)}{dt} + \frac{1}{LC}\overline{I}_O(t) = 0, \qquad (7.13)$$

mentre $\overline{I}(t)$ rappresenta una soluzione particolare della (7.12). L'equazione omogenea (7.13), uguale alla (7.3), è già stata risolta nell'ambito dello studio del circuito *RLC* non forzato e, in particolare, si è verificato che la corrispondente soluzione si annulla nel limite dei tempi lunghi. Essendo interessati allo studio del circuito *RLC* a regime, quando il transitorio si può ritenere esaurito, non teniamo conto del termine $\overline{I}_O(t)$.

Per stabilire l'espressione di $\overline{I}(t)$ supponiamo che sia:

$$\overline{I}(t) = \overline{I}_0 e^{j\omega t},$$

sostituendo nella (7.12) si ha:

$$-\omega^2\overline{I}_0 e^{j\omega t} + \frac{R}{L}j\omega\overline{I}_0 e^{j\omega t} + \frac{1}{LC}\overline{I}_0 e^{j\omega t} = j\omega\frac{V_0}{L}e^{j\omega t},$$

da cui, dividendo per $e^{j\omega t}$ e sviluppando, segue:

$$\overline{I}_0 = \frac{j\omega V_0}{L} \frac{1}{-\omega^2 + j\omega \frac{R}{L} + \frac{1}{LC}} = \frac{V_0}{\frac{-\omega^2 L}{j\omega} + \frac{j\omega R}{L}\frac{L}{j\omega} + \frac{1}{LC}\frac{L}{j\omega}} = \frac{V_0}{R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}. \tag{7.14}$$

Poniamo quindi:

$$\overline{Z} \equiv R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right),$$

allora, indicando con Z e ϕ rispettivamente il modulo e l'argomento di $\overline{Z}$:

$$\begin{aligned} Z &\equiv \left|\overline{Z}\right| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}, \\ \tan\phi &\equiv \frac{1}{R}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right), \end{aligned} \tag{7.15}$$

l'espressione di $\overline{I}(t)$ diventa:

$$\overline{I}(t) = \overline{I}_0 e^{j\omega t} = \frac{V_0}{\overline{Z}} e^{j\omega t} = \frac{V_0 e^{j\omega t}}{Z e^{j\phi}} = \frac{V_0}{Z} e^{j(\omega t - \phi)}.$$

Alla luce dell'applicazione del metodo simbolico, la corrente $i(t)$ si valuta determinando la parte reale di $\overline{I}(t)$:

$$i(t) = \mathcal{R}e\left\{\overline{I}(t)\right\} = \mathcal{R}e\left\{\frac{V_0}{Z} e^{j(\omega t - \phi)}\right\} = \frac{V_0}{Z}\cos(\omega t - \phi);$$

La differenza di potenziale ai capi del condensatore $v_C(t)$ può essere determinata applicando lo stesso metodo all'equazione (7.9), tuttavia, poiché:

$$v_C(t) = V_{C0} + \frac{1}{C}\int_0^t i(\xi)\, d\xi,$$

applicando il metodo simbolico a tale relazione, si ha:

$$\overline{V}_C(t) = V_{C0} + \frac{1}{C}\int_0^t \overline{I}(\xi)\, d\xi;$$

in questa espressione V_{C0} e l'addendo derivante dall'estremo inferiore di integrazione determineranno un termine il cui effetto è limitato alla durata del transitorio, pertanto non ne teniamo conto; così, sostituendo a $\overline{I}(t)$ la sua espressione, si ha:

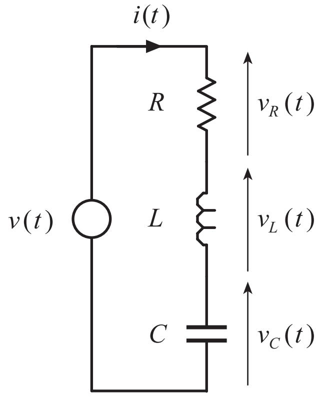
$$\overline{V}_C(t)=\frac{1}{C}\int^t \overline{I}(\xi)\,d\xi=\frac{1}{C}\int^t \overline{I}_0 e^{j\omega t}\,d\xi=\frac{1}{j\omega C}\overline{I}_0 e^{j\omega t}=\frac{\overline{I}(t)}{j\omega C},$$

la cui parte reale è pari a $v_C(t)$.

A causa della scarsa preparazione matematica degli ingegneri elettrotecnici della fine del 19° secolo, il metodo simbolico non fu immediatamente accettato. Per migliorarne la comprensione Steinmetz a partire dal 1897 pubblicò diversi manuali in cui il metodo era applicato in varie circostanze, così, attraverso tali scritti e le lezioni tenute, il suo metodo fu gradualmente adottato nello studio dei circuiti eccitati sinusoidalmente.

7.6 Impedenza

Nel circuito rappresentato in figura, indicando con $v_R(t)$, $v_L(t)$, e $v_C(t)$ rispettivamente le differenze di potenziale ai capi della resistenza, della bobina e del condensatore, risulta:



$$v_R(t)=Ri(t),$$
$$v_L(t)=L\frac{di(t)}{dt},$$
$$v_C(t)=V_{C0}+\frac{1}{C}\int_0^t i(\xi)\,d\xi.$$

Per la seconda legge di Kirchhoff, se $v(t)$ è la forza elettromotrice erogata dal generatore, con

$$v(t)=V_0\cos(\omega t),$$

risulta:

$$v(t)=v_R(t)+v_L(t)+v_C(t).$$

La descrizione del circuito in esame può essere svolta equivalentemente attraverso l'uso del metodo simbolico; applicando direttamente tale procedimento alle espressioni di $v_R(t)$, $v_L(t)$, e $v_C(t)$ si ha[2]:

$$\overline{V}_R=R\overline{I},$$
$$\overline{V}_L=j\omega L\overline{I},$$
$$\overline{V}_C=\frac{1}{j\omega C}\overline{I};$$

sommando membro a membro, se $\overline{V}$ rappresenta l'estensione complessa di $v(t)$, allora:

[2] Per comodità di scrittura si sottintendono le dipendenze temporali delle estensioni complesse.

$$\overline{V} = \overline{V}_R + \overline{V}_L + \overline{V}_C = \left(R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} \right) \overline{I} = \overline{Z}\,\overline{I} \,.$$

La quantità $\overline{Z}$ pari a $R + j\omega L + 1/(j\omega C)$ prende il nome di *impedenza* del circuito in esame. Si osservi che, a differenza della resistenza di un circuito, l'impedenza non rappresenta una caratteristica intrinseca di un circuito, poiché dipende dalla pulsazione dell'eccitazione sinusoidale applicata. L'unità di misura del modulo dell'impedenza è l'ohm. La relazione

$$\overline{V} = \overline{Z}\,\overline{I} \,,$$

che lega l'estensione complessa della forza elettromotrice applicata all'estensione complessa della corrente attraverso l'impedenza è detta *legge di Ohm generalizzata*. Dall'esame della forma di $\overline{Z}$ è possibile ricavare l'espressione delle impedenze associate alla resistenza, alla bobina ed al condensatore:

$$\overline{Z}_R \equiv R$$

$$\overline{Z}_L \equiv j\omega L = jX_L \,, \tag{7.16}$$

$$\overline{Z}_C \equiv \frac{1}{j\omega C} = -j\frac{1}{\omega C} = jX_C \,; \tag{7.17}$$

dove X_L pari a ωL e X_C pari a $-1/(\omega C)$ prendono il nome, rispettivamente, di *reattanza induttiva* e *reattanza capacitiva*. Alla luce dell'espressione della legge di Ohm generalizzata e della validità delle leggi di Kirchhoff è possibile dedurre che lo studio delle reti soggette ad uno stimolo di tipo sinusoidale procede in maniera analoga al caso degli stimoli continui, purché si adoperi il concetto di impedenza per la descrizione dei componenti della rete. Pertanto il collegamento in serie di *n* impedenze $\overline{Z}_1, \overline{Z}_2, \ldots, \overline{Z}_n$ è equivalente ad un'unica impedenza $\overline{Z}$ di valore pari a:

$$\overline{Z} = \sum_{k=1}^{n} \overline{Z}_k \,,$$

mentre se le *n* impedenze sono connesse in parallelo risulta:

$$\overline{Z} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\overline{Z}_k}} \,.$$

Osserviamo infine che, in generale, un'impedenza può essere espressa nella forma:

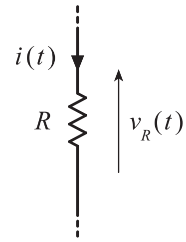
$$\overline{Z} \equiv R + jX \,,$$

dove *X* è detta, in generale, *reattanza*. L'inverso di un'impedenza:

$$\overline{Y} = \frac{1}{\overline{Z}}$$

è denominato *ammetenza*. I tre elementi più semplici che costituiscono l'impedenza sono la resistenza, l'induttanza e la capacità; nel seguito analizzeremo separatamente le caratteristiche di ciascuno di questi componenti.

7.6.1 Impedenza resistiva



Consideriamo una resistenza R percorsa da una corrente:

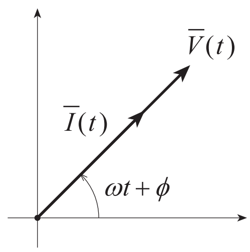
$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi),$$

dalla legge di Ohm segue:

$$v(t) = Ri(t) = RI_0 \cos(\omega t + \phi) = V_0 \cos(\omega t + \phi),$$

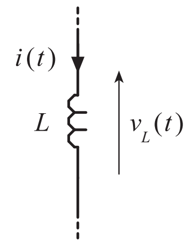
dove si è posto:

$$V_0 \equiv RI_0 .$$



Il fatto che l'impedenza associata ad un resistore coincida con la sua resistenza fa si che le relazioni tradizionali forniscano il legame tra corrente e differenza di potenziale senza dover ricorrere al metodo simbolico. Ciò implica, per altro, che la differenza di potenziale ai capi della resistenza risulta in fase con la corrente che la percorre.

7.6.2 Impedenza induttiva



Consideriamo una bobina di induttanza L percorsa dalla corrente:

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \phi);$$

posto

$$\overline{I}(t) = I_0 e^{j(\omega t + \phi)},$$

siccome l'impedenza associata alla bobina vale:

$$\overline{Z}_L \equiv j\omega L = \omega L e^{j\frac{\pi}{2}},$$

l'estensione complessa della differenza di potenziale ai suoi capi è:

$$\overline{V} = \overline{I}\,\overline{Z}_L = I_0 e^{j(\omega t + \phi)} \omega L e^{j\frac{\pi}{2}} = \omega L I_0 e^{j\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right)} = V_0 e^{j\left(\omega t + \phi + \frac{\pi}{2}\right)},$$

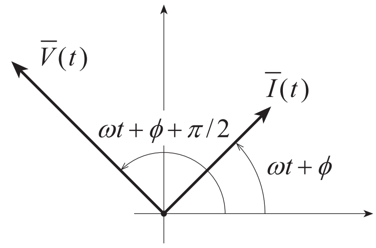
dove si è posto:

$$V_0 \equiv \omega L I_0 .$$

I due termini:

$$\overline{I}\left(t\right)=I_0e^{j(\omega t+\phi)},$$

$$\overline{V}=V_0e^{j\left(\omega t+\phi+\frac{\pi}{2}\right)},$$



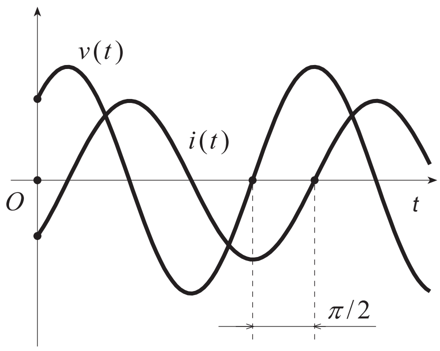
possono essere considerati rappresentativi di due vettori che spiccano dal medesimo punto e ruotano nella stessa direzione, convenzionalmente antioraria, con velocità angolare pari a ω, mantenendosi uno, $\overline{V}$, sfasato in anticipo di 90° rispetto all'altro, $\overline{I}$. Queste entità prendono il nome di *fasori*. Per ricavare la differenza di potenziale $v\left(t\right)$ ai capi della bobina valutiamo la parte reale di $\overline{V}$:

$$v\left(t\right)=\mathcal{Re}\left\{\overline{V}\right\}=\mathcal{Re}\left\{V_0e^{j\left(\omega t+\phi+\frac{\pi}{2}\right)}\right\}=V_0\cos\left(\omega t+\phi+\frac{\pi}{2}\right);$$

quindi, la differenza di potenziale sinusoidale ai capi della bobina ha ampiezza pari a V_0 ed è sfasata in anticipo di 90° rispetto alla corrente $i\left(t\right)$. Dall'espressione di V_0 segue inoltre che:

$$\lim_{\omega\to 0}V_0=\lim_{\omega\to 0}\omega LI_0=0,$$

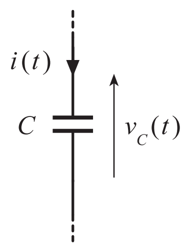
$$\lim_{\omega\to\infty}I_0=\lim_{\omega\to\infty}\frac{V_0}{\omega L}=0;$$



tali relazioni possono essere interpretate affermando che, nel limite di uno stimolo continuo ($\omega\to 0$) la bobina agisce come un cortocircuito mentre, nel limite delle alte frequenze ($\omega\to\infty$) la bobina si comporta come un circuito aperto.

7.6.3 Impedenza capacitiva

Consideriamo un condensatore di capacità C alimentato dalla corrente:



$$i\left(t\right)=I_0\cos\left(\omega t+\phi\right);$$

posto:

$$\overline{I}\left(t\right)=I_0e^{j(\omega t+\phi)},$$

poiché l'impedenza associata al condensatore è:

$$\overline{Z}_C=\frac{1}{j\omega C}=-j\frac{1}{\omega C}=\frac{1}{\omega C}e^{-j\frac{\pi}{2}},$$

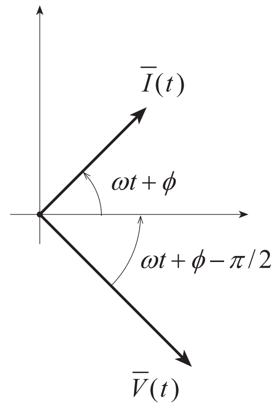
l'estensione complessa della differenza di potenziale ai suoi capi è:

$$\overline{V} = \overline{I}\,\overline{Z}_C = I_0 e^{j(\omega t+\phi)} \frac{1}{\omega C} e^{-j\frac{\pi}{2}} = I_0 \frac{1}{\omega C} e^{j\left(\omega t+\phi-\frac{\pi}{2}\right)} = V_0 e^{j\left(\omega t+\phi-\frac{\pi}{2}\right)},$$

dove si è posto:

$$V_0 \equiv \frac{I_0}{\omega C}.$$

I termini:



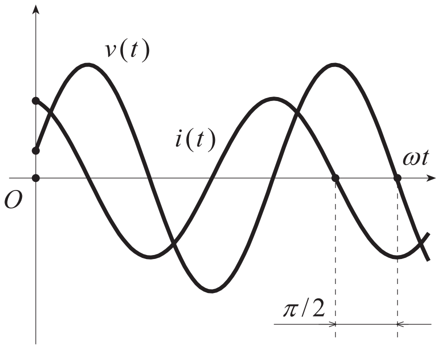
$$\overline{I}(t) = I_0 e^{j(\omega t+\phi)},$$

$$\overline{V} = V_0 e^{j\left(\omega t+\phi-\frac{\pi}{2}\right)},$$

rappresentano due fasori, con $\overline{V}$, sfasato in ritardo di 90° rispetto a $\overline{I}$. La differenza di potenziale $v(t)$ ai capi del condensatore vale:

$$v(t) = \mathcal{R}e\{\overline{V}\} = \mathcal{R}e\left\{V_0 e^{j\left(\omega t+\phi-\frac{\pi}{2}\right)}\right\} = V_0 \cos\left(\omega t+\phi-\frac{\pi}{2}\right),$$

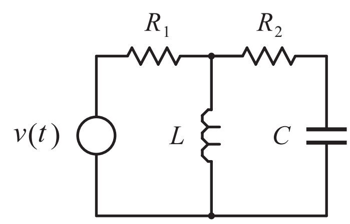
cioè tale differenza di potenziale ha ampiezza V_0 ed è sfasata in ritardo di 90° relativamente alla corrente $i(t)$. Inoltre risulta:



$$\lim_{\omega\to 0} I_0 = \lim_{\omega\to 0} \omega C V_0 = 0,$$

$$\lim_{\omega\to\infty} V_0 = \lim_{\omega\to\infty} \frac{I_0}{\omega C} = 0;$$

ovvero, nel limite delle sollecitazioni continue il condensatore agisce come un circuito aperto, mentre, alle alte frequenze si comporta come un cortocircuito.

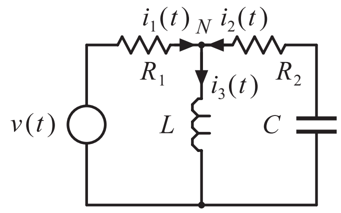


Esempio: Nel circuito di figura il generatore $v(t)$ eroga una forza elettromotrice sinusoidale di ampiezza V_0 pari a $311\,V$ e pulsazione ω di $314\,rad/s$. Stabiliamo l'espressione della corrente che attraversa R_2 nell'ipotesi che R_1 e R_2 valgano rispettivamente 1 Ω e 2 Ω, L vale 10 mH e C, 12 μF. L'estensione complessa di $v(t)$ è:

$$\overline{V} = V_0 e^{j\omega t},$$

così in corrispondenza nodo *N* risulta:

$$\overline{I}_3 = \overline{I}_1 + \overline{I}_2, \tag{7.18}$$



dove $\overline{I}_1$, $\overline{I}_2$ e $\overline{I}_3$ rappresentano le estensioni complesse, rispettivamente, di $i_1(t)$, $i_2(t)$ e $i_3(t)$; alla maglia comprendente il generatore, R_1 e L e alla maglia comprendente L, R_2 e C si ha:

$$R_1\overline{I}_1 + j\omega L\overline{I}_3 = V_0 e^{j\omega t}\ , \tag{7.19}$$

$$-j\omega L\overline{I}_3 - R_2\overline{I}_2 - \frac{1}{j\omega C}\overline{I}_2 = 0\,. \tag{7.20}$$

Queste due equazioni risultano formalmente identiche a quelle che si scriverebbero in un circuito in corrente continua, con l'associazione di una resistenza $j\omega L$ all'induttanza L e di una resistenza $1/(j\omega C)$ alla capacità C. Esprimiamo il sistema delle tre equazioni in forma matriciale:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ R_1 & 0 & j\omega L \\ 0 & -R_2 - \dfrac{1}{j\omega C} & -j\omega L \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \overline{I}_1 \\ \overline{I}_2 \\ \overline{I}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ V_0 e^{j\omega t} \\ 0 \end{pmatrix},$$

allora l'estensione complessa della corrente $i_2(t)$ vale:

$$\overline{I}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ R_1 & V_0 e^{j\omega t} & j\omega L \\ 0 & 0 & -j\omega L \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ R_1 & 0 & j\omega L \\ 0 & -R_2 - \dfrac{1}{j\omega C} & -j\omega L \end{vmatrix}} = V_0 \frac{-j\omega L\, e^{j\omega t}}{R_1R_2 + \dfrac{L}{C} + j\left(\omega LR_1 + \omega LR_2 - \dfrac{R_1}{j\omega C}\right)} =$$

$$= \frac{V_0}{R_1}\frac{e^{j\omega t}}{\left(\dfrac{1}{\omega^2 LC} - 1 - \dfrac{R_2}{R_1}\right) + j\left(\dfrac{1}{\omega R_1 C} + \dfrac{R_2}{\omega L}\right)}\,.$$

Posto quindi:

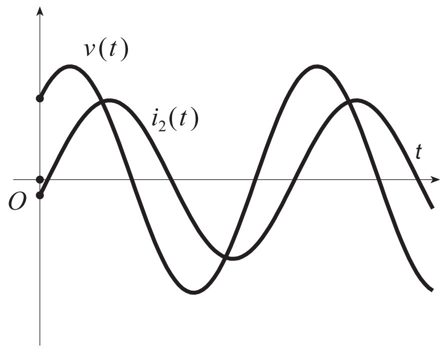
$$I_{02} \equiv \frac{V_0}{R_1}\frac{1}{\sqrt{\left(\dfrac{1}{\omega^2 LC} - 1 - \dfrac{R_2}{R_1}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{\omega R_1 C} + \dfrac{R_2}{\omega L}\right)^2}} \approx 1.1\ A\,,$$

$$\vartheta \equiv \operatorname{atan}\left(\frac{\dfrac{1}{\omega R_1 C} + \dfrac{R_2}{\omega L}}{\dfrac{1}{\omega^2 LC} - 1 - \dfrac{R_2}{R_1}}\right) \approx 73\,°\,,$$

risulta:

$$i_2(t) = I_{02}\cos(\omega t - \vartheta)\,.$$

In figura sono confrontati l'andamento di $i_2(t)$ con quello di $v(t)$.



7.7 Risonanza

Consideriamo un circuito *RLC* soggetto ad una eccitazione sinusoidale:

$$v(t) = V_0 \cos(\omega t);$$

a regime la corrente $i(t)$ attraverso la rete è data dall'espressione:

$$i(t) = \frac{V_0}{Z}\cos(\omega t - \phi) = I_0 \cos(\omega t - \phi),$$

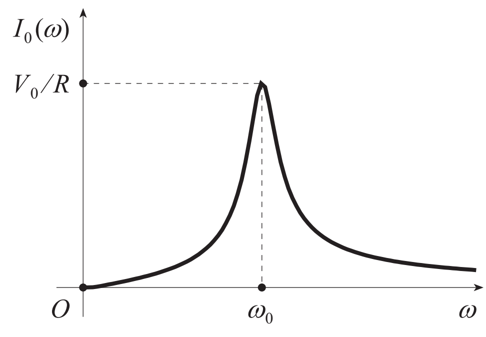
in cui l'ampiezza I_0 rappresenta il modulo della corrente complessa $\overline{I}_0$ data dalla (7.14):

$$I_0 \equiv \frac{V_0}{Z} = \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}. \tag{7.21}$$

L'ampiezza I_0 presenta un massimo quando la pulsazione assume il valore ω_0 pari a:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \tag{7.22}$$

ovvero in corrispondenza della pulsazione di oscillazione libera del circuito. Relativamente a questo circuito ω_0 prende il nome di *pulsazione di risonanza*. Per ω uguale a ω_0 si ha:

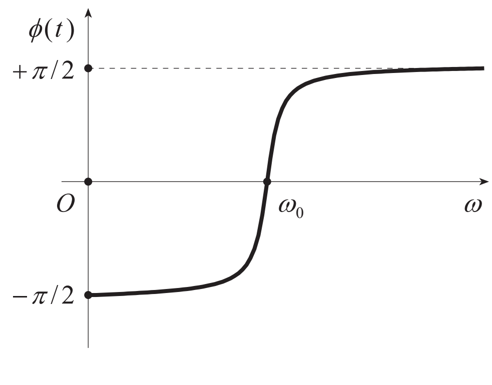


$$I_0(\omega_0) = \frac{V_0}{R},$$

inoltre, dalla (7.15) segue:

$$\phi(\omega_0) = 0,$$

così deduciamo che in corrispondenza della pulsazione di risonanza il circuito ha un comportamento di tipo resistivo, nel senso che la corrente $i(t)$ attraverso il circuito risulta in fase con la tensione applicata $v(t)$. La reattanza di questo circuito vale:



$$X = \omega L - \frac{1}{\omega C};$$

per $\omega < \omega_0$ risulta:

$$X < 0\,;$$

per cui l'impedenza $\overline{Z}$ può essere espressa come:

$$\overline{Z} = R - j|X|\,;$$

d'altra parte, dalla (7.17) osserviamo che il condensatore è caratterizzato da un'impedenza negativa, così concludiamo che per $\omega < \omega_0$ il circuito *RLC* è visto dal generatore come la serie di una resistenza con un condensatore C' di valore:

$$C' \equiv \frac{C}{\omega^2 LC - 1}\,;$$

per $\omega > \omega_0$ risulta:

$$X > 0\,;$$

per cui l'impedenza $\overline{Z}$ può essere espressa come:

$$\overline{Z} = R + jX\,;$$

d'altra parte, dalla (7.16) osserviamo che l'induttanza è caratterizzata da un'impedenza positiva, così concludiamo che per $\omega > \omega_0$ il circuito *RLC* è visto dal generatore come la serie di una resistenza con una bobina L' di valore:

$$L' \equiv \frac{\omega^2 LC - 1}{\omega^2 C}\,.$$

7.8 Fattore di merito

Sia U_M la massima energia che può immagazzinare un circuito risonante[3] e U_D l'energia dissipata in un periodo dallo stesso circuito; si definisce *fattore di merito* del circuito in questione la quantità:

$$Q \equiv 2\pi \frac{U_M}{U_D}, \quad \omega = \omega_0\,,$$

dove si intende che il rapporto U_M / U_D deve essere calcolato in corrispondenza della pulsazione di risonanza della rete. Questo fattore fornisce un indice di come il circuito impiega l'energia che gli viene fornita dal generatore. Per stabilire il fattore di merito del circuito *RLC* fino ad ora esaminato consideriamo l'energia immagazzinata nella bobina; se la corrente $i(t)$ che percorre il circuito è:

[3] Queste considerazioni sono di carattere generale, nel senso che si applicano a tutti i circuiti caratterizzati da una frequenza di risonanza e pertanto detti *circuiti risonanti*.

$$i(t) = I\sin(\omega t),$$

la massima energia immagazzinata nel circuito è:

$$U_M = \frac{1}{2}LI^2.$$

Per valutare l'energia dissipata in un periodo, osserviamo che l'unico elemento che dissipa energia è la resistenza R e, in corrispondenza della corrente $i(t)$ questo componente dissiperà istantaneamente una potenza:

$$p(t) = Ri^2(t) = RI^2\sin^2(\omega t),$$

così l'energia dissipata in un periodo, alla pulsazione di risonanza è:

$$U_D = \int_0^{T_0} p(t)\,dt = RI^2\int_0^{T_0}\sin^2(\omega_0 t)\,dt = RI^2\frac{T_0}{2} = \frac{RI^2\pi}{\omega_0},$$

dove T_0 indica il periodo $2\pi/\omega_0$ alla pulsazione di risonanza. Dalla definizione segue quindi che il fattore di merito del circuito *RLC* vale:

$$Q = 2\pi\frac{U_M}{U_D} = 2\pi\frac{\frac{1}{2}LI^2}{\frac{RI^2\pi}{\omega_0}} = \frac{\omega_0 L}{R},$$

inoltre valendo la (7.22) risulta anche:

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}. \tag{7.23}$$

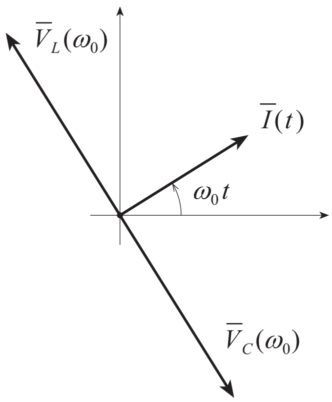
La grandezza testé introdotta oltre a caratterizzare il circuito risonante dal punto di vista energetico, consente di mettere in luce altri aspetti relativi alla funzionalità del circuito. Facendo uso del metodo simbolico determiniamo le differenze di potenziale ai capi della bobina e del condensatore del circuito *RLC* in corrispondenza di un'eccitazione sinusoidale di pulsazione pari a quella di risonanza, risulta:

$$\begin{aligned}
\overline{V}_L(\omega_0) &= \overline{Z}_L(\omega_0)\overline{I}(\omega_0) = j\omega_0 L\frac{V_0}{R}e^{j\omega_0 t} = jQV_0 e^{j\omega_0 t} = QV_0 e^{j\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right)},\\
\overline{V}_C(\omega_0) &= \overline{Z}_C(\omega_0)\overline{I}(\omega_0) = \frac{1}{j\omega_0 C}\frac{V_0}{R}e^{j\omega_0 t} = -jQV_0 e^{j\omega_0 t} = QV_0 e^{j\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)},
\end{aligned}$$

cioè:

$$v_L(t) = QV_0\cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$v_C(t) = QV_0 \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right).$$



Quindi, alla risonanza le differenze di potenziale ai capi della bobina e del condensatore hanno un'ampiezza Q volte maggiore dell'ampiezza della forza elettromotrice applicata. D'altra parte, siccome le due tensioni oscillano mantenendosi sfasate tra loro di 180° (in *controfase*), la loro somma risulta istante per istante nulla. Indichiamo genericamente con:

$$i(t) = I_0 \cos(\omega t + \vartheta)$$

l'espressione della corrente nel circuito *RLC*, dove I_0 è l'ampiezza e ϑ, pari all'opposto $-\phi$ dell'argomento dell'impedenza $\overline{Z}$, la fase. Queste due quantità possono essere espresse come[4]:

$$I_0 = \frac{V_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}, \tag{7.24}$$

$$\tan\vartheta = -Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right).$$

Convenzionalmente le pulsazioni ω_1 e ω_2 in corrispondenza delle quali I_0 assume un valore pari a $1/\sqrt{2}$ volte il suo massimo, cioè $V_0/\left(R\sqrt{2}\right)$, definiscono gli estremi della *banda passante* $\Delta\omega$, intesa come l'intervallo:

$$\Delta\omega \equiv \omega_2 - \omega_1;$$

questo intervallo si può ricavare osservando che quando I_0 è pari a $V_0/\left(R\sqrt{2}\right)$, dalla (7.24) deve risultare:

---

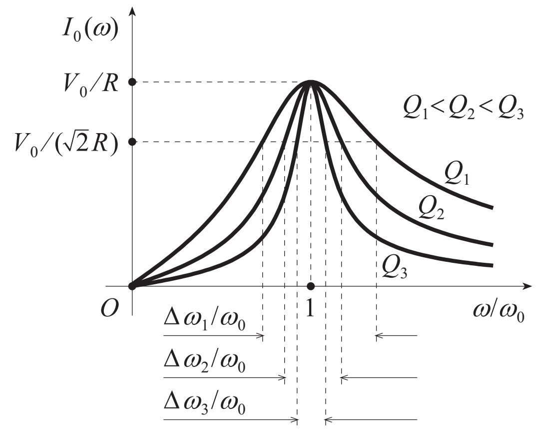
[4] Dalle relazioni (7.21), (7.22) e (7.23) segue:

$$I_0 \equiv \frac{V_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{V_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = \frac{V_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega RC}\right)^2}} = \frac{V_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega\omega_0 LC}\right)^2}} =$$

$$= \frac{V_0}{R} \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}.$$

Dalla relazione (7.15), tenendo conto che la fase della corrente $i(t)$ è opposta all'argomento dell'impedenza $\overline{Z}$ e dalle relazioni (7.22) e (7.23) si ha:

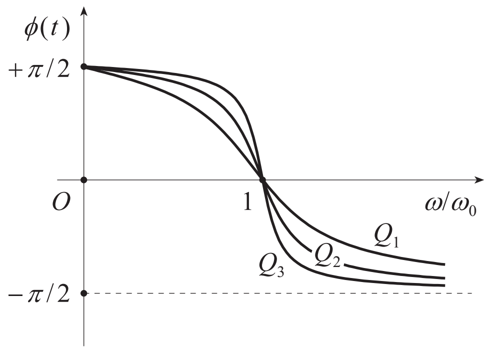
$$\tan\vartheta = -\tan\phi = -\frac{1}{R}\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = -Q\left(\frac{\omega L}{\omega_0 L} - \frac{1}{\omega\omega_0 LC}\right) = -Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{1}{\omega\omega_0 LC}\right) = -Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right).$$



$$Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = \pm 1,$$

da cui segue:

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q};$$

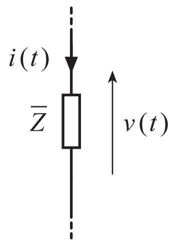


osserviamo pertanto che la curva di risonanza risulta tanto più "stretta", quanto più è grande il valore assunto dal fattore di merito. Il fenomeno della risonanza fu scoperto da Tesla nel 1890 nel corso dei suoi studi sui circuiti alimentati con tensioni sinusoidali ad alta frequenza; sfruttando tale effetto Tesla realizzò un dispositivo (*bobina di Tesla*) in grado di produrre altissime tensioni a frequenza elevata.

7.9 Potenze

La potenza istantanea fornita ad un generico carico da un generatore di forza elettromotrice $v(t)$ che eroga una corrente $i(t)$ è data dalla relazione:

$$w(t) = v(t)i(t);$$



convenzionalmente $w(t) > 0$ corrisponde al trasferimento di energia dal generatore verso il carico mentre $w(t) < 0$ corrisponde ad un flusso di energia nella direzione opposta. Consideriamo una qualsiasi rete passiva, ovvero priva di generatori e con due morsetti; il teorema di Thevénin esteso alle correnti alternate consente di schematizzare l'intera rete compresa tra i morsetti come una sola impedenza $\overline{Z}$ di modulo Z e argomento ϕ:

$$\overline{Z} = Ze^{j\phi} = Z\cos\phi + jZ\sin\phi = R + jX,$$

dove si è posto:

$$R \equiv Z\cos\phi,$$
$$X \equiv Z\sin\phi.$$

Se tale impedenza è percorsa da una corrente sinusoidale:

$$i(t) = I_0\cos(\omega t),$$

di estensione complessa $\overline{I}$ pari a $I_0 e^{j\omega t}$, l'estensione complessa della differenza di potenziale ai suoi capi vale:

$$\overline{V} = \overline{I}\,\overline{Z} = I_0 e^{j\omega t} Z e^{j\phi} = I_0 Z e^{j(\omega t+\phi)} = V_0 e^{j(\omega t+\phi)},$$

in cui l'ampiezza V_0 è pari a $I_0 Z$; a $\overline{V}$ corrisponde la differenza di potenziale:

$$v(t) = \mathcal{Re}\{\overline{V}\} = I_0 Z\cos(\omega t+\phi).$$

Pertanto, la potenza istantanea assorbita dalla rete così schematizzata è:

$$\begin{aligned} w(t) &= v(t)i(t) = I_0^2 Z\cos(\omega t+\phi)\cos(\omega t) = I_0^2 Z\left[\cos^2(\omega t)\cos\phi - \sin(\omega t)\cos(\omega t)\sin\phi\right] = \\ &= I_0^2 Z\cos\phi\cos^2(\omega t) - \frac{1}{2}I_0^2 Z\sin\phi\sin(2\omega t), \end{aligned}$$

posto quindi:

$$\begin{aligned} p(t) &\equiv I_0^2(Z\cos\phi)\cos^2(\omega t) = I_0^2 R\cos^2(\omega t) = \frac{1}{2}I_0^2 R\left[1+\cos(2\omega t)\right], \\ q(t) &\equiv -\frac{1}{2}I_0^2(Z\sin\phi)\sin(2\omega t) = -\frac{1}{2}I_0^2 X\sin(2\omega t), \end{aligned}$$

risulta:

$$w(t) = p(t) + q(t);$$

il valor medio W_m della potenza istantanea $w(t)$ è la somma dei valori medi P_m e Q_m dei termini $p(t)$ e $q(t)$:

$$\begin{aligned} P_m &= \frac{1}{T}\int_t^{t+T} p(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2}I_0^2 R + \frac{1}{T}\int_t^{t+T}\left[\frac{1}{2}I_0^2 R\cos(2\omega\xi)\right]d\xi = \frac{1}{2}I_0^2 R, \\ Q_m &= \frac{1}{T}\int_t^{t+T} q(\xi)\,d\xi = \frac{1}{T}\int_t^{t+T}\left[-\frac{1}{2}I_0^2 X\sin(2\omega\xi)\right]d\xi = 0, \end{aligned}$$

così:

$$W_m = P_m + Q_m = \frac{1}{2}I_0^2 R = I_{eff}^2 R,$$

dove I_{eff} è il valore efficace[5] della corrente $i(t)$. Quindi la potenza istantanea $w(t)$ è la somma di due termini; il primo, $p(t)$, detto *potenza attiva istantanea*, di valor medio diverso da zero,

[5] Per una grandezza periodica $x(t)$ di periodo T, ovvero tale che per ogni t risulta $x(t) = x(t+T)$ si definisce *valore efficace* di $x(t)$ la quantità:

rappresenta la potenza dissipata nella componente resistiva R dell'impedenza $\overline{Z}$; l'altro, $q(t)$, detto *potenza reattiva istantanea*, di valor medio nullo, corrisponde all'energia che le capacità e le induttanze costituenti la componente reattiva X dell'impedenza $\overline{Z}$ assorbono durante le fasi di carica e cedono nelle fasi di scarica; se l'impedenza $\overline{Z}$ è costituita unicamente da un componente reattivo, tale scambio avviene col solo generatore. Notiamo infine che il valor medio W_m della potenza istantanea è pari al quadrato del valore efficace della corrente $i(t)$ moltiplicato per la componente resistiva dell'impedenza $\overline{Z}$, quindi gli effetti dissipativi prodotti da una corrente alternata sono uguali a quelli di una corrente continua di intensità pari a quella del valore efficace della corrente alternata. Per tale motivo, quando in genere ci si riferisce all'ampiezza di una grandezza sinusoidale, come ad esempio $230\,V$ per la tensione adottata in Europa nelle reti domestiche, si intende il valore efficace di tale grandezza. Il valor medio della potenza istantanea, pari a P_m, può esprimersi come:

$$P_m = \frac{1}{2} I_0{}^2 R = \frac{1}{2} I_0{}^2 Z \cos\phi = \frac{1}{2} I_0 V_0 \cos\phi = I_{eff} V_{eff} \cos\phi\,,$$

inoltre il valore massimo della potenza reattiva istantanea è:

$$Q_0 = \frac{1}{2} I_0{}^2 X = \frac{1}{2} I_0{}^2 Z \sin\phi = \frac{1}{2} I_0 V_0 \sin\phi = I_{eff} V_{eff} \sin\phi\,;$$

facendo uso di tali quantità, si definisce la *potenza apparente* come:

$$P_a \equiv \sqrt{P_m{}^2 + Q_0{}^2} = \sqrt{\left(I_{eff} V_{eff} \cos\phi\right)^2 + \left(I_{eff} V_{eff} \sin\phi\right)^2} = I_{eff} V_{eff}\,;$$

tale grandezza, pur essendo priva di significato fisico, ha valore in quanto, indirettamente fornisce un indicazione della corrente assorbita dall'impedenza $\overline{Z}$, consentendo di determinare, ad esempio, le sezioni dei conduttori da impiegare nei collegamenti. Convenzionalmente la potenza P_m, detta *potenza attiva* (media), si misura in watt (*W*), la *potenza reattiva* (massima) Q_0 si misura in *voltampere reattivi* (*VAR*) e la potenza apparente P_a si misura in *voltampere* (*VA*).

La potenza apparente P_a coincide con la potenza attiva P_m solo se l'angolo di fase ϕ è nullo, cioè se $\cos\phi = 1$, che corrisponde al caso di una impedenza puramente resistiva. Il termine $\cos\phi$ è detto *fattore di potenza* e fornisce il rapporto:

$$\cos\phi = \frac{P_m}{P_a}$$

$$X_{eff} \equiv \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} x^2(\xi)\, d\xi}\,.$$

Nel caso di una grandezza variabile con legge sinusoidale, $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ con $\omega = 2\pi/T$, risulta:

$$I_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_t^{t+T} I_0{}^2 \cos^2(\omega\xi)\, d\xi} = \frac{I_0}{\sqrt{2}}\,.$$

tra la potenza attiva e quella apparente.

Esempio: Consideriamo una bobina reale, ovvero tale da essere caratterizzata da una resistenza diversa da zero; supponiamo che la sua impedenza Z sia pari a $100\ \Omega$ e che la fase ϕ sia di 60° anziché di 90° come per un induttore ideale. Tale bobina, connessa ad una rete di distribuzione elettrica che eroga una tensione efficace V_{eff} di $230\ V$ fa passare una corrente:

$$I_{eff} = \frac{V_{eff}}{Z} = \frac{230\ V}{100\ \Omega} = 2.3\ A\,,$$

così la potenza apparente vale:

$$P_a = I_{eff} V_{eff} = 2.3\ A \times 230\ V = 529\ VA\,.$$

Con un angolo di fase di 60° il fattore di potenza $\cos\phi$ vale $1/2$, così la potenza attiva è:

$$P_m = I_{eff} V_{eff} \cos\phi = 2.3\ A \times 230\ V \times \left(1/2\right) = 264.5\ W\,,$$

cioè la potenza media è la metà della potenza apparente. Qualora $\cos\phi$ fosse uguale a 1, in corrispondenza della medesima potenza attiva si avrebbe una corrente assorbita dal generatore:

$$I_{eff}{}' = \frac{P_m}{V_{eff}} = \frac{264.5\ W}{230\ V} = 1.15\ A\,,$$

pari alla metà di I_{eff}. Che la corrente I_{eff} sia così elevata a fronte di un suo non effettivo impiego non risulta conveniente in quanto i conduttori per il collegamento al generatore, gli interruttori, i fusibili ed altri componenti devono essere in grado di sostenere il doppio della corrente che sarebbe necessaria se il fattore di potenza fosse unitario. A tale scopo le apparecchiature commerciali sono sempre progettate in modo tale da mantenere il fattore di potenza della rete di alimentazione il più possibile prossimo all'unità.

7.10 Potenza complessa

Alla luce delle precedenti definizioni si evince che è possibile associare alla potenza P_a una quantità complessa $\overline{P}_a$ definita come:

$$\overline{P}_a \equiv \overline{I}_{eff}^{\,*}\ \overline{V}_{eff}\,,$$

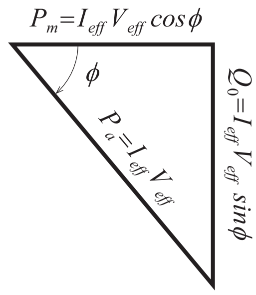
dove $\overline{I}_{eff}^{\,*}$ è il complesso coniugato di $\overline{I}_{eff}$; pertanto, siccome:

$$\overline{V}_{eff} = \frac{V_0}{\sqrt{2}} e^{j\omega t}\,,$$

$$\overline{I}_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} e^{j(\omega t+\phi)}\,,$$

allora:

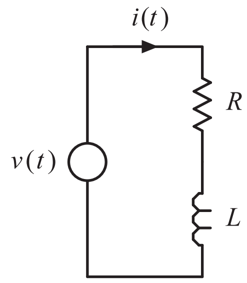
$$\overline{P}_a = \overline{I}_{eff}^{\,*}\ \overline{V}_{eff} = \frac{I_0}{\sqrt{2}} e^{-j(\omega t+\phi)} \frac{V_0}{\sqrt{2}} e^{j\omega t} = I_{eff} V_{eff} e^{-j\phi} = I_{eff} V_{eff} \cos\phi - j I_{eff} V_{eff} \sin\phi = P_m - jQ_0\,.$$



Il modulo di $\overline{P}_a$ può essere riguardato come una misura dell'ipotenusa di un triangolo rettangolo di cui P_m e Q_0 rappresentano le lunghezze dei cateti; tale figura geometrica prende il nome di *triangolo delle potenze*. Infatti la potenza apparente P_a è pari al modulo di $\overline{P}_a$, ossia:

$$P_a = \left|\overline{P}_a\right| = \sqrt{P_m^{\,2} + Q_0^{\,2}} \ .$$

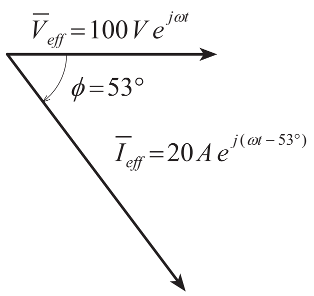
Esempio: Stabiliamo i lati del triangolo delle potenze per la rete di figura, in cui *R* vale $3\,\Omega$ e *L* vale $13\,mH$, alimentata con un generatore sinusoidale di frequenza pari a $50\,Hz$ e ampiezza efficace di $100\,V$. L'impedenza della rete è:



$$\overline{Z} = R + j\omega L = 3\,\Omega + j2\pi \times 50\,Hz \times 13\,mH = (3 + j4)\,\Omega ,$$

inoltre

$$Z = \left|\overline{Z}\right| = \sqrt{3^2 + 4^2}\ \Omega = 5\,\Omega ,$$
$$\phi = \operatorname{atan}\left(\frac{\omega L}{R}\right) = \operatorname{atan}\left(\frac{4}{3}\right) \sim 53° .$$

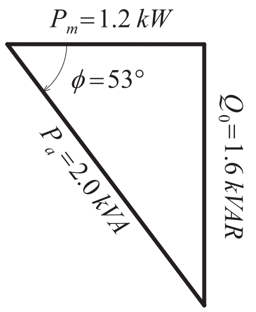


Il valore efficace della corrente $i(t)$ nel circuito è pertanto:

$$\overline{I}_{eff} = \frac{\overline{V}_{eff}}{\overline{Z}} = \frac{V_{eff}}{Z} e^{j\omega t} e^{-j\phi} = 20\,A\,e^{j(\omega t - 53°)} ;$$

la potenza apparente complessa vale quindi:

$$\overline{P}_a = \overline{I}_{eff}^{\,*}\, \overline{V}_{eff} = 20\,A\,e^{-j(\omega t - 53°)} \times 100\,V\,e^{j\omega t} = 2.0\,kVA\,e^{j53°} =$$
$$= 1.2\,kW + j1.6\,kVAR ,$$



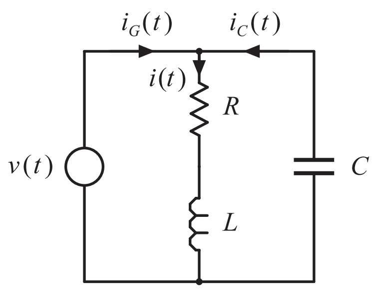
con P_a pari a $2.0\,kVA$. Si noti che era possibile pervenire allo stesso risultato osservando che:

$$P_m = I_{eff}^{\,2} R = (20\,A)^2 \times 3\,\Omega = 1.2\,kW ,$$
$$Q_0 = I_{eff}^{\,2} X = (20\,A)^2 \times 4\,\Omega = 1.6\,kVAR ,$$
$$P_a = I_{eff}^{\,2} Z = (20\,A)^2 \times 5\,\Omega = 2.0\,kVA ,$$

inoltre dal rapporto P_m / P_a si ricava il fattore di potenza:

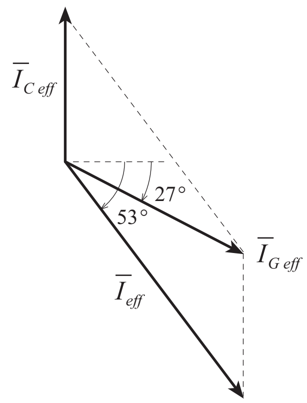
$$\cos\phi = \frac{P_m}{P_a} = \frac{1.2\,kW}{2.0\,kVA} = 0.6 .$$

Supponiamo ora di applicare in parallelo all'impedenza *Z* un condensatore di capacità pari a $320\,\mu F$. La corrente erogata dal generatore in questa nuova condizione ha valore efficace pari a:



$$\overline{I}_{G\,eff} = \overline{I}_{eff} + \overline{I}_{C\,eff} ,$$

dove



$$\overline{I}_{eff} = \frac{\overline{V}_{eff}}{\overline{Z}} = 20\ A\, e^{j(\omega t - 53°)}\ ,$$

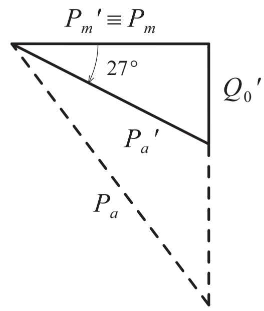
$$\overline{I}_{C\,eff} = \frac{\overline{V}_{eff}}{\left(\dfrac{1}{j\omega C}\right)} = 10\ A\, e^{j(\omega t + 90°)}\ .$$

Allora $\overline{I}_{G\,eff}$ vale:

$$\overline{I}_{G\,eff} = 20\ A\, e^{j(\omega t - 53°)} + 10\ A\, e^{j(\omega t + 90°)} = (12 - j6)\ A\, e^{j\omega t} = 13.4\ A\, e^{j(\omega t - 27°)}\ ,$$

quindi la potenza apparente in questa nuova condizione è:

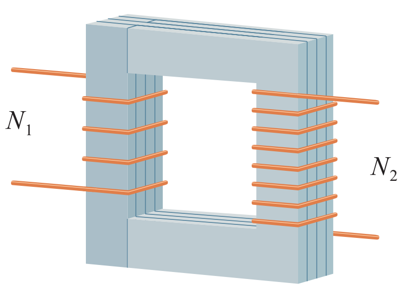
$$\overline{P}_a = \overline{I}_{G\,eff}^{\,*}\,\overline{V}_{eff} = 13.4\ A\, e^{-j(\omega t - 27°)} \times 100\ V\, e^{j\omega t} = 1.3\, kVA\, e^{j27°} =$$
$$= 1.2\, kW + j0.6\, kVAR\ ,$$



cioè pur restando inalterata la potenza dissipata nella resistenza, la potenza apparente è diminuita essendo ridotta la corrente erogata dal generatore.

Questo esempio mostra una situazione abbastanza comune nella pratica, poiché la maggior parte dei carichi nelle utenze domestiche e industriali è di tipo resistivo-induttivo. Come visto la potenza attiva P_m misura il lavoro che il carico compie nell'unità di tempo mentre la potenza apparente P_a fornisce un'indicazione della massima corrente erogata dal generatore. In teoria se un utilizzatore fosse costituito da un carico puramente reattivo, il generatore sarebbe soggetto al carico nominale pur erogando potenza nulla. Col procedimento mostrato in questo esempio, detto *rifasamento*, si diminuisce l'angolo di fase dell'impedenza rendendo $\cos\phi$ prossimo all'unità, così, pur restando inalterata la potenza attiva dissipata si riduce la corrente assorbita. Sebbene in principio potrebbe sembrare conveniente imporre $\cos\phi = 1$, ciò risulta sconsigliabile perché in tali condizioni il circuito risultante sarebbe in condizioni di risonanza con la conseguente generazione di extratensioni in corrispondenza degli elementi reattivi.

7.11 Il trasformatore



Il *trasformatore* rappresenta una delle macchine elettriche più importanti in quanto consente di generare la potenza elettrica ad un certo potenziale e di trasmetterla ad un altro. La possibilità di trasmettere la potenza in alternata ad alto potenziale con piccole perdite e, successivamente trasformarla per l'utenza ad un potenziale più basso, spiega fondamentalmente la superiorità della distribuzione dell'energia per mezzo di correnti alternate rispetto alla distribuzione in continua. Consideriamo un anello di ferro dolce, laminato[6] secondo piani paralleli alle linee di forza del

[6] La laminazione del nucleo del trasformatore è necessaria per ridurre il suo riscaldamento a causa delle correnti parassite che si generano in esso per effetto del campo magnetico variabile cui è sottoposto. Si consideri, ad esempio, un nucleo di ferro massiccio sede di un campo magnetico variabile; dalla legge di Faraday-Henry la variazione del campo determina nel nucleo tanti percorsi chiusi sedi di forze elettromotrici indotte e quindi di correnti indotte; come provò sperimentalmente Léon Foucault nel 1855, tali correnti determinano per effetto Joule lo sviluppo di calore nella massa del nucleo di ferro. Così, per ridurre l'ampiezza di questi percorsi, il nucleo del trasformatore viene costituito da lamierini isolati tra loro con carta o con vernice. Inoltre, quando è possibile, i lamierini sono realizzati con materiali metallici ad elevata resistività, come ad esempio delle leghe di ferro e silicio.

Trasformatore da 315 *MVA*, 420 *kV*/18 *kV* (*Comelmar Italia*)

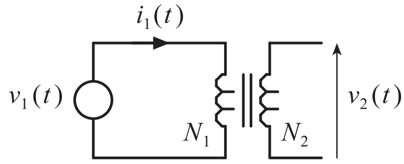
campo magnetico prodotto da due avvolgimenti, rispettivamente di N_1 e N_2 spire. Sia S la sezione dell'anello e l la sua lunghezza (media), allora in assenza di flusso magnetico disperso, le induttanze dei due avvolgimenti sono:

$$L_1 = \frac{\mu N_1^2 S}{l},$$
$$L_2 = \frac{\mu N_2^2 S}{l},$$

dove μ è la permeabilità magnetica del ferro; il coefficiente di mutua induzione tra i due avvolgimenti vale:

$$M = \kappa \frac{\mu N_1 N_2 S}{l} = \kappa \sqrt{L_1 L_2},$$

in cui κ, detto *coefficiente di accoppiamento*, è un numero compreso tra -1 e $+1$ e il segno distingue il verso di avvolgimento di una bobina rispetto all'altra. Nel seguito assumeremo che l'accoppiamento tra i due avvolgimenti sia tale che $|\kappa|$ valga 1;



Convenzionalmente l'avvolgimento posto a sinistra dello schema del trasformatore è detto *primario* e l'altro è detto *secondario*. Supponiamo di applicare al primario del trasformatore un generatore di forza elettromotrice sinusoidale; nell'ipotesi che entrambe le bobine abbiano resistenza nulla risulta:

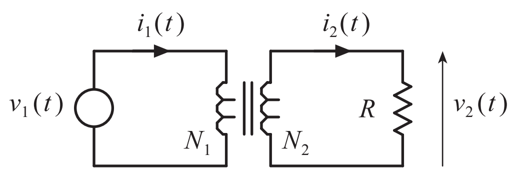
$$\overline{V}_1 = j\omega L_1 \overline{I}_1,$$
$$\overline{V}_2 = j\omega M \overline{I}_1,$$

così, facendo il rapporto membro a membro, nell'ipotesi di avvolgimenti concordi ($\kappa = 1$), si ha:

$$\frac{\overline{V}_1}{\overline{V}_2} = \frac{L_1}{M} = \frac{\mu N_1^2 S}{l} \frac{l}{\mu N_1 N_2 S} = \frac{N_1}{N_2}.$$

Quindi, con le ipotesi fatte, risulta che la differenza di potenziale presente sul secondario del trasformatore è in fase con la forza elettromotrice erogata dal generatore e, inoltre:

$$V_2 = V_1 \frac{N_2}{N_1}.$$



Supponiamo che l'avvolgimento secondario del trasformatore sia chiuso su un carico costituito da una resistenza R. Assumendo trascurabile la dissipazione negli avvolgimenti, la potenza assorbita dal carico sarà pari al prodotto del valore efficace della differenza di potenziale presente sul secondario, moltiplicato per il valore efficace della corrente che attraversa tale resistenza, $V_{2eff} I_{2eff}$;

questa potenza deve necessariamente essere fornita dal generatore connesso al primario del trasformatore, pertanto:

$$V_{2\,eff} I_{2\,eff} = V_{1\,eff} I_{1\,eff} \,,$$

ovvero:

$$I_2 = I_1 \frac{V_1}{V_2} = I_1 \frac{N_1}{N_2} \,.$$

Il rapporto N_1/N_2 che caratterizza il funzionamento del trasformatore prende il nome di *rapporto di trasformazione*.

Esempio: Consideriamo un generatore di forza elettromotrice $v(t)$ sinusoidale che alimenta un carico attraverso una linea di lunghezza l caratterizzata da una resistenza per unità di lunghezza pari a r. La potenza erogata dal generatore è:

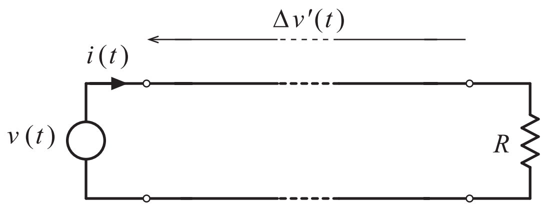
$$P_m = V_{eff} I_{eff} \,,$$

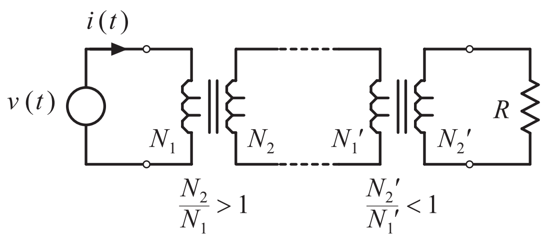
dove I_{eff} è il valore efficace della corrente erogata dal generatore; indicando con $\Delta V_{eff}'$ la caduta di tensione efficace lungo la linea, la potenza dissipata attraverso la resistenza della linea vale:

$$P_d = \Delta V_{eff}' \, I_{eff} = I_{eff}^{\;2} r l \,,$$

pertanto il rapporto P_d/P_m è dato da:

$$\frac{P_d}{P_m} = \frac{I_{eff} r l}{V_{eff}} \,.$$





Quindi, a parità di potenza erogata, tanto maggiore è V_{eff}, tanto più è piccola la frazione di potenza persa nella linea rispetto a quella erogata. Poiché non è opportuno generare forze elettromotrici con alto potenziale e nemmeno adoperarle, si impiegano dei trasformatori per elevare il potenziale prodotto dal generatore per poi ridurlo, sempre facendo uso di trasformatori, in corrispondenza delle utenze.

Trasformatore di Gaulard e Gibbs con nucleo rettilineo aperto

Il primo a realizzare un trasformatore fu Faraday nelle sue esperienze sull'induzione elettromagnetica del 1831, tuttavia Faraday non si accorse delle potenzialità di tale dispositivo. Nel 1882 il fisico francese Lucien Gaulard e l'inglese John Dixon Gibbs brevettarono un sistema di distribuzione della corrente alternata che faceva uso di un apparato, denominato *generatore secondario*, funzionante sul principio della mutua induzione e realizzato con due bobine avvolte su un supporto metallico rettilineo. Utilizzando tale dispositivo nel 1884 venne effettuata l'illuminazione di un tratto di 12 *km* della metropolitana di Londra e successivamente della linea ferroviaria Torino-Lanzo, dove la lampadina più lontana era situata a circa 40 *km* da un alternatore di 2 *kV* con frequenza di 133 *Hz*. Solo nel seguito Gaulard comprese l'opportunità di adoperare un nucleo chiuso per il suo generatore secondario, ottenendo un dispositivo in grado convertire potenze dell'ordine del *kW*.

7.12 Serie di Fourier

Ogni elemento dello spazio vettoriale euclideo a tre dimensioni può essere descritto attraverso una combinazione lineare dei versori degli assi, $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$; per questo motivo si dice che i versori formano una base per lo spazio vettoriale considerato. Analogamente è possibile provare che il sistema di funzioni trigonometriche 1, $\sin(\omega t)$, $\cos(\omega t)$, $\sin(2\omega t)$, $\cos(2\omega t)$,…, con ω uguale a $2\pi/T$, forma una base per l'insieme delle funzioni periodiche nell'intervallo $[0, T]$, caratterizzate da un numero finito di discontinuità finite in tale intervallo e con derivata continua nei punti in cui la funzione è continua. Pertanto una funzione $f(t)$ che gode di tali proprietà può esprimersi come:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)\right] = \\ &= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(\omega t) + a_2 \cos(2\omega t) + a_3 \cos(3\omega t) + \dots \\ &\quad + b_1 \sin(\omega t) + b_2 \sin(2\omega t) + b_3 \sin(3\omega t) + \dots . \end{aligned} \tag{7.25}$$

Questo sviluppo, noto come *serie di Fourier* o *serie trigonometrica* fu introdotto nel 1812 da Jean Baptiste Joseph Fourier nell'ambito dello studio della propagazione del calore. Il termine $a_0/2$ vale:

Jean Baptiste Joseph Fourier

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt,$$

ovvero è uguale al valor medio di $f(t)$ nell'intervallo considerato; i coefficienti a_n e b_n valgono rispettivamente:

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos(n\omega t)\,dt, \tag{7.26}$$

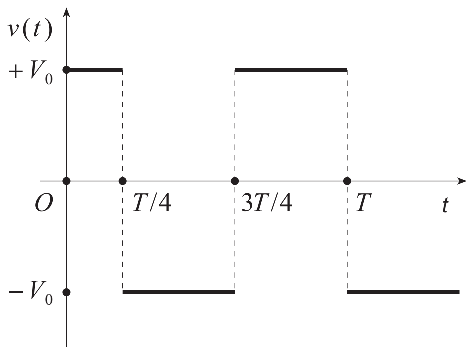
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin(n\omega t)\,dt. \tag{7.27}$$

Nei punti t_0 di discontinuità della funzione considerata, la serie trigonometrica converge al valore $\left[\lim_{\xi\to t_0^+} f(t) + \lim_{\xi\to t_0^-} f(t)\right]\Big/2$, cioè alla media tra il limite destro e quello sinistro della funzione nel punto di discontinuità. Conoscendo le proprietà di parità[7] della funzione $f(t)$, l'espressione della serie trigonometrica può essere notevolmente semplificata; siccome l'integrale calcolato su un periodo di una funzione periodica dispari, è nullo, allora se $f(t)$ è pari, il prodotto $f(t)\sin(n\omega t)$ è

[7] Una funzione $f(t)$ si dice *pari* se risulta $f(t) = f(-t)$ e si dice *dispari* se risulta $f(t) = -f(-t)$. Ad esempio $\cos(\omega t)$ è una funzione pari e $\sin(\omega t)$ è una funzione dispari. Si osserva che il prodotto di una funzione pari per una funzione dispari è una funzione dispari.

una funzione periodica dispari e pertanto i termini b_n dello sviluppo sono nulli; se $f(t)$ è dispari, il prodotto $f(t)\cos(n\omega t)$ è una funzione dispari e nello sviluppo sono nulli i termini a_n.

Esempio: Consideriamo la funzione $v(t)$ così definita:



$$v(t)=\begin{cases} V_0 & 0<t\le T/4, \\ -V_0 & T/4<t\le 3T/4, \\ V_0 & 3T/4<t\le T, \end{cases}$$

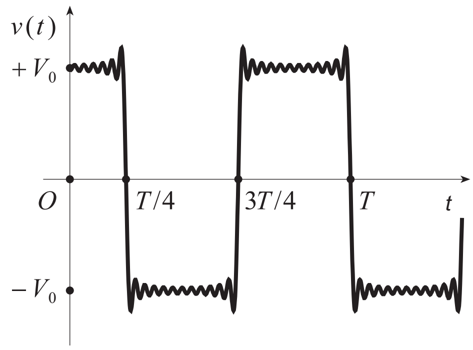
siccome è pari i termini b_n sono nulli; inoltre, poiché l'area della semionda positiva è uguale a quella della semionda negativa, il valor medio $a_n/2$ è nullo. Pertanto, dalla (7.26) i termini a_n valgono:

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T v(t)\cos(n\omega t)\,dt=\frac{2V_0}{T}\int_0^{T/4}\cos(n\omega t)\,dt-\frac{2V_0}{T}\int_{T/4}^{3T/4}\cos(n\omega t)\,dt+\frac{2V_0}{T}\int_{3T/4}^{T}\cos(n\omega t)\,dt=$$
$$=\frac{4V_0}{T}\int_0^{T/4}\cos(n\omega t)\,dt-\frac{4V_0}{T}\int_{T/4}^{T/2}\cos(n\omega t)\,dt=\frac{4V_0}{T}\frac{T}{2n\pi}\int_0^{n\pi/2}\cos\xi\,d\xi-\frac{4V_0}{T}\frac{T}{2n\pi}\int_{n\pi/2}^{n\pi}\cos\xi\,d\xi=\frac{4V_0}{n\pi}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Pertanto, siccome $\sin(n\pi/2)$ può esprimersi come $j^{n+1}\left[(-1)^n-1\right]/2$, lo sviluppo di $v(t)$ è dato da:

$$v(t)=\frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{j^{n+1}}{2n}\left[(-1)^n-1\right]\cos(n\omega t)=\frac{4V_0}{\pi}\cos(\omega t)-\frac{4V_0}{3\pi}\cos(3\omega t)+\frac{4V_0}{5\pi}\cos(5\omega t)-\frac{4V_0}{7\pi}\cos(7\omega t)+\ldots.$$

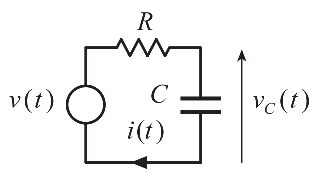
In figura è mostrato il grafico dello sviluppo di $v(t)$ troncato al 24-*esimo* termine.



La serie di Fourier può essere adoperata per lo studio dei circuiti quando questi sono sottoposti a sollecitazioni periodiche non sinusoidali. Alla luce del principio di sovrapposizione, lo stimolo cui è soggetto il circuito viene ricavato dalla somma delle risposte della rete a ciascuno dei termini sinusoidali in cui viene decomposto lo stimolo.

Esempio: Consideriamo la rete di figura in cui il generatore eroga una forza elettromotrice $v(t)$ variabile nel tempo come nell'esempio precedente. L'estensione complessa di tale forza elettromotrice vale:

$$\overline{V}=\frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{j^{n+1}}{2n}\left[(-1)^n-1\right]e^{jn\omega t}=\frac{4V_0}{\pi}e^{j\omega t}-\frac{4V_0}{3\pi}e^{j3\omega t}+\frac{4V_0}{5\pi}e^{j5\omega t}-\frac{4V_0}{7\pi}e^{j7\omega t}+\ldots,$$



pertanto, siccome l'impedenza della rete è:

$$\overline{Z}(\omega)=R+\frac{1}{j\omega C}=Z(\omega)e^{j\phi(\omega)},$$

dove:

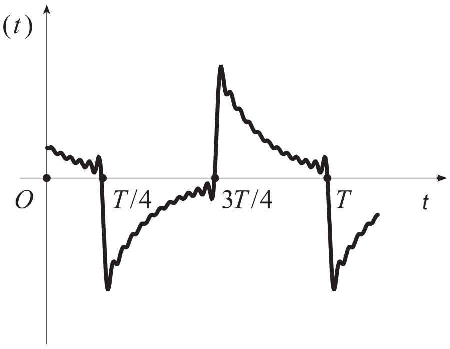
$$Z(\omega)=\sqrt{R^2+\frac{1}{(\omega C)^2}},$$
$$\tan\phi(\omega)=\frac{1}{\omega RC},$$

sono rispettivamente il modulo e la fase di $\overline{Z}(\omega)$, l'estensione complessa della corrente $i(t)$ attraverso il circuito è:

$$\overline{I} = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\overline{Z}(n\omega)}\frac{j^{n+1}}{2n}\left[(-1)^n - 1\right]e^{jn\omega t} = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{Z(n\omega)}\frac{j^{n+1}}{2n}\left[(-1)^n - 1\right]e^{j[n\omega t - \phi(n\omega)]} =$$
$$= \frac{4V_0}{\pi Z(\omega)}e^{j[\omega t - \phi(\omega)]} - \frac{4V_0}{3\pi Z(3\omega)}e^{j[3\omega t - \phi(3\omega)]} + \frac{4V_0}{5\pi Z(5\omega)}e^{j[5\omega t - \phi(5\omega)]} - \frac{4V_0}{7\pi Z(7\omega)}e^{j[7\omega t - \phi(7\omega)]} + \ldots$$

per cui la corrente $i(t)$ vale:

$$i(t) = \mathcal{Re}\left\{\overline{I}\right\} =$$
$$= \mathcal{Re}\left\{\frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{Z(n\omega)}\frac{j^{n+1}}{2n}\left[(-1)^n - 1\right]e^{j[n\omega t - \phi(n\omega)]}\right\} =$$
$$= \frac{4V_0}{\pi Z(\omega)}\cos\left[\omega t - \phi(\omega)\right] - \frac{4V_0}{3\pi Z(3\omega)}\cos\left[3\omega t - \phi(3\omega)\right] +$$
$$+ \frac{4V_0}{5\pi Z(5\omega)}\cos\left[5\omega t - \phi(5\omega)\right] + \ldots.$$



In figura è mostrato il grafico di tale corrente. Per ricavare l'andamento della differenza di potenziale $v_C(t)$ ai capi del condensatore, moltiplichiamo ciascun termine dello sviluppo dell'estensione complessa della corrente $\overline{I}$ per la reattanza del condensatore:

$$X(\omega) = \frac{1}{j\omega C},$$

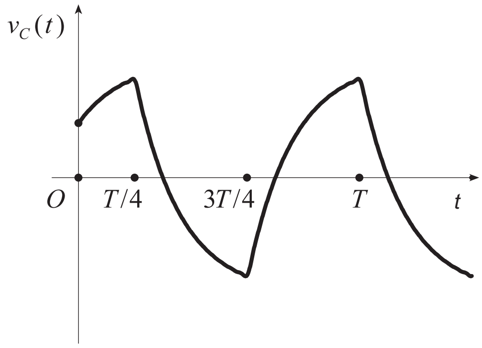
calcolata in corrispondenza pulsazione del termine considerato; così, l'estensione complessa della tensione $v_C(t)$ vale:

$$\overline{V}_C = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}X(n\omega)\frac{1}{\overline{Z}(n\omega)}\frac{j^{n+1}}{2n}\left[(-1)^n - 1\right]e^{jn\omega t} = \frac{4V_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{jn\omega C}\frac{1}{\overline{Z}(n\omega)}\frac{j^{n+1}}{2n}\left[(-1)^n - 1\right]e^{jn\omega t}$$
$$= \frac{4V_0}{\pi\omega C}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 Z(n\omega)}\frac{j^{n+1}}{2}\left[(-1)^n - 1\right]e^{j\left[n\omega t - \phi(n\omega) - \frac{\pi}{2}\right]} =$$
$$= \frac{4V_0}{\pi Z(\omega)}e^{j[\omega t - \phi(\omega)]} - \frac{4V_0}{9\pi\omega C Z(3\omega)}e^{j\left[3\omega t - \phi(3\omega) - \frac{\pi}{2}\right]} + \frac{4V_0}{25\pi\omega C Z(5\omega)}e^{j\left[5\omega t - \phi(5\omega) - \frac{\pi}{2}\right]} - \frac{4V_0}{49\pi\omega C Z(7\omega)}e^{j\left[7\omega t - \phi(7\omega) - \frac{\pi}{2}\right]} + \ldots$$

pertanto la tensione $v_C(t)$ è data da:

$$v_C(t) = \mathcal{Re}\left\{\overline{V}_C\right\} = \mathcal{Re}\left\{\frac{4V_0}{\pi\omega C}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 Z(n\omega)}\frac{j^{n+1}}{2}\left[(-1)^n - 1\right]e^{j\left[n\omega t - \phi(n\omega) - \frac{\pi}{2}\right]}\right\} =$$
$$= \frac{4V_0}{\pi Z(\omega)}\cos\left[\omega t - \phi(\omega)\right] - \frac{4V_0}{9\pi\omega C Z(3\omega)}\cos\left[3\omega t - \phi(3\omega) - \frac{\pi}{2}\right] + \frac{4V_0}{25\pi\omega C Z(5\omega)}\cos\left[5\omega t - \phi(5\omega) - \frac{\pi}{2}\right] + \ldots$$

la cui rappresentazione grafica è mostrata in figura



Il metodo descritto può essere ulteriormente esteso per consentire lo studio della sollecitazione dei circuiti con stimoli non periodici attraverso l'algoritmo della *trasformata di Fourier*.