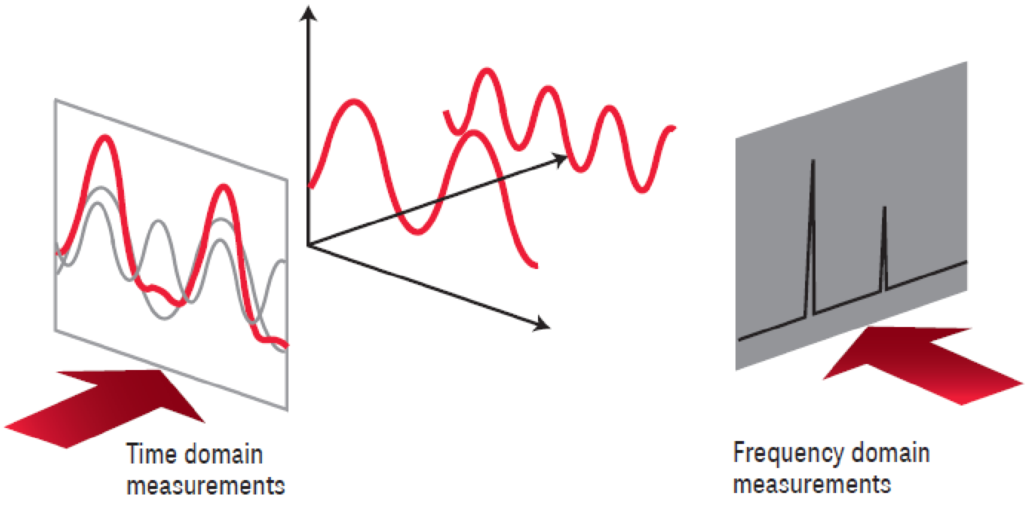
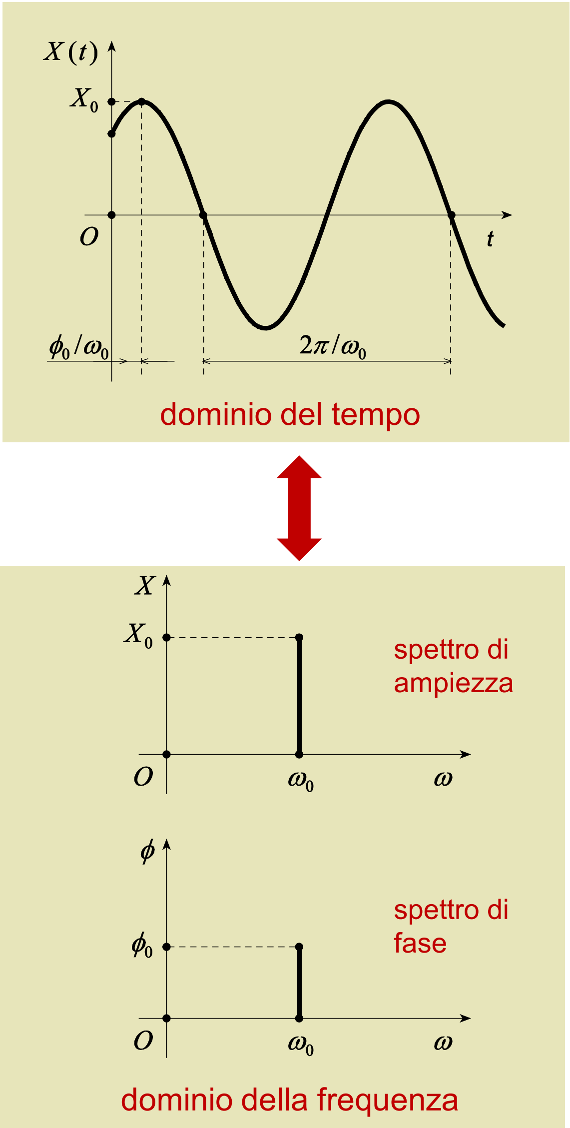
I CIRCUITI NEL DOMINO DELLA FREQUENZA

Marco Panareo



Studio nel dominio della frequenza

- La descrizione di una rete sollecitata sinusoidalmente con le leggi di Kirchhoff, generalizzate al regime sinusoidale, determina un insieme di equazioni algebriche dipendenti dalla sola pulsazione.
- La valutazione delle correnti o delle tensioni a regime in questa rete quali risposte a tale sollecitazione, è stabilita risolvendo delle equazioni algebriche anziché delle equazioni differenziali.
- Ciò è conseguenza del fatto che la rete è descritta tramite la variabile pulsazione anziché attraverso la variabile tempo; una grandezza sinusoidale, come corrente o tensione, $x(t)=X_0\cos(\omega_0 t + \phi_0)$ rappresentata in funzione del tempo, può essere descritta in maniera altrettanto completa in funzione della pulsazione ω_0 .
- Allo scopo occorre specificare l'ampiezza e la fase della funzione in corrispondenza della pulsazione della grandezza (*spettri* o *risposte in frequenza*).
- Tale caratteristica consente di trasferire lo studio della rete sulla quale agisce questa grandezza, dal *dominio del tempo* al *dominio della frequenza*.

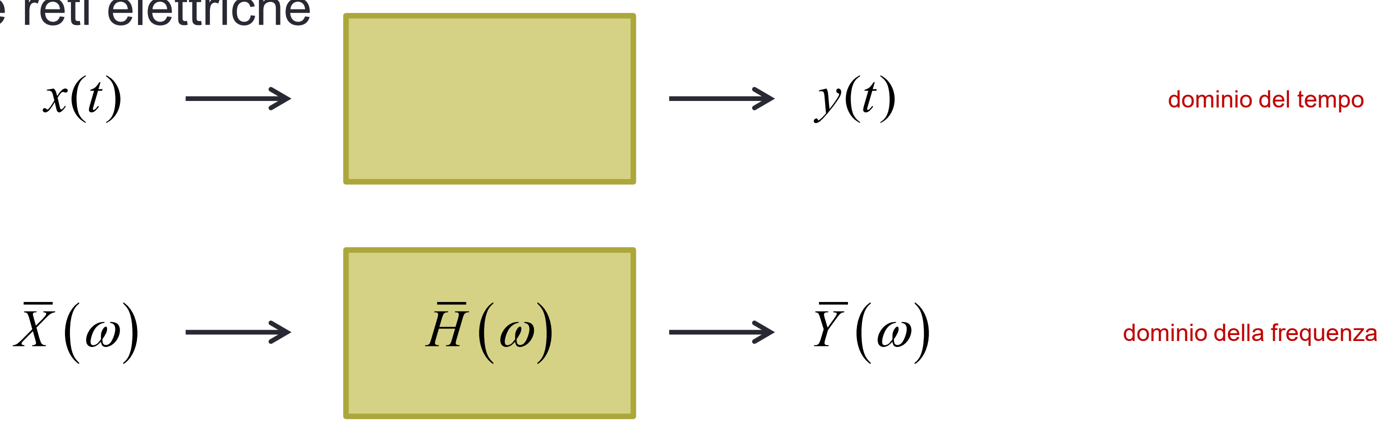


Funzione del sistema

- Si consideri un sistema arbitrario la cui eccitazione sia $x(t)$ e la cui risposta sia $y(t)$. Nelle reti elettriche $x(t)$ può rappresentare un eccitazione in corrente o in tensione, $y(t)$ una risposta in corrente o in tensione.
- Siano $\bar{X}(\omega)$ e $\bar{Y}(\omega)$ rispettivamente le estensioni complesse dell'eccitazione $x(t)$ e della risposta $y(t)$, il rapporto :

$$\bar{H}(\omega) = \frac{\bar{Y}(\omega)}{\bar{X}(\omega)}$$

- è detto *funzione del sistema*, dipende da ω tramite gli elementi che costituiscono il sistema ma è indipendente dal tempo purché lo siano gli elementi che lo compongono
- Questa proprietà rende la funzione del sistema particolarmente utile nell'analisi delle reti elettriche



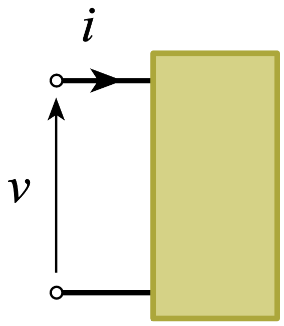
Funzione di trasferimento

- Nell'ambito dello studio delle reti elettriche, se l'eccitazione e la risposta sono definite rispetto alla stessa coppia di terminali, la funzione del sistema viene anche chiamata *funzione del punto di comando* e può essere un'*impedenza* $\bar{Z}(\omega) \equiv \bar{V}(\omega)/\bar{I}(\omega)$ oppure un'*ammettenza* $\bar{Y}(s) \equiv \bar{I}(s)/\bar{V}(s)$ a seconda se la sollecitazione sia una corrente o una tensione.

- Se la sollecitazione e la risposta sono definiti rispetto a due coppie distinte di terminali, la funzione del sistema viene anche chiamata *funzione di trasferimento* e può essere il rapporto tra una tensione e una corrente (impedenza) o viceversa (ammettenza), il rapporto tra tensioni, il rapporto tra correnti

Bipoli

- Per *bipolo* si intende un qualsiasi circuito elettrico dal quale è possibile estrapolare una coppia di morsetti.
- I componenti elettrici quali resistenza, induttanza e capacità costituiscono gli esempi più semplici di bipoli.



- A seconda della scelta della variabile *causa* e della variabile *effetto*, è possibile descrivere il bipolo mediante due equazioni

$$v = z(i)$$

$$i = y(v)$$

- se la rete è lineare, le funzioni z e y, sono equazioni lineari ed è possibile far uso del metodo simbolico

Quadripoli

- Per quadripolo si intende un qualsiasi circuito elettrico dal quale è possibile estrapolare due coppie di morsetti.
- Convenzionalmente i versi delle tensioni e delle correnti sono assunti come rappresentato in figura, inoltre, la coppia di morsetti di sinistra è detta di *ingresso* del quadrupolo e la coppia di morsetti di destra è detta di *uscita* del quadripolo.
- A seconda della scelta di una coppia di variabili *causa* e di una coppia di variabili *effetto*, è possibile descrivere il quadripolo mediante quattro sistemi di equazioni

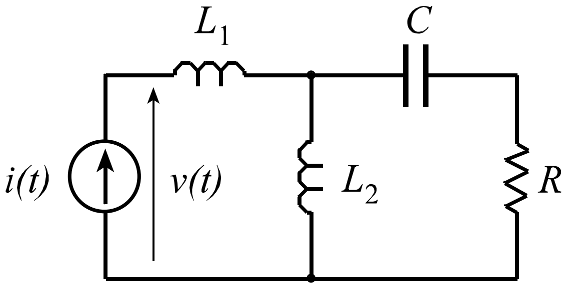
$$\begin{cases} v_1 = z_1(i_1, i_2) \\ v_2 = z_2(i_1, i_2) \end{cases} \qquad \begin{cases} i_1 = y_1(v_1, v_2) \\ i_2 = y_2(v_1, v_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_1 = h_1(i_1, v_2) \\ i_2 = h_2(i_1, v_2) \end{cases} \qquad \begin{cases} i_1 = g_1(v_1, i_2) \\ v_2 = g_2(v_1, i_2) \end{cases}$$

- se la rete è lineare, le funzioni z, y, h e g sono equazioni lineari ed è possibile far uso del metodo simbolico

Esempio 1

- Nella rete di figura si consideri come eccitazione una corrente e si valuti la funzione del punto di comando



- Considerando direttamente le estensioni complesse, si ha:

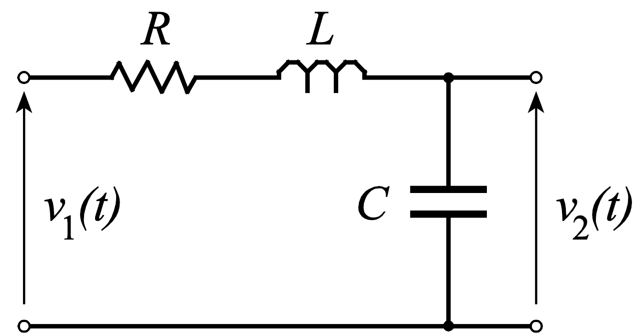
$$\bar{V}(\omega)=\bar{I}(\omega)\left[j\omega L_1+\frac{j\omega L_2\left(R+\dfrac{1}{j\omega C}\right)}{j\omega L_2+R+\dfrac{1}{j\omega C}}\right]$$

- così la funzione del punto di comando del sistema (in questo caso un'impedenza) vale:

$$\bar{Z}(\omega)=\frac{\bar{V}(\omega)}{\bar{I}(\omega)}=j\omega L_1+\frac{j\omega L_2\left(R+\dfrac{1}{j\omega C}\right)}{j\omega L_2+R+\dfrac{1}{j\omega C}}$$

Esempio 2

- Si determini la funzione di trasferimento della rete di figura



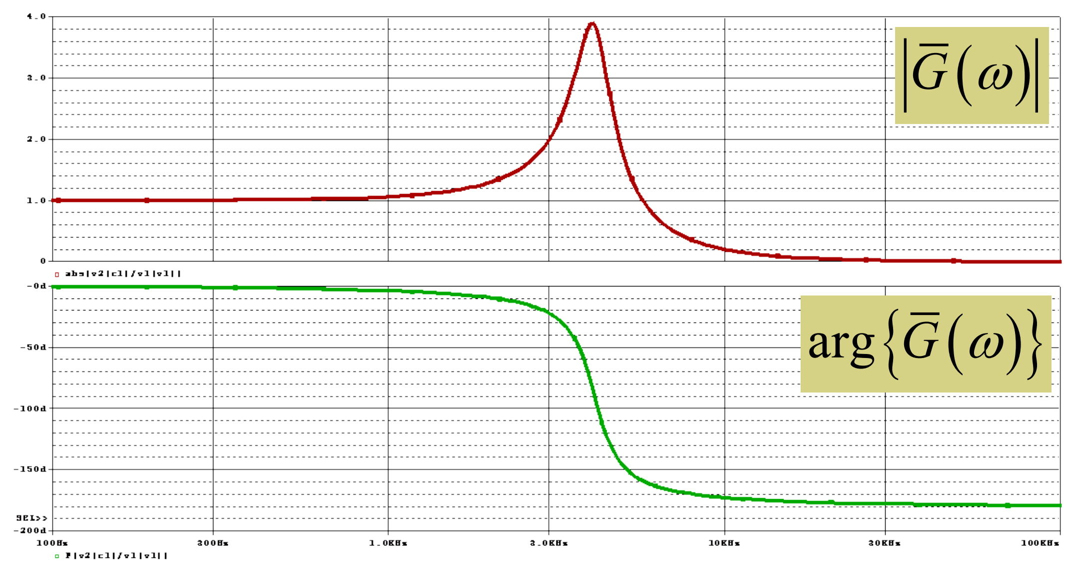
- Risulta:

$$\bar{V}_2(\omega) = \bar{V}_1(\omega)\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C}} = \bar{V}_1(\omega)\frac{1}{1-\omega^2 LC + j\omega RC}$$

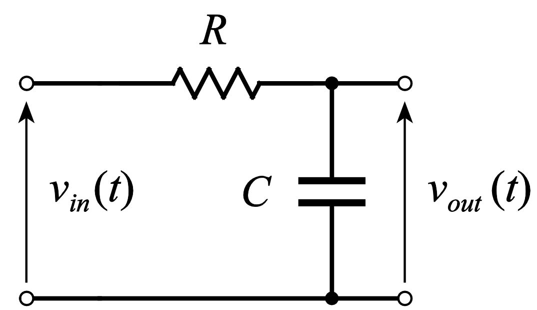
- da cui segue:

$$\bar{G}(\omega) = \frac{1}{1-\omega^2 LC + j\omega RC}$$

- L'espressione trovata è suscettibile di rappresentazione grafica in termini di ampiezza e fase



Circuito *RC*



- Consideriamo il circuito di figura. La risposta $v_{out}(t)$ ad un'eccitazione sinusoidale $v_{in}(t)$ nel dominio della frequenza è:

$$\bar{V}_{out}(\omega) = \bar{V}_{in}(\omega)\frac{\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}} = \bar{V}_{in}(\omega)\frac{1}{1+j\omega RC} = \bar{V}_{in}(\omega)\frac{1}{1+j\omega\tau},$$

- In cui $V_{in}(\omega)$ e $V_{out}(\omega)$ sono, rispettivamente, le estensioni complesse di $v_{in}(t)$ e $v_{out}(t)$ e τ vale *RC*;
- pertanto la funzione di trasferimento di tale circuito, nel domino della frequenza, è:

$$\bar{H}(\omega) = \frac{\bar{V}_{out}(\omega)}{\bar{V}_{in}(\omega)} = \frac{1}{1+j\omega\tau},$$

Circuito *RC*

- Il modulo e la fase della funzione di trasferimento valgono, rispettivamente

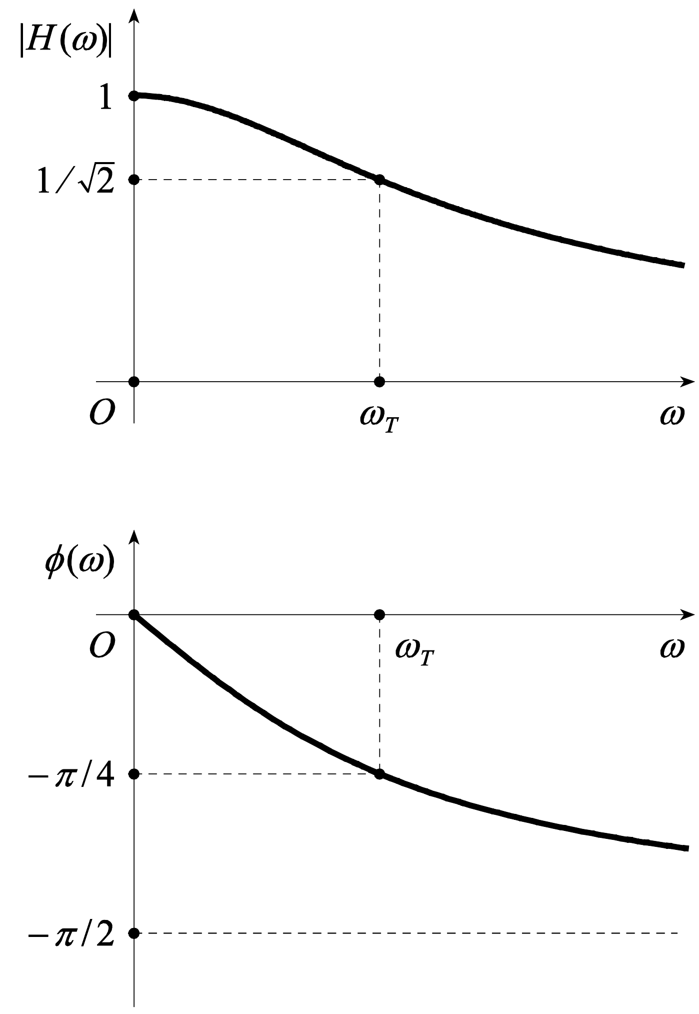
$$\left|\bar{H}(\omega)\right| = \left|\frac{1}{1+j\omega\tau}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}},$$

$$\phi(\omega) = -\arctan(\omega\tau)$$

- Convenzionalmente si definisce *pulsazione di taglio* la pulsazione in corrispondenza della quale la funzione di trasferimento assume il valore di $1/\sqrt{2}$; dalla funzione di trasferimento segue pertanto

$$\omega_T = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC}.$$

- Alla pulsazione di taglio, la fase della funzione di trasferimento diventa pari a $-\pi/4$.

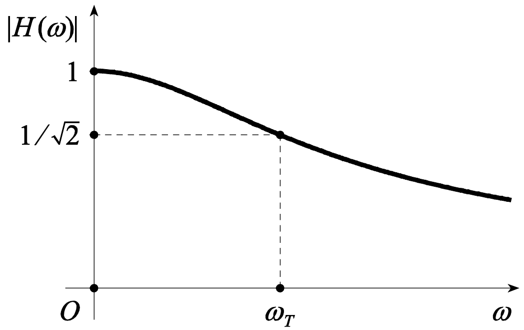


Circuito *RC*

- Dalle espressioni precedenti si ha che per pulsazioni ω molto minori della pulsazione di taglio τ, il modulo della funzione di trasferimento del circuito *RC* diventa prossimo all'unità e per pulsazioni molto maggiori della pulsazione di taglio ω_T, il modulo della funzione di trasferimento si annulla;
- in particolare:

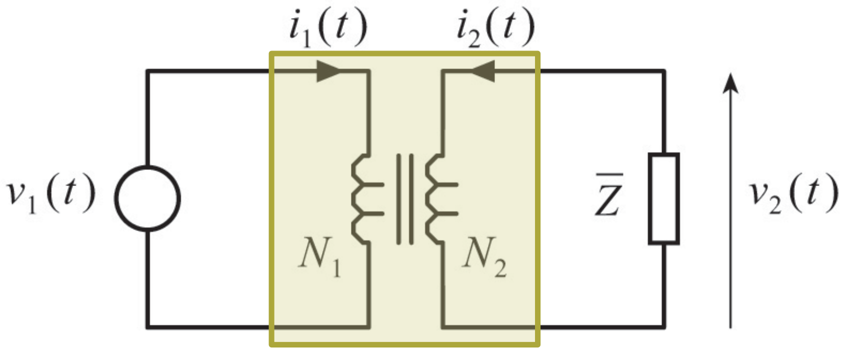
$$\lim_{\omega\to 0}\left|\bar{H}(\omega)\right| = \lim_{\omega\to 0}\frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} = 1\,,$$

$$\lim_{\omega\to +\infty}\left|\bar{H}(\omega)\right| = \lim_{\omega\to +\infty}\frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} = 0\,.$$



- Pertanto, il circuito *RC* può essere riguardato come un *filtro passa basso*, ovvero un dispositivo che attenua fortemente le tensioni sinusoidali $v_{in}(t)$ di pulsazione superiore a quella di taglio, mentre lascia inalterate quelle con pulsazione inferiore a quella di taglio

Il trasformatore come quadripolo adattatore

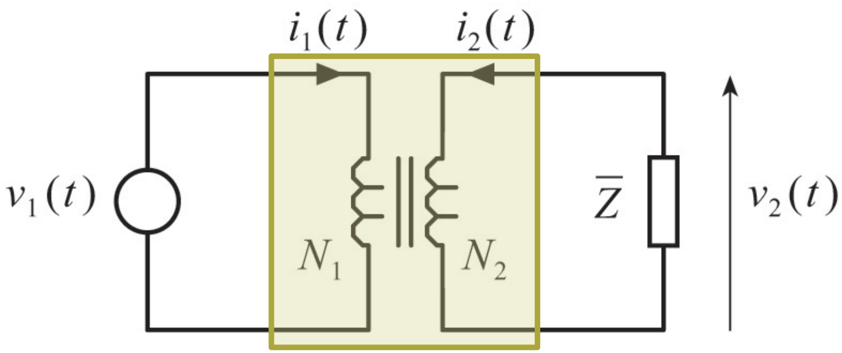


- Consideriamo un trasformatore i cui avvolgimenti del primario e del secondario siano costituiti, rispettivamente, da N_1 e N_2 spire, le cui perdite resistive siano trascurabili.
- Supponiamo di applicare un generatore di forza elettromotrice sinusoidale v_1 al primario e di chiudere il secondario su un carico costituito da un'impedenza $\overline{Z}$. L'estensione complessa della differenza di potenziale ai capi di tale carico vale:

$$\overline{V}_2 = -\overline{Z}\,\overline{I}_2$$

- D'altra parte, siccome con le ipotesi fatte risulta $\overline{I}_2/\overline{I}_1 = -N_1/N_2$ e $\overline{V}_2/\overline{V}_1 = N_2/N_2$, sostituendo nella relazione precedente si ottiene:

$$\bar{V}_1 \frac{N_2}{N_1} = -\bar{Z}\left(-\bar{I}_1 \frac{N_1}{N_2}\right)$$



- da cui segue:

$$\frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} = \left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 \bar{Z}$$

- Cioè quando il secondario del trasformatore è chiuso su un carico di impedenza $\bar{Z}$, l'impedenza "vista" dal primario è pari al prodotto del quadrato del rapporto di trasformazione per l'impedenza di carico. Tale risultato suggerisce la possibilità di adoperare il trasformatore come quadripolo adattatore, per adattare l'impedenza tra un generatore ed un carico generico.
- Supponiamo di dover alimentare un carico di impedenza $\bar{Z}$ attraverso un generatore di impedenza interna $\bar{Z}_g$; il collegamento diretto del generatore al carico non consentirebbe di ottenere il massimo trasferimento della potenza, essendo diverse le due impedenze.
- L'interposizione tra il generatore ed il carico di un trasformatore il cui rapporto di trasformazione sia pari a $\sqrt{\bar{Z}_g / \bar{Z}}$ consente l'adattamento di impedenza con basse perdite.

Risposta nel domino del tempo

- Consideriamo una rete di funzione di trasferimento $\bar{H}(\omega)$; poiché $\bar{H}(\omega)$ è un numero complesso, può essere rappresentato in forma esponenziale:

$$\bar{H}(\omega) = \left|\bar{H}(\omega)\right| e^{j\phi(\omega)}$$

- dove $\left|\bar{H}(\omega)\right|$ e $\phi(\omega)$ sono, rispettivamente, il modulo e la fase di $\bar{H}(\omega)$
- Si noti che $\left|\bar{H}(\omega)\right|$ e $\phi(\omega)$ sono grandezze suscettibili di misura:
  - $\left|\bar{H}(\omega)\right|$ rappresenta il rapporto tra le ampiezze della grandezza all'uscita e di quella all'ingresso,
  - $\phi(\omega)$ lo sfasamento la grandezza all'uscita e quella in ingresso
- Tali grandezze hanno un importante significato fisico perché permettono di dedurre da una sollecitazione sinusoidale agente in ingresso, la risposta della rete

Risposta nel domino del tempo

- Sia:

$$x(t) = X\cos(\omega t) \xrightarrow{\text{ext. complessa}} \overline{X}(\omega) = X\,e^{j\omega t}$$

- una generica sollecitazione e la relativa estensione complessa per un sistema di funzione di trasferimento $\overline{H}(\omega)$, allora l'estensione complessa della risposta varrà:

$$\overline{Y}(\omega) = \overline{H}(\omega)\,\overline{X}(\omega) = \left|\overline{H}(\omega)\right| e^{j\phi(\omega)} X\,e^{j\omega t} = \left|\overline{H}(\omega)\right| X\,e^{j\left[\omega t + \phi(\omega)\right]}$$

- e la risposta reale:

$$y(t) = \mathcal{R}e\left\{\overline{Y}(\omega)\right\} = \left|\overline{H}(\omega)\right| X\cos\left[\omega t + \phi(\omega)\right]$$

- Pertanto $\left|\overline{H}(\omega)\right|$ e $\phi(\omega)$ permettono di stabilire la risposta della rete a qualsiasi eccitazione sinusoidale

Ritardo di fase

- L'espressione della risposta della rete nel dominio del tempo può essere posta nella forma

$$y(t) = \mathcal{R}e\left\{\bar{Y}(\omega)\right\} = \left|\bar{H}(\omega)\right| X \cos\left[\omega t + \phi(\omega)\right] =$$

$$= \left|\bar{H}(\omega)\right| X \cos\left\{\omega\left[t + \frac{\phi(\omega)}{\omega}\right]\right\} = \left|\bar{H}(\omega)\right| X \cos\left[\omega\left(t + t_d\right)\right]$$

- In cui

$$t_d \equiv \frac{\phi(\omega)}{\omega}$$

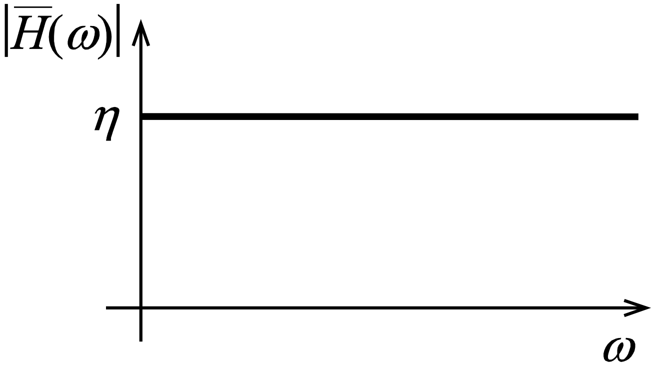
- Dal confronto tra l'espressione nel dominio del tempo della sollecitazione $x(t) = X\cos(\omega t)$ e della corrispondente risposta si deduce che non solo esse hanno, in generale, ampiezze diverse ma risultano sfasate temporalmente.
- Il tempo definito attraverso l'espressione precedente viene detto *ritardo di fase*.

Condizioni di non distorsione

- Affinché l'ampiezza della risposta e il ritardo di fase risultino indipendenti dalla pulsazione occorre che si abbia:

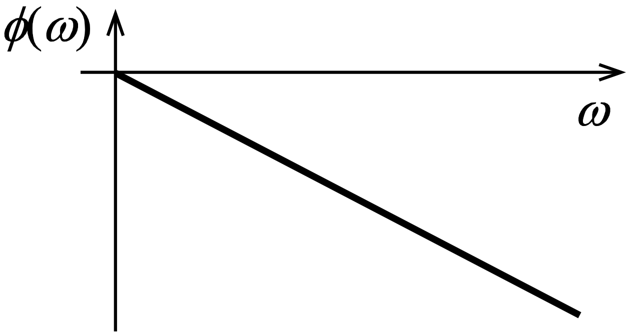
$$\left|\bar{H}(\omega)\right| = \eta,$$

$$t_d = \frac{\phi(\omega)}{\omega} = \tau\,,$$



- dove η e τ sono costanti rispetto ad ω.
- Tali relazioni sono dette *condizioni di non distorsione*, in quanto la rete che le soddisfa è caratterizzata dal fatto che la sua risposta $y(t)$ è pari al suo stimolo $x(t)$ moltiplicato la costante η e ritardato o anticipato del tempo τ:

$$y(t) = \eta\, x(t + \tau).$$



- Nelle reti reali, poiché la risposta può solo essere ritardata rispetto lo stimolo, risulta $\tau < 0$.

Esempio

- Il modulo e la fase della funzione di trasferimento del circuito *RC* valgono, rispettivamente

$$\left|\bar{H}(\omega)\right| = \left|\frac{1}{1+j\omega\tau}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}},$$

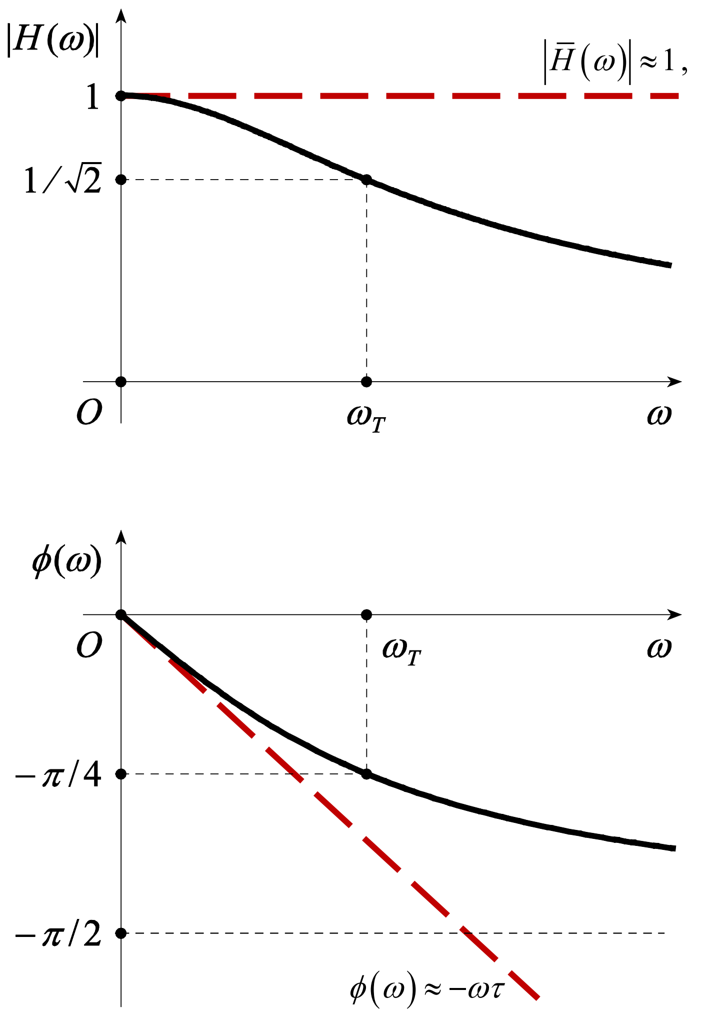
$$\phi(\omega) = -\arctan(\omega\tau)$$

- Per valori di $\omega \ll \omega_T$, queste due funzioni possono essere approssimate, rispettivamente, come

$$\left|\bar{H}(\omega)\right| \approx 1,$$

$$\phi(\omega) \approx -\omega\tau$$

- Pertanto, in tale condizione il circuito *RC* agisce come un quadripolo non distorcente



Esempio

- Stabiliamo la risposta del circuito *RC* ad uno stimolo sinusoidale; quindi, data una sollecitazione:

$$v_{in}\left(t\right)=V_{in}\sin\left(\omega_0 t\right),$$

- Noto che modulo e la fase della funzione di trasferimento valgono, rispettivamente:

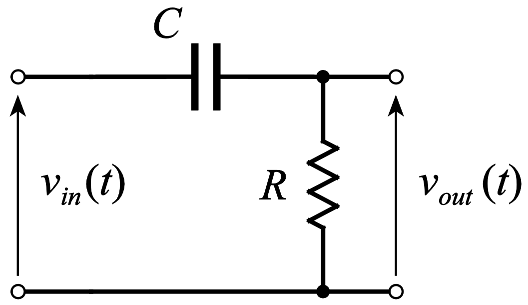
$$\left|\bar{H}\left(\omega\right)\right|=\frac{1}{\sqrt{1+\left(\omega\tau\right)^2}},$$

$$\phi\left(\omega\right)=-\arctan(\omega\tau)$$

- segue che la risposta $v_{out}(t)$ della rete vale

$$v_{out}\left(t\right)=V_{in}\left|\bar{H}\left(\omega_0\right)\right|\sin\left[\omega_0 t+\phi\left(\omega_0\right)\right]=V_{in}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\omega_0\tau\right)^2}}\sin\left[\omega_0 t-\arctan(\omega_0\tau)\right].$$

Circuito *CR*



- Consideriamo il circuito di figura. La risposta $v_{out}(t)$ ad un'eccitazione sinusoidale $v_{in}(t)$ nel dominio della frequenza è:

$$\bar{V}_{out}(\omega) = \bar{V}_{in}(\omega)\frac{R}{R+\frac{1}{j\omega C}} = \bar{V}_{in}(\omega)\frac{j\omega RC}{1+j\omega RC} = \bar{V}_{in}(\omega)\frac{j\omega\tau}{1+j\omega\tau},$$

- In cui $\bar{V}_{in}(\omega)$ e $\bar{V}_{out}(\omega)$ sono, rispettivamente, le estensioni complesse di $v_{in}(t)$ e $v_{out}(t)$ e τ vale *RC*;
- pertanto la funzione di trasferimento di tale circuito, nel domino della frequenza, è:

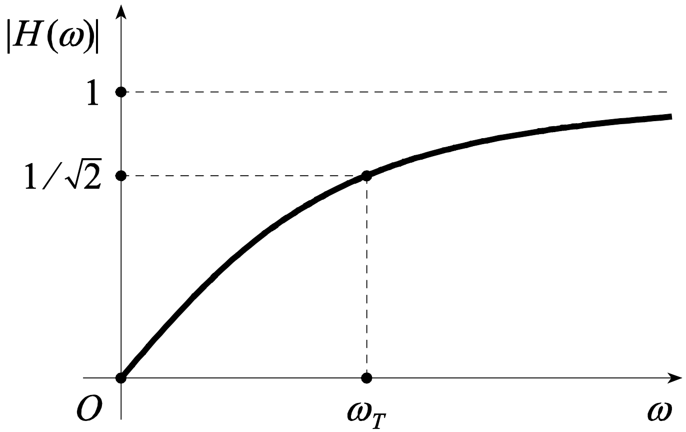
$$\bar{H}(\omega) = \frac{\bar{V}_{out}(\omega)}{\bar{V}_{in}(\omega)} = \frac{j\omega\tau}{1+j\omega\tau},$$

Circuito *CR*

- Il modulo e la fase della funzione di trasferimento valgono, rispettivamente

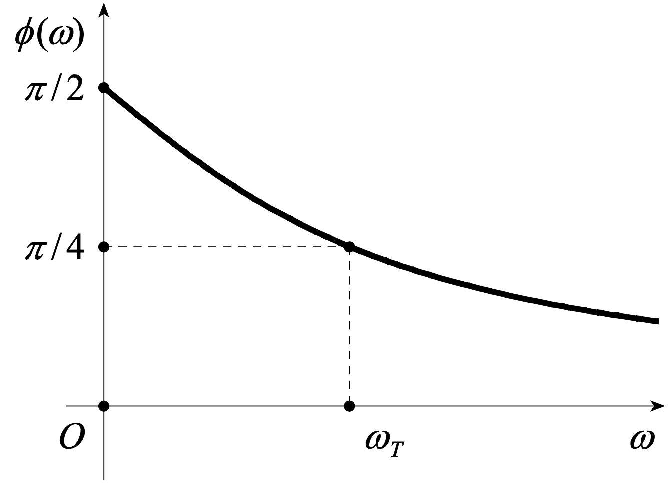
$$\left|\bar{H}(\omega)\right| = \left|\frac{j\omega\tau}{1+j\omega\tau}\right| = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}},$$

$$\phi(\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan(\omega\tau)$$



- Convenzionalmente si definisce *pulsazione di taglio* la pulsazione in corrispondenza della quale la funzione di trasferimento assume il valore di $1/\sqrt{2}$; dalla funzione di trasferimento segue pertanto

$$\omega_T = \frac{1}{\tau} = \frac{1}{RC}.$$



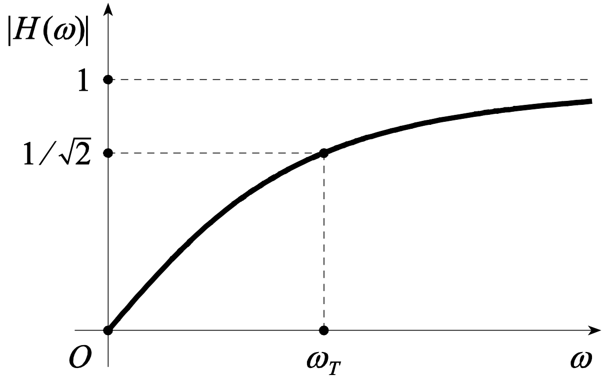
- Alla pulsazione di taglio, la fase della funzione di trasferimento diventa pari a $\pi/4$.

Circuito *CR*

- Dalle espressioni precedenti si ha che per pulsazioni ω molto minori della pulsazione di taglio τ, il modulo della funzione di trasferimento del circuito *CR* si annulla e per pulsazioni molto maggiori della pulsazione di taglio ω_T, il modulo della funzione di trasferimento diventa prossimo all'unità;
- in particolare:

$$\lim_{\omega \to 0} \left| \bar{H}(\omega) \right| = \lim_{\omega \to 0} \frac{\omega\tau}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} = 0 \,,$$

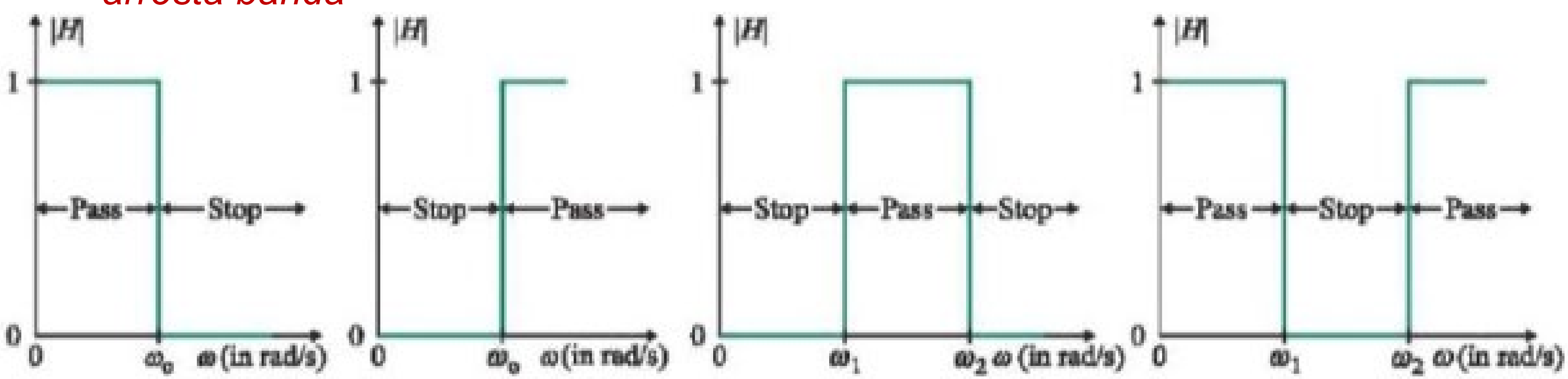
$$\lim_{\omega \to +\infty} \left| \bar{H}(\omega) \right| = \lim_{\omega \to +\infty} \frac{\omega\tau}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}} = 1 \,.$$



- Pertanto, il circuito *CR* può essere riguardato come un *filtro passa alto*, ovvero un dispositivo che attenua fortemente le tensioni sinusoidali $v_{in}(t)$ di pulsazione inferiore a quella di taglio, mentre lascia inalterate quelle con pulsazione superiore a quella di taglio.

Filtri ideali

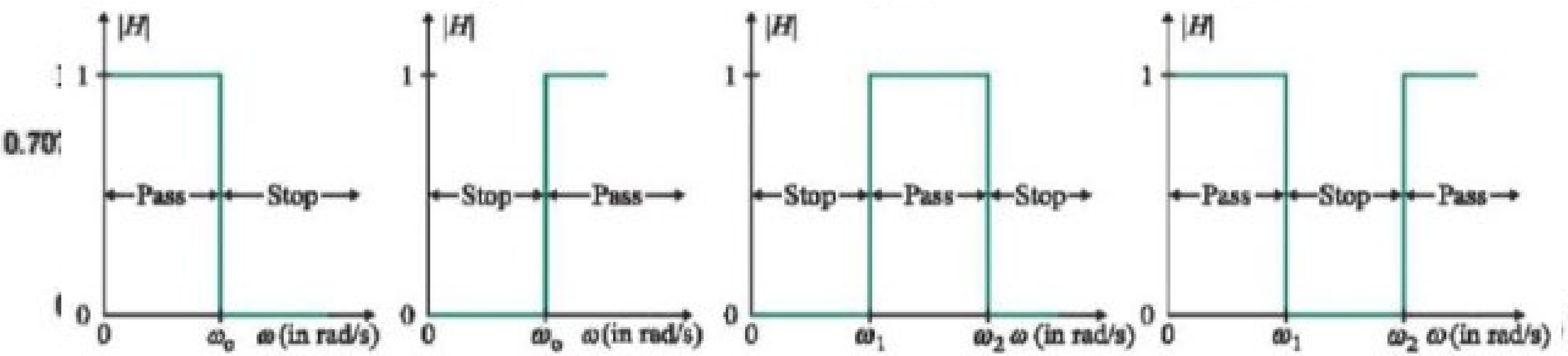
- In generale i filtri sono particolari quadripoli caratterizzati dalla proprietà di attenuare i segnali applicati in ingresso di frequenze più alte o più basse di un certo valore, detto *frequenza di taglio*, o quelli di frequenze comprese in un intervallo.
- I filtri vengo descritti attraverso la rappresentazione del modulo della loro funzione di trasferimento. I casi più semplici di filtri sono:
  - *passa basso*
  - *passa alto*
  - *passa banda*
  - *arresta banda*



(a) Ideal low-pass filter (b) Ideal high-pass filter (c) Ideal band-pass filter (d) Ideal band-reject filter

Filtri reali

- È praticamente impossibile passare istantaneamente tra due delle regioni di funzionamento di un filtro, come appare nel caso ideale.
- Invece delle transizioni nette presenti nei filtri ideali, un comportamento più realistico prevede una regione di passaggio tra la banda passante e la banda di arresto.
- Quindi esiste sempre un intervallo di transizione tra queste due regioni, ed i filtri reali hanno risposte in frequenza analoghe a quelle mostrate nella figura seguente.



(a) Ideal low-pass filter (b) Ideal high-pass filter (c) Ideal band-pass filter (d) Ideal band-reject filter