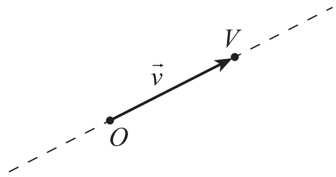
1 VETTORI

Tutte le grandezze per la cui definizione non concorrono altri elementi al di fuori della loro misura vengono dette *grandezze scalari*; sono esempi di grandezze scalari l'intervallo di tempo, la massa, la temperatura, ecc. Esistono tuttavia delle grandezze per le quali non è sufficiente una sola quantità per la loro completa caratterizzazione. Consideriamo, ad esempio, il moto rettilineo di un corpo puntiforme originariamente a riposo in un punto A; qualora si specificasse unicamente che al termine del moto il corpo ha percorso una lunghezza l, tutto ciò che si potrebbe affermare circa la posizione finale B del corpo è la sua localizzazione in un punto della superficie sferica di centro A e raggio l. Per conoscere la posizione B e, di conseguenza, lo spostamento subito dal corpo, oltre all'origine A del moto e la lunghezza dello spostamento, occorre sapere la direzione, ossia la retta AB lungo la quale avviene il movimento ed il verso, cioè in quale dei due sensi viene percorsa la retta AB.

Le grandezze come lo spostamento, per le quali è necessario precisare oltre che la loro misura, o *modulo*, anche la *direzione*, il *verso* e, in certi casi, anche l'*origine* o punto di applicazione, vengono dette *grandezze vettoriali*. Sono esempi di grandezze vettoriali la velocità, l'accelerazione, la forza, ecc.

Una grandezza vettoriale può essere rappresentata graficamente mediante un segmento orientato OV detto *vettore*, indicato con:



$$\vec{v} \equiv \overrightarrow{OV}.$$

La lunghezza

$$v = \overline{OV} \equiv |\vec{v}|,$$

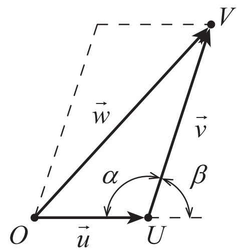
rispetto ad una scala prefissata, rappresenta il modulo (o intensità) del vettore; la retta su cui giace il segmento orientato $\overrightarrow{OV}$ rappresenta la direzione del vettore, il verso è quello che va dal punto O al punto V e l'estremo O indica l'origine del vettore o il suo punto di applicazione.

1.1 Operazioni tra vettori

Mentre per le grandezze scalari valgono le regole del calcolo algebrico, queste non sono valide per le grandezze vettoriali.

Dati i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$, di definisce *somma* un vettore:

$$\vec{w} = \vec{u} + \vec{v}$$

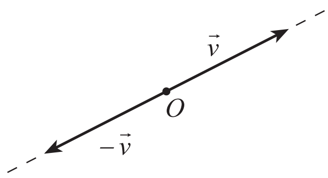


che si ottiene costruendo un parallelogramma con i due lati formati dai vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ disposti in modo che l'origine di uno sia posta in corrispondenza dell'estremo libero dell'altro. Il vettore $\vec{w}$ è rappresentato dalla diagonale che si ottiene congiungendo l'origine O di $\vec{u}$ con l'estremo V di $\vec{v}$. Il modulo del vettore $\vec{w}$ si ricava dall'applicazione del teorema di Carnot al triangolo OUV così formato:

$$w=\sqrt{u^2+v^2-2uv\cos\alpha}=\sqrt{u^2+v^2+2uv\cos\beta}\ ,$$

dove α è l'angolo $O\hat{U}V$ e β è l'angolo supplementare a α. Si osserva banalmente che la somma di vettori è commutativa, pertanto:

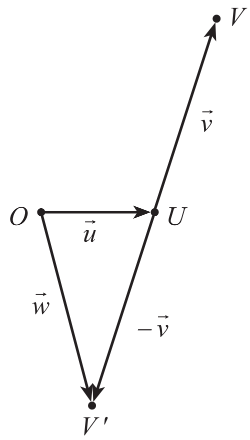
$$\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}\ .$$



Dato un vettore $\vec{v}$, il vettore *opposto* $-\vec{v}$ è un vettore che ha lo stesso modulo e la stessa direzione di $\vec{v}$, ma verso opposto.

La *sottrazione* di un vettore $\vec{v}$ da un vettore $\vec{u}$ può essere riguardata come l'addizione al vettore $\vec{u}$ del vettore $-\vec{v}$, opposto a $\vec{v}$:

$$\vec{w}=\vec{u}-\vec{v}=\vec{u}+\left(-\vec{v}\right).$$



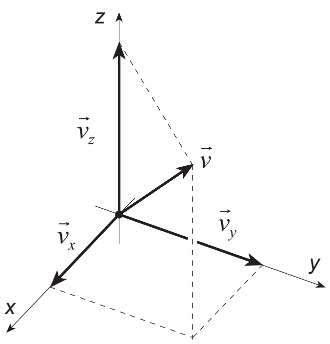
Il prodotto $\vec{w}$ di un vettore $\vec{v}$ per un qualunque scalare m è definito come un vettore di modulo la cui direzione è quella di $\vec{v}$:

$$\vec{w}=m\vec{v}\ ,$$

il verso è quello di $\vec{v}$ se $m>0$, altrimenti è quello di $-\vec{v}$.

Si definisce *versore* associato al vettore $\vec{v}$ il vettore:

$$\hat{v}\equiv\frac{\vec{v}}{v}=\frac{\vec{v}}{\left|\vec{v}\right|};$$



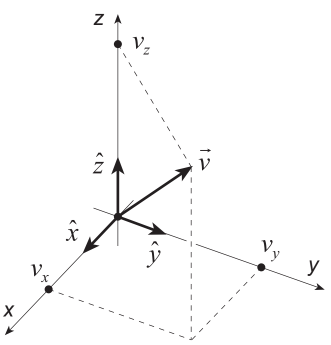
si osservi che $\left|\hat{v}\right|=1$ e pertanto i versori sono adimensionali e servono unicamente a specificare la direzione ed il verso di un vettore assegnato.

Supponiamo di decomporre il vettore $\vec{v}$ nei tre vettori $\vec{v}_x$, $\vec{v}_y$ e $\vec{v}_z$ diretti secondo gli assi di un sistema di coordinate cartesiane:

$$\vec{v}=\vec{v}_x+\vec{v}_y+\vec{v}_z\ ,$$

allora i vettori $\vec{v}_x$, $\vec{v}_y$ e $\vec{v}_z$ sono detti *componenti cartesiani* di $\vec{v}$. Introducendo i versori $\hat{x}$, $\hat{y}$ e $\hat{z}$ diretti nel verso positivo degli assi coordinati, il vettore $\vec{v}$ si può esprimere come:

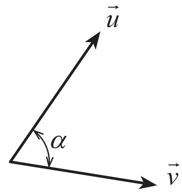
$$\vec{v}=v_x\hat{x}+v_y\hat{y}+v_z\hat{z}\ ,$$



dove v_x, v_y e v_z sono, rispettivamente, i moduli dei vettori componenti $\vec{v}_x$, $\vec{v}_y$ e $\vec{v}_z$. Dall'applicazione del teorema di Pitagora, il modulo di $\vec{v}$ può esprimersi come:

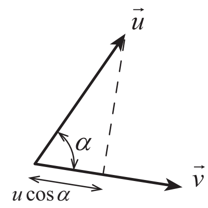
$$v=\sqrt{{v_x}^2+{v_y}^2+{v_z}^2}\ .$$

Si definisce *prodotto scalare* tra i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$, lo scalare:



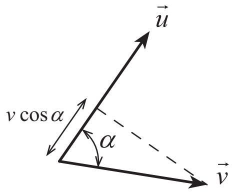
$$\vec{u}\cdot\vec{v} \equiv uv\cos\alpha\ ,$$

dove α è l'angolo compreso tra le direzioni dei due vettori. Si osservi che il prodotto scalare $\vec{u}\cdot\vec{v}$ può intendersi anche come il prodotto tra il modulo di $\vec{v}$ e la proiezione di $\vec{u}$ nella direzione di $\vec{v}$ o, alternativamente, come il prodotto tra il modulo di $\vec{u}$ e la proiezione di $\vec{v}$ nella direzione di $\vec{u}$. Il prodotto scalare è commutativo, per cui:



$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$$

ed il segno cambia in relazione all'angolo α e, in particolare:



$$\vec{u}\cdot\vec{v}\ \begin{cases} >0 & 0\le\alpha<\dfrac{\pi}{2}, \\ =0 & \alpha=\dfrac{\pi}{2}, \\ <0 & \dfrac{\pi}{2}<\alpha\le\pi, \end{cases}$$

così è nullo se i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono tra loro perpendicolari. Per i versori degli assi coordinati valgono le relazioni:

$$\begin{aligned} &\hat{x}\cdot\hat{x} = \hat{y}\cdot\hat{y} = \hat{z}\cdot\hat{z} = 1, \\ &\hat{x}\cdot\hat{y} = \hat{x}\cdot\hat{z} = \hat{y}\cdot\hat{z} = 0, \end{aligned} \tag{1.1}$$

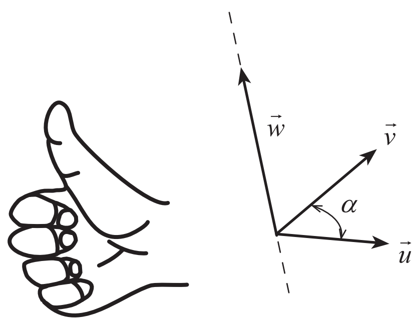
dalle quali segue che[1]:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z\ ,$$

dove u_x, u_y e u_z sono le componenti cartesiane di $\vec{u}$ e v_x, v_y e v_z quelle di $\vec{v}$.

Si definisce *prodotto vettoriale* tra i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ il vettore:

$$\vec{w} \equiv \vec{u}\times\vec{v}\ ,$$



di modulo

$$w = uv\sin\alpha\ ,$$

dove α è l'angolo compreso tra le direzioni dei due vettori,

[1] Infatti, esprimendo i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ attraverso i versori degli assi coordinati, dalla relazioni (1.1) segue:

$$\begin{aligned} \vec{u}\cdot\vec{v} &= \left(u_x\hat{x}+u_y\hat{y}+u_z\hat{z}\right)\cdot\left(v_x\hat{x}+v_y\hat{y}+v_z\hat{z}\right) = \\ &= u_x v_x\left(\hat{x}\cdot\hat{x}\right)+u_x v_y\left(\hat{x}\cdot\hat{y}\right)+u_x v_z\left(\hat{x}\cdot\hat{z}\right)+u_y v_x\left(\hat{y}\cdot\hat{x}\right)+u_y v_y\left(\hat{y}\cdot\hat{y}\right)+u_y v_z\left(\hat{y}\cdot\hat{z}\right)+ \\ &\qquad +u_z v_x\left(\hat{z}\cdot\hat{x}\right)+u_z v_y\left(\hat{z}\cdot\hat{y}\right)+u_z v_z\left(\hat{z}\cdot\hat{z}\right) = \\ &= u_x v_x + u_y v_y + u_z v_z\ . \end{aligned}$$

direzione perpendicolare al piano definito dai vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e verso uguale a quello di una vite destrorsa che ruota da $\vec{u}$ verso $\vec{v}$. Alternativamente il verso di $\vec{w}$ può essere identificato attraverso la *regola della mano destra*: se le quattro dita della mano destra inizialmente orientate verso di $\vec{u}$ si muovono nella direzione di $\vec{v}$ avvolgendo l'angolo α, allora il pollice indica il verso del vettore $\vec{w}$. Da tale definizione segue che il prodotto vettoriale non è commutativo e risulta.

$$\vec{u} \times \vec{v} = -\vec{v} \times \vec{u} \,,$$

e inoltre, se $\alpha = 0$, cioè se i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ sono paralleli, il loro prodotto vettoriale è nullo così, ad esempio:

$$\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0} \,.$$

Si noti che in questa identità si è fatto uso del vettore nullo $\vec{0}$ che rappresenta un vettore le cui componenti rispetto ad un qualunque sistema di coordinate sono nulle.

Per i versori degli assi coordinati valgono le relazioni:

$$\begin{aligned} &\hat{x} \times \hat{x} = \hat{y} \times \hat{y} = \hat{z} \times \hat{z} = \vec{0}, \\ &\hat{x} \times \hat{y} = -\hat{y} \times \hat{x} = \hat{z}, \\ &\hat{z} \times \hat{x} = -\hat{x} \times \hat{z} = \hat{y}, \\ &\hat{y} \times \hat{z} = -\hat{z} \times \hat{y} = \hat{x}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

dalle quali segue che[2]:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \left(u_y v_z - u_z v_y\right)\hat{x} + \left(u_z v_x - u_x v_z\right)\hat{y} + \left(u_x v_y - u_y v_x\right)\hat{z} = \begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}.$$

Sia $\vec{r} = \vec{r}(t)$ un vettore funzione continua (in modulo e direzione o solo in modulo o solo in direzione) di una quantità scalare *t*; si definisce *derivata* di $\vec{r}$ rispetto a *t* l'operazione:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \lim_{t_1 \to t_2} \frac{\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)}{t_2 - t_1} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t},$$

dove $\Delta t \equiv t_2 - t_1$. Cioè la derivata consiste nel calcolare il limite per t_2 tendente a t_1 del rapporto tra la differenza dei vettori $\vec{r}(t_2)$ e $\vec{r}(t_1)$ e la differenza $t_2 - t_1$. La direzione e il verso di $d\vec{r}/dt$ sono quelli del vettore $\vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1)$, al limite per t_2 tendente a t_1.

---

[2] Infatti, esprimendo i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$ attraverso i versori degli assi coordinati, dalla relazioni (1.2) segue:

$$\begin{aligned} \vec{u} \times \vec{v} &= \left(u_x\hat{x} + u_y\hat{y} + u_z\hat{z}\right) \times \left(v_x\hat{x} + v_y\hat{y} + v_z\hat{z}\right) = \\ &= u_x v_x \left(\hat{x} \times \hat{x}\right) + u_x v_y \left(\hat{x} \times \hat{y}\right) + u_x v_z \left(\hat{x} \times \hat{z}\right) + u_y v_x \left(\hat{y} \times \hat{x}\right) + u_y v_y \left(\hat{y} \times \hat{y}\right) + u_y v_z \left(\hat{y} \times \hat{z}\right) + \\ &\qquad + u_z v_x \left(\hat{z} \times \hat{x}\right) + u_z v_y \left(\hat{z} \times \hat{y}\right) + u_z v_z \left(\hat{z} \times \hat{z}\right) = \\ &= u_x v_y \hat{z} - u_x v_z \hat{y} - u_y v_x \hat{z} + u_y v_z \hat{x} + u_z v_x \hat{y} - u_z v_y \hat{x} = \left(u_y v_z - u_z v_y\right)\hat{x} + \left(u_z v_x - u_x v_z\right)\hat{y} + \left(u_x v_y - u_y v_x\right)\hat{z}\,. \end{aligned}$$

Se $f \equiv f(t)$ è una funzione continua, si ha:

$$
\begin{aligned}
\frac{d(f\,\vec{r})}{dt} &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t)\vec{r}(t+\Delta t) - f(t)\vec{r}(t)}{\Delta t} = \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t+\Delta t)\vec{r}(t+\Delta t) + f(t)\vec{r}(t+\Delta t) - f(t)\vec{r}(t+\Delta t) - f(t)\vec{r}(t)}{\Delta t} = \\
&= \lim_{\Delta t \to 0} \left[\frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{\Delta t} \vec{r}(t+\Delta t) + f(t) \frac{\vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} \right] = \\
&= \frac{df}{dt}\vec{r} + f\,\frac{d\vec{r}}{dt};
\end{aligned}
$$

così, per un vettore $\vec{v}$, potendolo esprimere come $v\,\hat{v}$, si ha:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(v\,\hat{v})}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{v} + v\frac{d\hat{v}}{dt}.$$

Risulta infine:

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(\vec{u} \pm \vec{v}) = \frac{d\vec{u}}{dt} \pm \frac{d\vec{v}}{dt}, \\
&\frac{d}{dt}(\vec{u} \cdot \vec{v}) = \frac{d\vec{u}}{dt} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}, \\
&\frac{d}{dt}(\vec{u} \times \vec{v}) = \frac{d\vec{u}}{dt} \times \vec{v} + \vec{u} \times \frac{d\vec{v}}{dt}.
\end{aligned}
$$

1.2 Relazioni vettoriali notevoli

Di seguito vengono riportate alcune identità vettoriali notevoli; dati i vettori $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ e $\vec{d}$ risulta:

$$
\begin{aligned}
&\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}), \\
&\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}, \\
&\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}, \\
&(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot (\vec{c} \times \vec{d}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{a} \cdot \vec{d})(\vec{b} \cdot \vec{c}), \\
&(\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{c} \times \vec{d}) = \left[(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{d}\right]\vec{c} - \left[(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}\right]\vec{d} = \left[(\vec{c} \times \vec{d}) \cdot \vec{a}\right]\vec{b} - \left[(\vec{c} \times \vec{d}) \cdot \vec{b}\right]\vec{a}.
\end{aligned}
$$