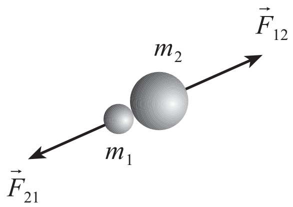
# 8 GLI URTI

Per *urto* si intende l'interazione tra due particelle o due corpi estesi che si esplica attraverso forze di tipo impulsivo in un tempo trascurabile rispetto ai tempi tipici di osservazione del moto, prima e dopo tale interazione. Sebbene il senso comune associ ad un urto tra due corpi il contatto tra questi, in pratica da un esame microscopico dell'interazione che si ha tra i corpi durante l'urto, è possibile dedurre che tale assunzione risulta priva di significato. Ad esempio, nell'interazione di due particelle dotate della stessa carica, queste non giungono mai realmente a contatto ma si respingono per effetto dell'intensa repulsione colombiana che si esplica tra loro a breve distanza.

Consideriamo l'urto tra due particelle isolate, rispettivamente di masse $m_1$ ed $m_2$. Posto $\vec{F}_{21}$ la forza esercitata da $m_2$ su $m_1$, per effetto dell'interazione la quantità di moto della particella $m_1$ varierà di una quantità $\Delta\vec{p}_1$ pari a:




$$\Delta\vec{p}_1 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{21}\, dt \;;$$

analogamente, se $\vec{F}_{12}$ è la forza esercitata da $m_1$ su $m_2$, la variazione della quantità di moto di $m_2$ sarà:

$$\Delta\vec{p}_2 = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{12}\, dt \;.$$

Le dipendenze temporali delle forze $\vec{F}_{21}$ e $\vec{F}_{12}$ risulteranno, in genere, abbastanza complicate; tuttavia, dalla terza legge di Newton, essendo $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$, risulta:

$$\Delta\vec{p}_1 = -\Delta\vec{p}_2 \,;$$

cioè, se $\Delta\vec{p}_1 = \vec{p}_1(t_2) - \vec{p}_1(t_1)$ e $\Delta\vec{p}_2 = \vec{p}_2(t_2) - \vec{p}_2(t_1)$, allora:

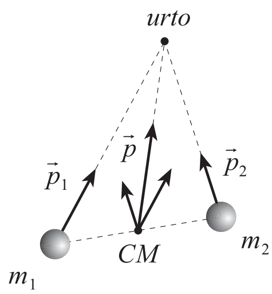
$$\vec{p}_1(t_1) + \vec{p}_2(t_1) = \vec{p}_1(t_2) + \vec{p}_2(t_2)\,,$$

ovvero la quantità di moto totale del sistema $\vec{p}(t) \equiv \vec{p}_1(t) + \vec{p}_2(t)$ si mantiene costante durante l'urto. Tale risultato rappresenta un'ovvia conseguenza del fatto che il sistema è isolato, quindi non agiscono su di esso forze esterne e le forze di interazione, essendo interne, non provocano la variazione della quantità di moto del sistema. In presenza di forze esterne è possibile considerare approssimativamente valido il principio conservazione della quantità di moto del sistema, purché tali forze non abbiano carattere impulsivo e la durata dell'urto sia abbastanza piccola. Infatti la variazione $\Delta\vec{p}$ della quantità di moto totale del sistema $\vec{p}$ dovuta alle sole forze esterne può esprimersi come:

$$\Delta\vec{p} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}^{(ext)}\, dt = \left\langle \vec{F}^{(ext)} \right\rangle \Delta t\,,$$

per cui se la media della forza esterna $\left\langle \vec{F}^{(ext)} \right\rangle$ nell'intervallo $\Delta t = t_2 - t_1$ è piccola o se è tale l'intervallo $\Delta t$, risulta di conseguenza trascurabile la variazione $\Delta\vec{p}$ della quantità di moto totale determinata da $\vec{F}^{(ext)}$. Mentre la quantità di moto totale si conserva in tutti gli urti in cui le forze esterne agenti sul sistema sono trascurabili, l'energia cinetica totale, in generale, non si conserva. In particolare la conservazione dell'energia cinetica durante l'urto viene adoperata per stabilire una classificazione dei processi d'urto.

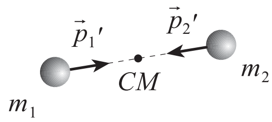
Lo studio degli urti può essere svolto sia rispetto ad un sistema di riferimento inerziale che nel sistema del centro di massa. Se $\vec{v}_{CM}$ è la velocità del centro di massa rispetto al sistema di riferimento inerziale (solitamente denominato in questo ambito *sistema del laboratorio*), le velocità delle due particelle $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ rispetto a questo sistema sono legate alle velocità rispetto al centro di massa $\vec{v}_1'$ e $\vec{v}_2'$ dalle relazioni:




$$\begin{aligned} \vec{v}_1 &= \vec{v}_1' + \vec{v}_{CM}\,, \\ \vec{v}_2 &= \vec{v}_2' + \vec{v}_{CM}\,. \end{aligned}$$

Il vantaggio del sistema del centro di massa risiede nel fatto che in tale ambito la quantità di moto totale $\vec{p}'$ della coppia di particelle è nulla, infatti:

$$\begin{aligned} \vec{p}' &= m_1\vec{v}_1' + m_2\vec{v}_2' = m_1\vec{v}_1 - m_1\vec{v}_{CM} + m_2\vec{v}_2 - m_2\vec{v}_{CM} = \\ &= m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 - \left(m_1 + m_2\right)\frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} = \vec{0}. \end{aligned}$$




Pertanto, attribuendo i pedici $i$ ed $f$ rispettivamente ai vettori che caratterizzano le particelle prima e dopo l'urto, si ha:

$$\begin{aligned} \vec{p}_i' &= m_1\vec{v}_{1i}' + m_2\vec{v}_{2i}' = \vec{0}, \\ \vec{p}_f' &= m_1\vec{v}_{1f}' + m_2\vec{v}_{2f}' = \vec{0}, \end{aligned}$$

così

$$\begin{aligned} \vec{p}_{1i}' &= -\vec{p}_{2i}', \\ \vec{p}_{1f}' &= -\vec{p}_{2f}', \end{aligned}$$

cioè un osservatore posto nel sistema del centro di massa vede le due particelle muoversi verso il centro di massa con quantità di moto uguali ed opposte prima dell'urto ed allontanarsi dal centro di massa, sempre con quantità di moto uguali ed opposte dopo l'urto. In generale $\vec{p}_{1i}' \neq \vec{p}_{1f}'$ e $\vec{p}_{2i}' \neq \vec{p}_{2f}'$.

## 8.1 Urto completamente anelastico

La massima perdita di energia cinetica si ha quando le due particelle di massa $m_1$ e $m_2$ dopo l'urto si muovono come un'unica particella di massa pari alla somma $m_1 + m_2$. Un urto di questo tipo è detto *completamente anelastico*. Indicando con $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ le velocità prima dell'urto e con $\vec{v}'$ la velocità delle due particelle accoppiate dopo l'urto, se vale il principio di conservazione della quantità di moto risulta:

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \left(m_1 + m_2\right)\vec{v}',$$

ovvero:

$$\vec{v}' = \frac{m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2}{m_1 + m_2} \equiv \vec{v}_{CM},$$

cioè dopo l'urto la particella di massa $m_1 + m_2$ si muove con la velocità del centro di massa delle particelle immediatamente prima dell'urto, quindi nell'urto si conserva la velocità del centro di massa. Applicando il teorema di König (6.17), l'energia cinetica prima dell'urto vale:

$$E_{k\,i} = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = E'_{k\,i} + \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)v_{CM}^2;$$

d'altra parte, dopo l'urto le particelle sono in quiete nel sistema del centro di massa e $E'_{k\,f} = 0$, così:

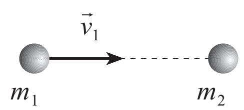
$$E_{k\,f} = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)v_{CM}^2,$$

cioè nell'urto è assorbita l'energia che le particelle posseggono prima dell'urto nel sistema del centro di massa. Infatti la variazione $\Delta E_k$ di energia cinetica prima e dopo l'urto vale:

$$\Delta E_k = E_{k\,f} - E_{k\,i} = -E'_{k\,i};$$

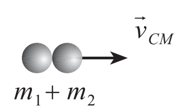
tale energia viene utilizzata per deformare permanentemente le due particelle dopo l'urto.

**Esempio:** Consideriamo l'urto tra due particelle isolate di masse $m_1$ e $m_2$, la prima con velocità $\vec{v}_1$ e l'altra in quiete prima dell'urto. Supponiamo che l'urto sia completamente anelastico. Dal principio di conservazione della quantità di moto risulta:




$$m_1\vec{v}_1 = \left(m_1 + m_2\right)\vec{v}_{CM}$$

cioè




$$\vec{v}_{CM} = \frac{m_1}{m_1 + m_2}\vec{v}_1.$$

Quindi dopo l'urto il moto avviene nella stessa direzione e verso del moto di $m_1$ prima dell'urto. Le energie cinetiche prima e dopo l'urto sono, rispettivamente:

$$E_{k\,i} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2,$$

$$E_{k\,f} = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right) v_{CM}^2 = \frac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right) \frac{m_1^2 v_1^2}{\left(m_1 + m_2\right)^2} = \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} v_1^2,$$

per cui la variazione di energia cinetica è:

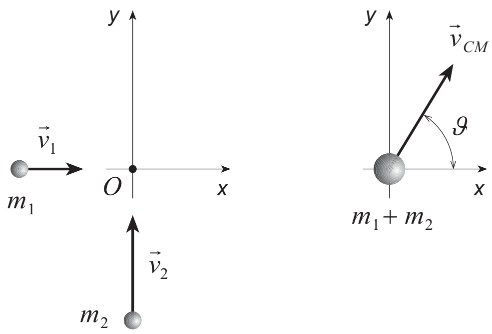
$$\Delta E_k = E_{k\,f} - E_{k\,i} = \frac{1}{2} \frac{m_1^2}{m_1 + m_2} v_1^2 - \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = -\frac{m_1 m_2}{2\left(m_1 + m_2\right)} v_1^2;$$

in particolare risulta:

$$E_{k\,f} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} E_{k\,i}.$$

Pertanto, se $m_1 = m_2$ si ha $E_{k\,f} = E_{k\,i}/2$, cioè nell'urto si perde la metà dell'energia cinetica iniziale; se $m_1 \gg m_2$ allora $E_{k\,f} \approx E_{k\,i}$, cioè si ha una perdita trascurabile di energia; se $m_1 \ll m_2$ segue $E_{k\,f} \approx 0$ ovvero si perde tutta l'energia cinetica nell'urto.

**Esempio:** Consideriamo due particelle isolate di massa $m_1$ e $m_2$ in moto l'una verso l'altra con velocità $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$ lungo direzioni perpendicolari tra loro. Consideriamo il sistema di riferimento con origine $O$ nel punto in cui si verifica l'urto e con gli assi orientati come le velocità $\vec{v}_1$ e $\vec{v}_2$. Dalla conservazione della quantità di moto segue:




$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = \left(m_1 + m_2\right)\vec{v}_{CM};$$

indicando con $\vartheta$ l'angolo che forma il vettore $\vec{v}_{CM}$ con l'asse $x$, proiettando la relazione precedente sugli assi, si ha:

$$x: \qquad m_1 v_1 = \left(m_1 + m_2\right) v_{CM} \cos\vartheta,$$

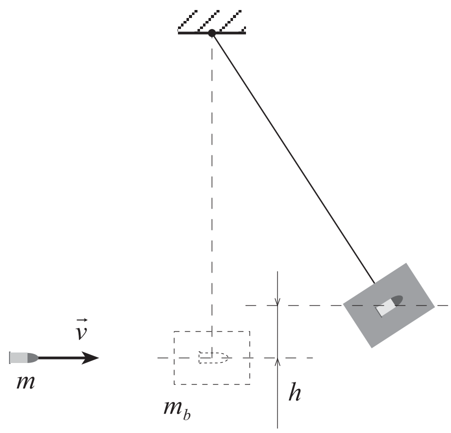
$$y: \qquad m_2 v_2 = \left(m_1 + m_2\right) v_{CM} \sin\vartheta,$$

da cui segue:

$$\tan\vartheta = \frac{m_2 v_2}{m_1 v_1},$$

$$v_{CM} = \frac{\sqrt{\left(m_1 v_1\right)^2 + \left(m_2 v_2\right)^2}}{m_1 + m_2}.$$

**Esempio:** (*pendolo balistico*) Consideriamo il dispositivo di figura costituito da un blocco di legno sospeso verticalmente ad un filo. Una pallottola di massa $m$ e velocità $\vec{v}$ diretta orizzontalmente urta il blocco e vi si conficca. Se il tempo di collisione, solitamente dell'ordine dei millesimi di secondo, è piccolo rispetto al periodo di oscillazione del pendolo, il filo resta verticale durante l'urto. Siccome sul sistema non agiscono forze dirette orizzontalmente (la forza peso è verticale) la componente della quantità di moto lungo questa direzione si conserva. Pertanto, se $m_b$ è la massa del blocco sospeso, si ha:




$$mv = \left(m + m_b\right) v',$$

dove $v'$ è la velocità del sistema pallottola+blocco, pari a:

$$v' = \frac{m}{m+m_b} v \cdot$$

Dopo l’urto, dalla conservazione dell’energia meccanica durante l’oscillazione , risulta:

$$\frac{1}{2}(m+m_b)v'^2 = (m+m_b)gh ,$$

ovvero:

$$v' = \sqrt{2gh}$$

che, sostituita nell’espressione precedente, fornisce la velocità iniziale della pallottola:

$$v = \left(1+\frac{m_b}{m}\right)\sqrt{2gh} \cdot$$

## 8.2 Urto elastico

Se le forze interne che si manifestano durante l’urto sono conservative, oltre a conservarsi la quantità di moto si conserva anche l’energia cinetica. In questo caso i corpi che si urtano subiscono deformazioni di tipo elastico per poi tornare nella configurazione precedente all’urto. Siccome l’energia potenziale non cambia durante l’urto, resta costante anche l’energia cinetica. Per tale urto, che è detto pertanto, *elastico*, valgono quindi le condizioni:

$$\vec{p}_i = \vec{p}_f ,$$
$$E_{k\,i} = E_{k\,f} .$$

Nel caso di un urto in tre dimensioni a tali relazioni corrisponde un sistema di quattro equazioni in sei incognite[1] mentre, in un urto in due dimensioni corrisponde un sistema di tre equazioni in quattro incognite. In entrambi i casi la soluzione del problema richiede oltre alla conoscenza delle velocità delle particelle prima dell’urto, anche qualche informazione relativa alle velocità delle particelle dopo l’urto. Il problema può essere completamente risolto nel caso di urto unidimensionale, avendo due equazioni in due incognite:

$$m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} ,$$
$$\frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 .$$

Nel sistema del centro di massa, siccome le quantità di moto totali sono sempre nulle, si ha:

$$m_1 v'_{1i} = -m_2 v'_{2i} , \tag{8.1}$$
$$m_1 v'_{1f} = -m_2 v'_{2f} , \tag{8.2}$$

e inoltre dalla conservazione dell’energia cinetica risulta:

[1] Le incognite sono dalle componenti lungo gli assi coordinati delle velocità delle due particelle dopo l’urto.

$$\frac{1}{2}m_1 v_{1i}'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2i}'^2 = \frac{1}{2}m_1 v_{1f}'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_{2f}'^2, \tag{8.3}$$

da cui segue[2]:

$$v_{1f}' = -v_{1i}', \tag{8.4}$$
$$v_{2f}' = -v_{2i}'; \tag{8.5}$$

cioè nel sistema del centro di massa la quantità di moto di ciascuna particella resta costante in modulo ma cambia di verso. Nel sistema di riferimento del laboratorio, noto

$$v_{CM} = \frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}, \tag{8.6}$$

dalla relazione $v_k = v_k' + v_{CM}$ segue[3]:

---

[2] Dalla relazione (8.3) segue $m_1\left(v_{1i}'^2 - v_{1f}'^2\right) = m_2\left(v_{2f}'^2 - v_{2i}'^2\right)$, ovvero

$$m_1\left(v_{1i}' - v_{1f}'\right)\left(v_{1i}' + v_{1f}'\right) = m_2\left(v_{2f}' - v_{2i}'\right)\left(v_{2f}' + v_{2i}'\right).$$

D'altra parte, sottraendo membro a membro le relazioni (8.1) e (8.2) si ha:

$$m_1\left(v_{1i}' - v_{1f}'\right) = m_2\left(v_{2f}' - v_{2i}'\right),$$

così, dividendo membro a membro queste due espressioni, si ottiene:

$$v_{1i}' + v_{1f}' = v_{2f}' + v_{2i}' .$$

Attraverso le relazioni (8.1) e (8.2) è possibile esprimere le velocità $v_{2i}'$ e $v_{2f}'$ rispettivamente come, $-\left(m_1/m_2\right)v_{1i}'$ e $-\left(m_1/m_2\right)v_{1f}'$, pertanto dalla precedente identità segue $v_{1i}' + v_{1f}' = -\left(m_1/m_2\right)\left(v_{1i}' + v_{1f}'\right)$, ovvero

$$v_{1i}'\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) = -v_{1f}'\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)$$

e dividendo ambo i membri per $1 + m_1/m_2$ si ottiene la prima delle due relazioni, analogamente si procede per la seconda.

[3] Ad esempio, $v_{1f} = v_{1f}' + v_{CM}$ così, sfruttando la relazione (8.4) si ottiene:

$$v_{1f} = v_{1f}' + v_{CM} = -v_{1i}' + v_{CM},$$

d'altra parte risulta anche $v_{1i} = v_{1i}' + v_{CM}$, cioè $v_{1i}' = -\left(v_{1i} - v_{CM}\right)$, così sostituendo nella precedente espressione ed utilizzando la (8.6) segue:

$$v_{1f} = v_{1f}' + v_{CM} = -\left(v_{1i} - v_{CM}\right) + v_{CM} = -v_{1i} + 2v_{CM} = -v_{1i} + 2\frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} = \frac{-m_1 v_{1i} - m_2 v_{1i} + 2m_1 v_{1i} + 2m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} =$$
$$= \frac{\left(m_1 - m_2\right)v_{1i} + 2m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2}.$$

$$v_{1f} = \frac{(m_1 - m_2)v_{1i} + 2m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2},$$

$$v_{2f} = \frac{2m_1 v_{1i} + (m_2 - m_1)v_{2i}}{m_1 + m_2}.$$

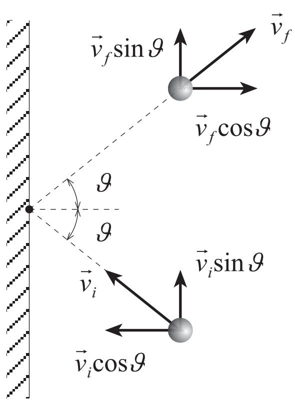
In queste espressioni hanno valore i segni delle velocità nel senso che, fissato il verso di una velocità come riferimento, ad esempio quello di $\vec{v}_{1i}$, il segno di $\vec{v}_{2i}$ sarà positivo o negativo rispettivamente se $\vec{v}_{1i} \cdot \vec{v}_{2i} > 0$ o se $\vec{v}_{1i} \cdot \vec{v}_{2i} < 0$. Di conseguenza per i segni delle velocità finali $\vec{v}_{1f}$ e $\vec{v}_{2f}$ varrà la medesima regola, cioè se $v_{1f}$ e $v_{2f}$ saranno positivi o negativi significa che il verso di $\vec{v}_{1f}$ e $\vec{v}_{2f}$ è o meno concorde con quello di $\vec{v}_{1i}$.

Dalle precedenti espressioni risulta inoltre che, se $m_1 = m_2$ allora $v_{1f} = v_{2i}$ e $v_{2f} = v_{1i}$, cioè a seguito dell'urto si ha uno scambio di velocità. Se $m_1 \gg m_2$, allora $v_{1f} \approx v_{1i}$ e $v_{2f} \approx 2v_{1i} - v_{2i}$, cioè la velocità della particella di massa $m_1$ resta praticamente invariata. Infine, se $m_1 \ll m_2$ e la particella di massa $m_2$ è ferma, $v_{2i} = 0$, allora $v_{1f} = -v_{1i}$ e $v_{2f} \approx 0$, cioè la particella di massa $m_1$ rimbalza all'indietro e quella di massa $m_2$ resta praticamente ferma. Quest'ultimo caso si ha nella circostanza in cui una particella colpisce un corpo massiccio fermo, come può essere una parete. Osserviamo che se $v_{2i} = 0$ la quantità di moto totale prima dell'urto è $m_1 v_{1i}$ e, assumendo che sia $v_{2f} = 0$, la quantità di moto non si conserva. Ciò è spiegato dal fatto che è necessaria una forza esterna di tipo impulsivo per mantenere fermo il corpo di massa $m_2$ e ciò non consente la conservazione della quantità di moto.

**Esempio:** Consideriamo un urto obliquo contro una parete immobile liscia. Sia $\vartheta$ l'angolo formato dalla direzione del vettore velocità $\vec{v}_i$ con la normale alla parete; il vettore $\vec{v}_i$ può essere decomposto parallelamente e perpendicolarmente al piano in due vettori, rispettivamente di modulo $v_i \sin\vartheta$ e $v_i \cos\vartheta$. L'urto non avviene nella direzione parallela alla parete, per cui in tale direzione si conserva la quantità di moto e, pertanto, dopo l'urto la componente della velocità in questa direzione continua ad essere $v_i \sin\vartheta$. Nella direzione ortogonale, per quanto visto, la velocità si inverte e, dopo l'urto, la componente normale alla superficie vale $-v_i \cos\vartheta$. Pertanto

$$v_f = v_i,$$

e $\vec{v}_f$ forma con la normale alla parete un angolo pari a $\vartheta$, cioè si ha una situazione analoga a quella della riflessione di un raggio luminoso da parte di uno specchio piano.




## 8.3 Urto anelastico

Quando in un urto si conserva la quantità di moto in assenza di forze esterne di tipo impulsivo, non si conserva l'energia cinetica e le particelle si separano dopo l'interazione, l'urto viene detto *anelastico*. In tale circostanza una parte dell'energia cinetica, prima dell'urto nel sistema del centro di massa, viene assorbita nell'interazione convertendosi in energia potenziale di deformazione o in calore; cioè si può scrivere:

$$E'_{kf} = e^2 E'_{ki},$$

dove la quantità $e$ prende il nome di *coefficiente di restituzione* e vale 1 per un urto elastico, 0 per un urto completamente anelastico e, in generale, $0 \le e \le 1$. La variazione relativa di energia cinetica nell'urto vale:

$$\frac{\Delta E'_k}{E'_k} = \frac{E'_{k\,f} - E'_{k\,i}}{E'_{k\,i}} = e^2 - 1,$$

per cui se $e = 1$, $\Delta E'_k / E'_k = 0$, cioè l'energia cinetica è conservata; mentre se $e = 0$, $\Delta E'_k / E'_k = -1$, cioè tutta l'energia cinetica del moto relativo al centro di massa è assorbita e trasformata. Dal principio di conservazione della quantità di moto e dal principio di conservazione dell'energia, entrambi espressi nel sistema di riferimento del centro di massa si ha:

$$m_1 v'_{1\,i} = -m_2 v'_{2\,i}, \tag{8.7}$$
$$m_1 v'_{1\,f} = -m_2 v'_{2\,f}, \tag{8.8}$$
$$e^2\left(\frac{1}{2}m_1 v'^2_{1\,i} + \frac{1}{2}m_2 v'^2_{2\,i}\right) = \frac{1}{2}m_1 v'^2_{1\,f} + \frac{1}{2}m_2 v'^2_{2\,f}, \tag{8.9}$$

da cui segue[4]:

$$v'_{1\,f} = -e\, v'_{1\,i}, \tag{8.10}$$
$$v'_{2\,f} = -e\, v'_{2\,i}; \tag{8.11}$$

[4] Queste relazioni si deducono procedendo in maniera analoga al caso dell'urto elastico. Dalla relazione (8.9) segue $m_1\left(e^2 v'^2_{1\,i} - v'^2_{1\,f}\right) = m_2\left(v'^2_{2\,f} - e^2 v'^2_{2\,i}\right)$, ovvero

$$m_1\left(e\,v'_{1\,i} - v'_{1\,f}\right)\left(e\,v'_{1\,i} + v'_{1\,f}\right) = m_2\left(v'_{2\,f} - e\,v'_{2\,i}\right)\left(v'_{2\,f} + e\,v'_{2\,i}\right).$$

D'altra parte, moltiplicando ambo i membri della relazione (8.7) per $e$ e sottraendo la (8.8) si ha:

$$m_1\left(e\,v'_{1\,i} - v'_{1\,f}\right) = m_2\left(v'_{2\,f} - e\,v'_{2\,i}\right),$$

così, dividendo membro a membro queste due espressioni, si ottiene:

$$e\,v'_{1\,i} + v'_{1\,f} = v'_{2\,f} + e\,v'_{2\,i}\,.$$

Attraverso le relazioni (8.7) e (8.8) è possibile esprimere le velocità $v'_{2\,i}$ e $v'_{2\,f}$ rispettivamente come, $-\left(m_1/m_2\right)v'_{1\,i}$ e $-\left(m_1/m_2\right)v'_{1\,f}$, pertanto dalla precedente identità segue $e\,v'_{1\,i} + v'_{1\,f} = -\left(m_1/m_2\right)v'_{1\,i} - e\left(m_1/m_2\right)v'_{1\,f}$, ovvero:

$$e\,v'_{1\,i}\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) = -v'_{1\,f}\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right)$$

e dividendo ambo i membri per $1 + m_1/m_2$ si ottiene la prima delle due relazioni, analogamente si procede per la seconda.

cioè, come nel caso dell'urto elastico, nel sistema del centro di massa la quantità di moto di ciascuna particella cambia di verso, tuttavia non si mantiene costante in modulo ma si riduce di una quantità paria al coefficiente di restituzione. Nel sistema di riferimento del laboratorio si ha[5]:

$$\begin{aligned} v_{1f} &= \frac{(m_1 - em_2)v_{1i} + m_2(1+e)v_{2i}}{m_1 + m_2}, \\ v_{2f} &= \frac{m_1(1+e)v_{1i} + (m_2 - em_1)v_{2i}}{m_1 + m_2}. \end{aligned} \tag{8.12}$$

Si noti che tali espressioni si riconducono a quelle proprie dell'urto elastico per $e = 1$ mentre, per $e = 0$ forniscono $v_{1f} = v_{2f} = v_{CM}$, caratteristica relativa all'urto completamente anelastico.

**Esempio:** Una particella cade sopra un piano orizzontale partendo da un'altezza $h_1$ con velocità iniziale nulla,. Quindi rimbalza risalendo all'altezza $h_2$, con $h_2 < h_1$. Stabiliamo il coefficiente di restituzione. In questo caso, dal principio di conservazione dell'energia, segue:

$$\frac{1}{2}mv_i^2 = mgh_1,$$

da cui si ha

$$v_i = \sqrt{2gh_1},$$

e, analogamente, dopo l'urto:

$$\frac{1}{2}mv_f^2 = mgh_2,$$

da cui, esplicitando il segno di $v_f$ contrario a quello di $v_i$, segue:

$$v_f = -\sqrt{2gh_2}.$$

In tale circostanza la velocità del secondo corpo, il piano, è nulla; così dalla relazione (8.12) nel limite $m_2 \to \infty$ si ha:

[5] Anche queste espressioni si ricavano procedendo come nel caso dell'urto elastico. Ad esempio $v_{1f} = v'_{1f} + v_{CM}$ così, sfruttando la relazione (8.10) si ottiene:

$$v_{1f} = v'_{1f} + v_{CM} = -e\,v'_{1i} + v_{CM},$$

d'altra parte risulta anche $v_{1i} = v'_{1i} + v_{CM}$, cioè $v'_{1i} = -(v_{1i} - v_{CM})$, così sostituendo nella precedente espressione ed utilizzando la (8.6) segue:

$$\begin{aligned} v_{1f} &= v'_{1f} + v_{CM} = -e\,v_{1i} + e\,v_{CM} + v_{CM} = -e\,v_{1i} + (1+e)v_{CM} = -e\,v_{1i} + (1+e)\frac{m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} = \\ &= \frac{-e\,m_1 v_{1i} - e\,m_2 v_{1i} + m_1 v_{1i} + e\,m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} + e\,m_2 v_{2i}}{m_1 + m_2} = \frac{(m_1 - em_2)v_{1i} + m_2(1+e)v_{2i}}{m_1 + m_2}. \end{aligned}$$

$$v_f = \lim_{m_2 \to \infty} \frac{(m - em_2)v_i}{m + m_2} = \lim_{m_2 \to \infty} \frac{\left(\frac{m}{m_2} - e\right)v_i}{1 + \frac{m}{m_2}} = -ev_i \ ,$$

pertanto:

$$e = -\frac{v_f}{v_i} = \frac{\sqrt{2gh_2}}{\sqrt{2gh_1}} = \sqrt{\frac{h_2}{h_1}}.$$

## 8.4 Urti tra punti materiali e corpi rigidi o tra corpi rigidi

Il punto di partenza per lo studio degli urti tra punti materiali e corpi rigidi o degli urti tra corpi rigidi è la determinazione delle leggi di conservazione valide. La costanza della quantità di moto si ha se sul sistema agiscono solo forze interne o quelle esterne non sono di tipo impulsivo. In particolare, se esiste un vincolo che tiene fermo un punto del corpo rigido, non si verifica la conservazione della quantità di moto poiché durante l'urto il vincolo sviluppa una forza di tipo impulsivo. La costanza dell'energia cinetica del sistema si ha soltanto se è noto a priori che l'urto è di tipo elastico. La costanza del momento angolare si ha qualora, rispetto ad un certo polo fisso nel sistema di laboratorio o coincidente col centro di massa, il momento della risultante delle forze esterne, comprese quelle vincolari, è nullo; si ha la conservazione del momento angolare se agiscono solo forze interne, indipendentemente dalla scelta del polo. In particolare, per un corpo vincolato, durante l'urto i vincoli esplicano delle forze tali che l'impulso $\vec{\mathcal{I}}$ della forza risultante $\vec{F}_v$ e l'impulso angolare $\vec{\mathcal{I}}_\tau$ del momento risultante $\vec{\tau}_v$, rispettivamente pari a

$$\vec{\mathcal{I}} = \int_{\Delta t} \vec{F}_v \, dt,$$
$$\vec{\mathcal{I}}_\tau = \int_{\Delta t} \vec{\tau}_v \, dt,$$

sono uguali, rispettivamente, alla variazione della quantità di moto ed alla variazione del momento angolare del sistema. Come già visto nei precedenti esempi, essendo grandezze vettoriali, può aversi la conservazione della quantità di moto o del momento angolare solo limitatamente ad alcune loro componenti.

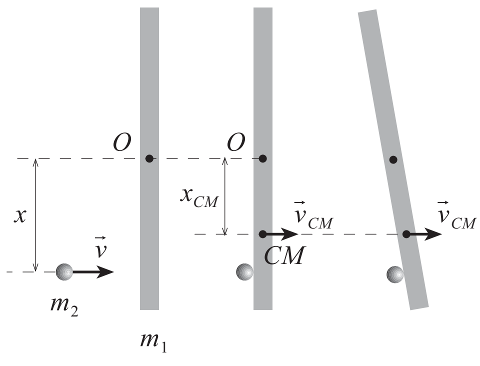
**Esempio:** Un'asta a riposo su un piano orizzontale, di massa $m_1$ e lunghezza $l$, è colpita da un proiettile di massa $m_2$ e velocità $\vec{v}$ perpendicolarmente all'asta a distanza $x$ dal centro $O$, rimanendovi conficcato; stabiliamo la velocità lineare e angolare del sistema dopo l'urto. Siccome nell'urto, completamente anelastico, agiscono solo forze interne, si conservano la quantità di moto e il momento angolare. Pertanto, dalla prima legge, segue:

$$m_2 v = (m_1 + m_2) v_{CM} \ ,$$

da cui segue:

$$v_{CM} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} v,$$

dove la posizione del centro di massa rispetto al centro $O$ è:



$$x_{CM} = \frac{m_2 x}{m_1 + m_2} \tag{8.13}$$

e il centro di massa continua a muoversi dopo l'urto lungo la linea tratteggiata di figura. Assumendo quale polo per il calcolo del momento angolare il centro di massa del sistema, si ha:

$$I\omega = L = m_2 v\left(x - x_{CM}\right),$$

dove $L$ è il momento angolare totale del sistema; il momento d'inerzia rispetto al centro $O$ dell'asta è dato dalla (7.5) e vale $m_2 l^2/12$ e rispetto al centro di massa, per il teorema di Huygens-Steiner (7.7), vale $m_2 l^2/12 + m_2 x_{CM}$ ; per il proiettile il momento d'inerzia rispetto ad $O$ vale $m_1 x^2$. Pertanto la relazione precedente si scrive:

$$\left(\frac{1}{12} m_2 l^2 + m_2 x_{CM}{}^2 + m_1 x^2\right)\omega = m_2 v\left(x - x_{CM}\right),$$

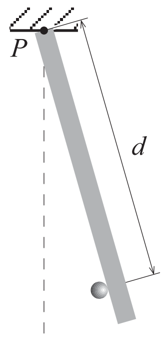
da cui, facendo uso della relazione (8.13) segue:

$$\omega = \frac{m_2 v\left(x - x_{CM}\right)}{\frac{1}{12} m_2 l^2 + m_2 x_{CM}{}^2 + m_1 x^2} = \frac{m_2 x v}{\left(m_1 + m_2\right)\frac{l^2}{12} + m_2 x^2},$$

e la rotazione avviene in senso antiorario. Si noti che $\omega$ dipende da $x$ per cui colpendo l'asta in $O$, la velocità del centro di massa avrebbe lo stesso valore determinato, ma $\omega$ risulterebbe nulla.

**Esempio:** Supponiamo che l'asta dell'esempio precedente sia vincolata ad un estremo attorno al quale ruota senza attrito. Assumiamo per semplicità che risulti $m_1 = m_2 \equiv m$ e sia $d$ la distanza dell'estremo fisso $P$ dal punto di impatto. Stabiliamo la velocità angolare finale del sistema. La presenza del vincolo impedisce, in questo caso, l'applicazione del principio di conservazione della quantità di moto a causa della forza impulsiva esercitata dal vincolo. È invece possibile applicare il principio di conservazione del momento angolare rispetto a $P$ siccome il momento delle forze vincolari rispetto a tale punto è nullo; pertanto

$$I\omega = L = mvd,$$




dove $I$, in questo caso vale:

$$I = \frac{1}{3} m l^2 + m d^2,$$

così:

$$\omega = \frac{vd}{\frac{1}{3} l^2 + d^2}.$$

La quantità di moto del sistema immediatamente prima dell'urto è pari alla quantità di moto del solo proiettile. Posto $\hat{u}_v = \vec{v}/v$ si ha:

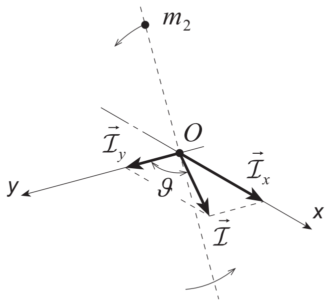
$$\vec{p}_i = m\vec{v} = mv\hat{u}_v.$$

La quantità di moto dopo l'urto è pari alla somma della quantità di moto del proiettile e dell'asta subito dopo l'urto; le loro velocità valgono $\omega d$ e $\omega l/2$, così:

$$\vec{p}_f = m\omega d\hat{u}_v + m\omega\frac{l}{2}\hat{u}_v = m\omega\left(d + \frac{l}{2}\right)\hat{u}_v.$$

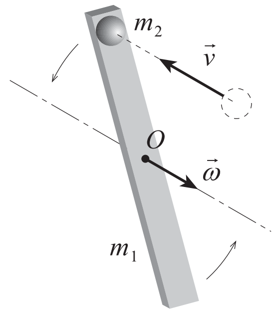
pertanto l'impulso $\vec{\mathcal{I}}$ delle forze del vincolo vale:

$$\vec{\mathcal{I}} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = m\left[\omega\left(d + \frac{l}{2}\right) - v\right]\hat{u}_v = mlv\frac{\dfrac{d}{2} - \dfrac{l}{3}}{\dfrac{l^3}{3} + d^2}\hat{u}_v,$$




così se $d > 2l/3$, l'impulso è diretto come $\vec{v}$, mentre se $d < 2l/3$ è opposto a $\vec{v}$ e, se $d = 2l/3$, l'impulso è nullo, cioè è come se ci si trovasse nelle condizioni del precedente esempio, con $x$ pari a $2l/3 - l/2 = l/6$, ottenendo quindi lo stesso valore della velocità angolare $6v/7l$; ovviamente l'effetto del vincolo continua a manifestarsi determinando la rotazione dell'asta dopo l'urto.

**Esempio:** Un'asta di lunghezza $l$ e massa $m_1$ ruota con velocità angolare $\vec{\omega}$, in verso antiorario, in un piano verticale attorno ad un asse fisso orizzontale. Una particella di massa $m_2$ e velocità $\vec{v}$ colpisce un estremo dell'asta e vi si conficca. Stabiliamo la velocità angolare dopo l'urto. Nell'urto non si conservano né la quantità di moto né l'energia cinetica ma si conserva la componente del momento angolare parallela all'asse di rotazione, non essendo presenti momenti esterni in tale direzione; invece la componente del momento angolare ortogonale all'asse di rotazione, dovuta alla particella, viene annullata nell'urto dal momento esplicato dai supporti dell'asta che vincolano l'asse di rotazione. La componente del momento angolare lungo la direzione di rotazione $L_i$ prima dell'urto, vale:




$$L_i = I\omega = \frac{1}{12}m_1 l^2\omega,$$

essendo $I = (1/12)m_1 l^2$; mentre dopo l'urto:

$$L_f = \left[I + m_2\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]\omega_f = \left(\frac{1}{12}m_1 l^2 + \frac{1}{4}m_2 l^2\right)\omega_f = \frac{1}{12}(m_1 + 3m_2)l^2\omega_f.$$

Siccome:

$$L_i = L_f,$$

sostituendo si ha:

$$\omega_f = \frac{m_1}{m_1 - 3m_2}\omega.$$

La rotazione prosegue in senso orario siccome $\omega_f$ e $\omega$ hanno lo stesso segno. Se $m_1 \gg m_2$ risulta $\omega_f \approx \omega$, cioè l'urto non provoca effetti significativi sulla rotazione dell'asta; Se $m_1 \ll m_2$, allora $\omega_f \approx 0$, cioè l'asta si ferma. Per determinare l'impulso delle forze esercitate dal vincolo, stabiliamo la variazione della quantità di moto totale del sistema. Le componenti della quantità di moto lungo l'asse di rotazione (asse *x*) e lungo una direzione perpendicolare all'asse di rotazione (asse *y*) sono:

$$\vec{p}_i = -m_2 v\hat{x},$$
$$\vec{p}_f = m_2\frac{l}{2}\omega_f\hat{y},$$

dove il vettore $\vec{p}_i$, orientato nella direzione negativa delle *x*, rappresenta la quantità di moto originaria della particella, e $\vec{p}_f$ è la quantità di moto della particella subito dopo l'urto dovuta alla rotazione. Essendo l'asse di rotazione fisso e coincidente col centro di massa dell'asta, l'asta non contribuisce. L'impulso vale quindi:

$$\vec{\mathcal{I}} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = m_2\left(v\hat{x} + \frac{1}{2}l\omega_f\hat{y}\right),$$

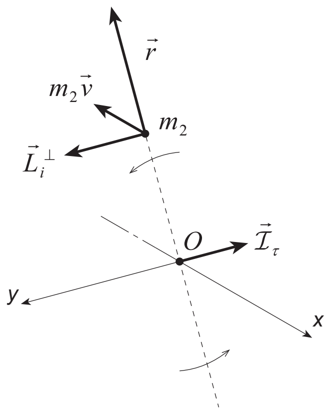
ed ha modulo:

$$\mathcal{I} = m_2\sqrt{v^2 + \frac{1}{4}\left(l\omega_f\right)^2},$$

ed il vettore $\vec{\mathcal{I}}$, situato nel piano *xy*, forma con l'asse *y* un angolo $\vartheta$ pari a :

$$\vartheta = \arctan\left(\frac{I_x}{I_y}\right) = \arctan\left(\frac{2v}{l\omega_f}\right).$$

L'impulso del momento esercitato dal vincolo è pari alla variazione della componente del momento angolare ortogonale all'asse di rotazione $\vec{L}^{\perp}$, in quanto, come visto, la componente parallela si conserva. Indicato con $\vec{r}$ il vettore posizione del punto di impatto di $m_2$, si ha:




$$\vec{L}_i^{\perp} = \vec{r} \times \left(m_2\vec{v}\right),$$
$$\vec{L}_f^{\perp} = \vec{0},$$

pertanto

$$\vec{\mathcal{I}}_\tau = \vec{L}_f^{\perp} - \vec{L}_i^{\perp} = -\vec{r} \times \left(m_2\vec{v}\right),$$

che è diretto lungo la direzione delle *y* negative ed ha modulo:

$$\mathcal{I}_\tau = rm_2v = \frac{1}{2}lm_2v, \cdot$$