IL TEOREMA DI TOLOMEO E I QUADRILATERI CICLICI

Giuseppe e Marina De Cecco

1 Introduzione

Osservando i problemi proposti alle Olimpiadi della Matematica da vari Paesi ([C],[G],[O1],[O2]), si nota che il teorema di Tolomeo e una sua estensione sono utilizzati spesso nelle soluzioni, segno che esso fa parte (o si ritiene che faccia parte) del bagaglio usuale di conoscenze degli studenti di una Scuola Superiore. Poiché in Italia ci sembra un po' trascurato, riteniamo opportuno ricordarlo e vederne alcune conseguenze alla luce anche dei problemi proposti.

La proposizione attribuita al famoso astronomo dell'antichità Claudio Tolomeo (85-165) probabilmente era già nota precedentemente (ad Apollonio?), ma subito è stata attribuita a lui, che l'ha utilizzata per costruire *tavole di corde* ([Gs]), che ora chiamiamo tavole dei seni, giacché il seno di un angolo non è altro che la metà della corda corrispondente all'angolo doppio. Anzi per alcuni storici questa è l'unica differenza tra la teoria greca delle corde e la trigonometria attuale, per cui si può far risalire la fondazione della trigonometria ad Ipparco di Nicea (II sec.a.C.) e a Tolomeo. Lo stesso vocabolo *seno*, in latino *sinus*, secondo alcuni proviene dall'abbreviazione del latino *semi-inscripta chorda*, da cui *S-ins* o *sins* e infine *sinus*. Per altri la storia è più lunga e curiosa. Aryabhata il Maggiore (476-550) chiamava la semicorda *ardhya-jya* semplicemente *jya*, da cui gli Arabi avevano derivato foneticamente *jyba*, che era scritto *jb* (omettendo come al solito le vocali). La parola probabilmente proviene dall'indiano *jiva = corda*. Ora *jyba*, fuori dell'ambito tecnico, non aveva alcun significato, e fu sostituito dalla parola *jaib*, che contiene le stesse consonanti ma corrispondeva ad una parola esistente: *insenatura, piegatura della veste, seno*. Cosí Gherardo da Cremona (1150) tradusse *jaib* con *sinus*, da cui la nostra parola *seno*.

Ritorniamo ora al teorema di Tolomeo, che si trova nella sua celebre opera *Composizione matematica* il cui nome venne mutato dai suoi ammiratori in *Grande composizione* ($M\epsilon\gamma\acute{\alpha}\lambda\eta\ \sigma\acute{\upsilon}\nu\tau\alpha\xi\iota\varsigma$) ed è passato alla storia col nome arabo di *Almagesto* (da $\mu\epsilon\gamma\acute{\iota}\sigma\tau\eta$, il massimo).

La relazione di Tolomeo lega la lunghezza dei lati e delle diagonali di un quadrilatero inscritto in una circonferenza, detto appunto ciclico, le cui proprietà angolari sono interessanti di per sé ed utili nella risoluzione di parecchi problemi geometrici.

Ricordiamo che un quadrilatero è inscrivibile in una circonferenza se e solo se i suoi angoli opposti sono supplementari; un quadrilatero è circoscrivibile ad una circonferenza se e solo se la somma di due lati opposti è uguale alla somma degli altri due.

2 Il teorema di Tolomeo

Enunciamo il teorema nella forma classica e ne diamo una dimostrazione, molto vicina a quella originaria di Tolomeo ([B]), che usa similitudini; le dimostrazioni che di trovano generalmente nei libri di testo delle Scuole superiori fanno invece uso della Trigonometria ([F]).

Teorema di Tolomeo. *Il rettangolo costruito con le diagonali di un quadrilatero inscritto in un cerchio è uguale alla somma dei rettangoli costruiti con le coppie dei lati opposti.*

Dim.

Sia ABCD un quadrilatero inscritto in una circonferenza. Usando la stessa notazione per indicare i segmenti e la loro misura, si tratta di provare che

$$AC \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$$

Consideriamo su AC il punto E tale che $\widehat{ABE} = \widehat{DBC}$. Ora $\widehat{CAB} = \widehat{CDB}$ poiché insistono sullo stesso arco BC. Inoltre i triangoli ABE e DBC sono simili avendo due coppie di angoli uguali; quindi

$$AE : AB = DC : DB \Rightarrow AE \cdot DB = AB \cdot DC.$$

Ovviamente, poiché $\widehat{ABE} = \widehat{DBC}$, si ha $\widehat{ABD} = \widehat{EBC}$. Ma $\widehat{BDA} = \widehat{BCA}$ poiché insistono sullo stesso arco AB. Inoltre i triangoli ABD e EBC sono simili, quindi

$$AD : DB = CE : CB \Rightarrow EC \cdot DB = AD \cdot CB.$$

Da cui la conclusione:

$AC \cdot DB = (AE + EC) \cdot DB = AE \cdot DB + EC \cdot DB = AB \cdot DC + AD \cdot CB.\blacksquare$

Un caso particolare del teorema di Tolomeo si trova anche nell'opera di Euclide:

Teorema 1. *Sia ABC un triangolo inscritto in un cerchio. Se BD è una corda bisecante l'angolo $\widehat{ABC}$, allora*

$$(AB + BC) : BD = AC : AD.$$

Dim.

Si fa vedere dapprima che il triangolo ADC è isoscele su base AC e poi si usano argomenti di similitudine.

Indichiamo con H il punto di intersezione tra AC e BD. Essendo i triangoli ABD e BHC simili si ha

$$BD : BC = AD : HC \Rightarrow BD \cdot HC = AD \cdot BC$$

analogamente essendo simili i triangoli ABD e AHD si ha

$$BD : AD = AB : AH \Rightarrow AD \cdot AB = BD \cdot AH$$

da cui, tenendo conto che $AD = DC$ si ha

$$AD \cdot BC + AB \cdot DC = BD \cdot HC + BD \cdot AH = BD(HC + AH),$$

da cui la tesi essendo $HC + AH = AC$.

Si osservi che per il quadrilatero inscritto $ABCD$, nell'ipotesi del Teorema 2 si ha proprio il teorema di Tolomeo:

$$AC \cdot BD = AD \cdot BC + AB \cdot DC.$$

Una notevole estensione del teorema di Tolomeo, molto utilizzata nelle applicazioni, è la seguente

Teorema 2. *In ogni quadrilatero convesso il prodotto delle diagonali è minore o uguale alla somma dei prodotti dei lati opposti. L'uguaglianza vale se e solo se il quadrilatero è ciclico.*

In simboli

$$AC \cdot BD \leq AB \cdot CD + BC \cdot DA$$

La dimostrazione di questo teorema non è elementare; noi non la daremo ma useremo il risultato per rispondere ad alcuni quesiti.

Osserviamo inoltre che esso dà un semplice criterio per vedere se quattro punti del piano appartengono ad una stessa circonferenza: basta infatti conoscere solo le loro mutue distanze.

3 Osservazioni

Si osservi che se il quadrilatero è un rettangolo (che è inscrivibile in una circonferenza), il teorema di Tolomeo diventa il teorema di Pitagora.

Supponiamo ora che la diagonale BD, del quadrilatero $ABCD$ coincida con il diametro $2r$ della circonferenza. Chiamando α l'angolo opposto ad AB (nel triangolo rettangolo ABD) e β l'angolo opposto a BC (nel triangolo rettangolo BCD) si ha

$$AB = 2r \sin \alpha, \qquad BC = 2r \sin \beta,$$
$$CD = 2r \cos \beta, \qquad AD = 2r \cos \alpha, \qquad BD = 2r.$$

Per il teorema dei seni $AC = 2r \sin(\alpha + \beta)$ Allora, per il teorema di Tolomeo, $BD \cdot AC = AD \cdot BC + AD \cdot CD$ da cui

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

cioè la formula di addizione della funzione seno!

Analogamente, considerando un lato coincidente con il diametro AOD e indicando con α l'angolo opposto a BD (nel triangolo rettangolo ADB) e con β quello opposto a CD (nel triangolo rettangolo ADC) si ha

$$AC = 2r \cos \beta \qquad BD = 2r \sin \alpha \qquad AD = 2r$$

$$BC = 2r \sin(\alpha - \beta) \qquad AB = 2r \cos \alpha \qquad CD = 2r \sin \beta$$

da cui, tenendo conto del teorema di Tolomeo, segue

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

cioè la formula di sottrazione per la funzione seno!

Tolomeo, usando queste considerazioni geometriche riuscí a costruire una tavola delle corde che procede di mezzo grado in mezzo grado da $1°$ a $180°$.

4 Problemi

Problema 1. *([G]) Siano AB una corda di una circonferenza γ ed r ed s le rette tangenti a γ in A e B. Se P è un punto di γ si indichino con R, S, Q le proiezioni ortogonali di P rispettivamente su r, s, AB. Provare che PQ è la media geometrica di PR e PS.*

(Suggerimento: si provi dapprima che i triangoli PRQ e PQS sono simili).

Se AB è un diametro, il risultato del precedente problema quale teorema elementare diventa ?

Problema 2. *([CR]) Dimostrare che le altezze di un qualsiasi triangolo bisecano gli angoli del corrispondente triangolo ortico (cioè del triangolo che ha per vertici i piedi delle altezze).*

Traccia di soluzione

Si indichino con A_1, B_1, C_1 il piede dell'altezza condotta rispettivamente da A, B, C e con H l'ortocentro. La tesi segue facilmente dopo aver osservato che i quadrilateri HA_1CB_1 e HC_1BA_1 sono ciclici; infatti

$$\widehat{B_1A_1C} = \widehat{B_1HC}, \widehat{C_1A_1B} = \widehat{BAC} \Rightarrow \widehat{B_1A_1C} = \widehat{C_1A_1B} \Rightarrow \widehat{B_1A_1A} = \widehat{AA_1C}$$

poiché complementari dello stesso angolo. ■

Si osservi che se il triangolo (acutangolo) ABC rappresenta una stanza con pareti riflettenti, il triangolo ortico è il solo cammino triangolare che la luce può percorrere nella stanza. Da qui segue anche che il triangolo ortico ha il perimetro minimo rispetto a tutti i triangoli inscritti nel triangolo (acutangolo) dato. (Questo è il cosiddetto problema di Fagnano (1682-1766).) Il triangolo ortico dà la risposta anche al seguente problema: in quale direzione bisogna lanciare una palla giacente su un tavolo da biliardo triangolare in modo che ritorni alla sua posizione di partenza dopo due riflessioni ?

Problema 3. *([C]) Sia ABC un triangolo equilatero e sia P un punto del cerchio circoscritto appartenente all'arco AB. Sia Q l'intersezione del segmento PC con il lato AB. Si dimostrino le seguenti uguaglianze:*

$$a) \qquad AP + PB = PC; \qquad b) \qquad \frac{1}{AP} + \frac{1}{BP} = \frac{1}{PQ}.$$

Traccia di soluzione.

La a) segue immediatamente dal teorema di Tolomeo applicato al quadrilatero $APBC$.

Per provare la b) si prolunghi il segmento AP e si prenda su di esso un punto D tale che $PD = PB$. Si faccia vedere che il triangolo PBD è equilatero e che i triangoli AQP e ABD sono simili. Allora

$$DB : PQ = DA : PA = (PA + DP) : PA = 1 + DP/PA$$

da cui la tesi.■

Problema 4. *([C]) Dato un triangolo acutangolo ABC siano M_1, M_2, M_3 i punti medi dei lati, O il centro del cerchio circoscritto di raggio R e ρ il centro del cerchio inscritto. Si dimostri che*

$$OM_1 + OM_2 + OM_3 = R + \rho.$$

(Per la soluzione vedere [C] pag.110)

Problema 5. *([C]) Se P è un punto del cerchio cicoscritto al quadrato $ABCDE$, appartenente all'arco AB, si dimostri che*

$$(PA + PC) : (PB + PD) = PD : PC$$

Soluzione

Indichiamo con ℓ la lunghezza del lato del quadrato e con d la sua diagonale. Per il teorema di Tolomeo applicato ai quadrilateri $DCBP$ e $DCPA$ si ha

$$DB \cdot PC = DC \cdot PB + BC \cdot DP, \qquad AC \cdot PD = DC \cdot PA + AD \cdot PC,$$

cioè

$$d \cdot PC = \ell \cdot PB + \ell \cdot PD, \qquad d \cdot PD = \ell \cdot PA + \ell \cdot PC$$

da cui la conclusione.■

Problema 6. *([C]) $ABCDE$ è un pentagono regolare. Sia P un punto del cerchio circoscritto appartenente all'arco AB. Dimostrare che*

$$AP + BP + DP = CP + EP$$

(Per la soluzione vedere [C] pag. 111)

Problema 7. *([C]) Siano A, B, C, D, quattro vertici consecutivi di un poligono regolare di n lati. Si supponga che*

$$\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$$

e si trovi n.

(Per la soluzione vedere [C] pag. 113)

Problema 8. *([O2]) ABC è il triangolo con baricentro G e lati $a = BC, b = CA, c = AB$. Trovare il punto P nel piano che minimizza*

$$AP \cdot AG + BP \cdot BG + CP \cdot CG$$

e trovare il minimo in funzione di a, b, c.

(Per la soluzione vedere [O2], 42nd IMO 2001 shortlist.)

Problema 9. *([O2], 24th Austrian-Polish 2001) Mostrare che l'area di un quadrilatero è al piú $(ac + bd)/2$, dove le lunghezze dei lati sono a, b, c, d (con a opposto al lato c). Quando vale l'uguaglianza ?*

Soluzione

L'area del quadrilatero è $S = \frac{1}{2}xy \sin \alpha$, dove α è l'angolo tra le diagonali x e y. Naturalmente $S = \frac{1}{2}xy$ se e solo se $\sin \alpha = 1$, cioè $\alpha = \pi/2$.

Poiché $\sin \alpha \leq 1$ si ha

$$S = \frac{1}{2}xy \sin \alpha \leq \frac{1}{2}xy$$

e dall'estensione del teorema di Tolomeo $xy \leq ac + bd$ da cui

$$S \leq \frac{1}{2}(ac + bd)$$

Da quanto precede segue che

$$S = \frac{1}{2}(ac + bd) \Leftrightarrow \textit{il quadrilatero è ciclico e } \sin \alpha = 1 \blacksquare$$

Vogliamo ora studiare piú da vicino l'area S di un quadrilatero.

Teorema 3. *Sia dato un quadrilatero di lati a, b, c, d e supponiamo che i primi due comprendono l'angolo α e gli altri due l'angolo β. Allora*

$$16S^2 = 4a^2b^2 + 4c^2d^2 - 8abcd \cos(\alpha + \beta) - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2$$

Traccia di dimostrazione

Si consideri il quadrilatero come costituito da due triangoli aventi come base la diagonale x a cui si oppongono gli angoli α e β; allora

$$2S = ab \sin \alpha + cd \sin \beta.$$

Ma per il teorema di Carnot applicato ai due triangoli si ha

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = x^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos\beta$$

da cui

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2ab\cos\alpha - 2cd\cos\beta.$$

Elevando al quadrato e sommando con $16S^2$ si ha la conclusione.$\blacksquare$

Ora fissati a, b, c, d, l'area massima si ha quando $\cos(\alpha + \beta) = -1 \Rightarrow \alpha + \beta = \pi$, quindi

Teorema 4. *Fissate le lunghezze dei lati, il quadrilatero ha area massima quando esso è ciclico.*

In tal caso

$$16S^2 = 4(a^2b^2 + c^2d^2) + 8abcd - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2) = 4(ab + cd)^2 - (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2.$$

Indicando con $P = 2p$ il perimetro, si ha

$$16S^2 = (P - 2a)(P - 2b)(P - 2c)(P - 2d) \Rightarrow S^2 = (p - a)(p - b)(p - c)(p - d)$$

e quindi il seguente teorema:

Teorema 5. *Per un quadrilatero ciclico vale la seguente formula di Brahmagupta (VI sec. d.C.)*

$$S = \sqrt{(p - a)(p - b)(p - c)(p - d)}$$

Si osservi che quando il quadrilatero degenera in un triangolo ($d = 0$) si ha la ben nota formula di Erone (I sec. d. C.) per l'area in funzione dei lati

$$S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$$

Si osservi che

$$(p - a) + (p - b) + (p - c) + (p - d) = 4p - 2p = 2p$$

quindi tenendo conto del teorema fondamentale citato in Appendice, possiamo concludere che

Teorema 6. *Fra tutti i quadrilateri di dato perimetro il quadrato ha l'area massima. Fra tutti i triangoli di dato perimetro il triangolo equilatero ha l'area massima.*

5 Appendice

Un risultato molto utile nelle applicazioni è il seguente, chiave di volta della teoria delle diseguaglianze ([K], si conoscono più di 50 dimostrazioni diverse).

Teorema fondamentale. *([K]) Il prodotto di n numeri positivi aventi una data somma è massimo quando essi sono tutti uguali. Più precisamente se A è la media aritmetica dei numeri dati, si ha*

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = nA \qquad (a_i > 0) \Rightarrow a_1 a_2 ... a_n \leq A^n$$

$$a_1 a_2 ... a_n = A^n \qquad \Leftrightarrow \qquad a_1 = a_2 = ... = a_n$$

Se indichiamo con $G = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$ la media geometrica dei numeri a_1, a_2, ..., a_n, dal teorema segue che

$$G \leq A \qquad e \qquad G = A \Leftrightarrow a_1 = a_2 = ... = a_n$$

Per $n = 2$ questo risultato è diretta conseguenza del teorema di Euclide (in un triangolo rettangolo l'altezza è media proporzionale tra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa) e il teorema si può facilmente dedurre dalla seguente identità algebrica, nota fin dalle scuole medie inferiori

$$(x+y)^2 - (x-y)^2 = 4xy \Leftrightarrow xy = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x-y}{2}\right)^2$$

Se $x = m^2$ e $y = n^2$ con m, n numeri *interi*, l'dentità considerata dà

$$(m^2 + n^2)^2 = (m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2,$$

che permette di trovare tutte le cosiddette *terne pitagoriche* (a, b, c), dove a, b, c sono interi e $a^2 + b^2 = c^2$, ponendo per $m > n$

$$a = m^2 - n^2, \qquad b = 2mn, \qquad c = m^2 + n^2.$$

La ricerca delle terne pitagoriche (problema eminentemente algebrico, anche se la formula $a^2 + b^2 = c^2$ richiama il teorema di Pitagora) è precedente certamente alla Scuola pitagorica (VI sec. a. C.). Infatti la tavoletta babilonese, chamata Plimpton 322 (risalente al periodo tra il 1900 e il 1600 a. C.) riporta una lista di terne "pitagoriche". La terna fondamentale $(3, 4, 5)$ si trova con significato mistico in tante religioni orientali.

Se $x + y = 2s$, cioè se consideriamo tutti i numeri reali che hanno somma costante, allora da

$$xy = s^2 - (x - y)^2/4$$

segue

Teorema 7. *Il prodotto di due numeri reali positivi aventi somma data è massimo quando essi sono tra loro uguali.*

Interpretazione del risultato precedente è

Teorema 8. *Fra tutti i rettangoli di dato perimetro, il quadrato è quello di area massima.*

Ora ad ogni problema di massimo corrisponde un problema duale di minimo; nel nostro caso si ha:

Teorema 9. *Fra tutti i rettangoli aventi una area fissata, il quadrato ha perimetro minimo.*

Sempre nell'ipotesi $x + y = 2s$, tenendo conto che

$$x^2 + y^2 = 4s^2 - 2xy$$

segue che $x^2 + y^2$ è minimo quando xy è massimo, cioè quando $x = y = s$. La corrispondente interpretazione geometrica è

Teorema 10. *Fra i triangoli rettangoli di cui è data la somma dei cateti o l'area, quello isoscele ha la minima ipotenusa,*

e quindi

Teorema 11. *Fra i quadrati inscritti in un quadrato dato, quello che ha per vertici i punti medi di codesto quadrato ha perimetro ed area minimi.*

Nella teoria degli isoperimetri il teorema fondamentale, di semplice enunciato, ma di non facile dimostrazione, è:

Teorema 12 (Zenodoro, circa 180 a. C.). *Fra tutti gli n-agoni con medesimo perimetro, l'n-agono regolare ha l'area massima.*

Questa è la versione poligonale del celebre *teorema isoperimetrico*, che risponde al noto *problema di Didone* (En.I, 360-368)

...taurino quantum possent circumdare tergo

cioè, fra tutte le curve piane di ugual perimetro quale sia quella che racchiude la massima area. Una delle vie per raggiungere elementarmente i risultati è quella indicata da *J. Steiner* (1796-1863), la cui idea fondamentale si può formulare dicendo che *la figura massimale (necessariamente convessa) deve avere un asse di simmetria in ogni direzione*. Da qui segue che la risposta al problema isoperimetrico nel piano è data dal cerchio, nello spazio dalla sfera.

Questo tipo di problemi, in particolare la loro versione analitica, fa parte del ramo della matematica detto *Calcolo delle variazioni*, nato sul finire del secolo XVII, per opera in particolare dei fratelli Bernoulli, in connessione a problemi di massimo e di minimo che dipendono da una o piú curve o superficie (ad es. curva di minima lunghezza tra due punti dati detta *geodetica*, curva di minimo tempo detta *brachistocrona*, superficie di area minima, bolle di sapone).

Le questioni di massimo e di minimo hanno sempre avuto un grande valore anche nell'interpretazione dei fenomeni naturali, perché su questi domina un principio generale di *economia*: la natura, nelle sue manifestazioni, tende a risparmiare il piú possibile l'energia che deve impiegare. L. Euler (1707-1783) diceva che, essendo la costruzione del mondo la piú perfetta possibile, come quella di un Creatore infinitamente saggio, in natura nulla avviene che non presenti proprietà di massimo o di minimo. Ad es. Erone, Fermat (1601-1665) e Huyghens (1629-1695) hanno dedotto da un principio di minimo le leggi della riflessione, della rifrazione e della propagazione generale della luce; H.R Hertz (1857-1894) ha enunciato un principio di inerzia molto generale.(*Un punto, che si muove su una superficie, per inerzia segue una geodetica della superficie stessa*).

Notevoli contributi nel campo del Calcolo delle Variazioni sono stati dati da eminenti matematici come L. Euler, G.L. Lagrange, al quale si deve il concetto di *variazione* (1755), concetto che ha consentito di estendere ai problemi della nuova teoria i procedimenti con i quali il calcolo differenziale giunge alla determinazione dei massimi e minimi delle funzioni numeriche.

In questo secolo progressi significativi sono stati ottenuti da Ennio De Giorgi (1928-1996), il matematico leccese a cui è intitolato il Dipartimento di Matematica dell'Università di Lecce. Egli, maestro di scienza e di vita per tanti di noi, ha sempre creduto nella possibilità di comunicare ai non esperti problemi e risultati di matematica anche superiore, convinto che *l'equilibrato sviluppo di tutta la società dipende in larga misura dall'armonioso sviluppo delle varie forme del pensiero umano, scientifico, artistico, etico, religioso.*

6 Problemi

Problema 10. *([K]) Fra tutte le scatole (a forma di parallelepipedo rettangolo) di superficie (totale) data, quale è quella che ha il massimo volume?*

Soluzione

Siano a, b, c le lunghezze degli spigoli della scatola avente superficie S e volume V. Allora

$$V = abc, \qquad S = 2(ab + bc + ca) = costante.$$

Ponendo $a_1 = ab, a_2 = bc, a_3 = ca$, per il teorema fondamentale si ha

$$(ab \cdot bc \cdot ca)^{1/3} \leq \frac{1}{3}((ab + bc + ca) \Rightarrow (V^2)^{1/3} \leq S/6.$$

Il massimo per il volume si ha quando vale l'uguaglianza, cioè

$$ab = bc = ca \qquad \Rightarrow \qquad a = b = c,$$

cioè quando la scatola è un cubo. ■

Problema 11. *([K]) Fra tutte le scatole senza coperchio di superficie data, quale è quella che ha il massimo volume ?*

Soluzione

Togliamo la faccia ab. Allora

$$S = 2ac + 2bc + ab = costante, \qquad V = abc.$$

Ora

$$(2ac)(2bc)(ab) = 4a^2b^2c^2 = 4V^2,$$

quindi V è massimo quando

$$2ac = 2bc = ab \qquad \Rightarrow \qquad a = b = 2c,$$

cioè la scatola deve essere metà di un cubo. ■

Problema 12. *([K]) Fra tutte le scatole che possono essere impacchettate da un filo di spalo di data lunghezza ℓ, quale è quella di massimo volume ?*

Soluzione

Facendo un disegno e chiamando con c l'altezza della scatola, si vede facilmente che

$$2a + 2b + 4c < \ell \qquad \Rightarrow a + b + 2c < \ell/2.$$

Per il teorema fondamentale

$$(a \cdot b \cdot 2c) \leq \frac{1}{3}\frac{\ell}{2} \Rightarrow (2V)^{1/3} \leq \frac{1}{3}\frac{\ell}{2}$$

Si ha quindi il massimo per

$$a = b = 2c \qquad \Rightarrow \qquad c \leq \ell/12. \blacksquare$$

Problema 13. *([K]) E' data la somma delle lunghezze degli spigoli di una scatola. Dimostrare che tra tutte le scatole in tali condizioni, il cubo ha la massima area superficiale e il massimo volume.*

Problema 14. *([K]) Fra tutti i barattoli (a forma di cilindro circolare retto) di dato volume, qual è quello che ha la minima superficie (totale)?*

Traccia di soluzione

Indichiamo con V il volume, S la superficie, r il raggio ed h l'altezza del cilindro. Allora

$$S = 2\pi(r^2 + rh), V = \pi r^2 h \Rightarrow S = 2\pi \left(r^2 + \frac{V}{2\pi r} + \frac{V}{2\pi r} \right).$$

Ponendo $a_1 = r^2, a_2 = a_3 = V/(2\pi r)$, si ha $a_1 + a_2 + a_3 = S/(2\pi) = cost.$, quindi la minima superficie per

$$a_1 = a_2 = a_3 \Rightarrow \frac{V}{2\pi r} = r^2 \Rightarrow V = 2\pi r^3 \Rightarrow h = 2r. \blacksquare$$

Bibliografia

[B] C.B. Boyer, Storia della matematica, Mondadori, 1980.

[C] F. Conti, M. Barsanti, T. Franzoni (a cura di), Le Olimpiadi della Matematica, Zanichelli, Bologna, 1994.

[CR] R. Courant, H. Robbins, Che cos'è la matematica ?, (edizione riveduta da I. Stewart), Bollati Boringhieri, Torino, 2000

[E] H. Eves, A survey of geometry, Allyn and Bacon Inc. 1963.

[F] U. Forti, Trigonometria, Zanichelli, Bologna 1960.

[G] R. Gelca, Mathematical Olympiad Challenges, forward by M. Saul, Birkhäuser, 2000 .

[Gs] E. Giusti,*La trigonometria greca*, `http://www.math.unifi.it`, *Il giardino di Archimede.*

[K] N. D. Kazarinoff, Disuguaglianze geometriche, Zanichelli, Bologna 1983.

[O1] Internet, `http://olimpiadi.ing.unipi.it`, vedi Appendici: *Una breve escursione tra alcuni teoremi di geometria poco noti.*

[O2] Internet, `http://www.kalva.demon.co.uk`, (contiene una ricca raccolta di problemi dati alle Olimpiadi di diversi Paesi).